

Функции с универсальным рядом Фурье

Григорян Мартин Геворгович

Семинар по теории функций действительного переменного
29 апреля 2022 года

В докладе будут рассмотрены вопросы, связанные с существованием и описанием структуры (**универсальных**) функций, ряды Фурье которых в том или ином смысле универсальны в классах $L^p[-\pi, \pi]$, $L^p[-\pi, \pi]^2$, $p \in (0, 1)$.

Существование функций и рядов, универсальных в том или ином смысле в различных классах функций, изучалось многими математиками, и публикации по этой тематике регулярно появляются в математической печати.

Понятие универсального ряда (как по классическим, так и по общим ортонормальным системам) восходит к работам Меньшова и Талаляна. Наиболее общие результаты были получены ими и их учениками.

Первой работой, где построены универсальные в обычном смысле тригонометрические ряды в классе всех измеримых функций в смысле сходимости почти всюду является работа [1] Меньшова.

Ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ по любой ортонормированной полной системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $x \in [0, 1]$, универсальные в классе всех измеримых функций в смысле сходимости почти всюду, были построены в работе [2] Талаляном.

В [3] Гроссе - Эрдман доказал существование универсального ряда Тейлора в классе всех непрерывных на $[-1, 1]$ функций $f(x)$ с $f(0) = 0$.

Замечание 1. Нетрудно видеть, что из знаменитой теоремы Колмогорова [4] (ряд Фурье каждой интегрируемой функции по тригонометрической системе сходится в $L^p[-\pi, \pi]$, $p \in (0, 1)$) следует, что не существует функции $U \in L^1[-\pi, \pi]$ ряд Фурье которой по тригонометрической системе (а также по системе Уолша) был бы универсальным в классе всех измеримых функций.

Значит в классе измеримых функций не существует универсального ряда Фурье (по тригонометрической системе), но тем не менее можно построить универсальный тригонометрический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$ такой, что после выбора подходящих знаков $\{\delta_k = \pm 1\}_{k=0}^{\infty}$ для ее коэффициентов можно достичь того, что $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$ уже будет рядом Фурье некоторой интегрируемой функции (см. Теорему 1 и определение 3).

Возникает следующий вопрос ответ на который нам не известен

Вопрос 1. Существует ли ограниченная ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ такая, что в классе измеримых функций можно было бы построить универсальный ряд Фурье по системе $\{\varphi_n(x)\}$?

всех измеримых функций в смысле знаков.

Заметим, что единого определения понятия «универсальная функция» не существует. Обычно под этим термином понимается функция, с помощью которой можно «представить» «все» функции. При этом способ представления, а также класс представимых функций может трактоваться различным образом. Существование функций, универсальных в том или ином смысле изучалось многими математиками, работавшими в теории функций как действительного, так и комплексного переменного и публикации по этой тематике регулярно появляются в математической печати (см. также [1]-[10]).

Близким является понятие универсального ряда так называют ряды, с помощью которых можно представить любую функцию (здесь также способ представления и класс представимых функций можно понимать различным образом). Часто такой ряд связан с какой-то функцией, например, является ее рядом Тейлора или Фурье (Фурье-Стилтьеса).

Первые примеры универсальных функций были построены Биркгофом [1] в рамках комплексного анализа, при этом целые функции представлялись в

любом круге равномерно сходящимися сдвигами универсальной функции, Марцинкевичем [2] в рамках действительного анализа, при этом любая измеримая функция представлялась как предел почти всюду некоторой последовательности разностных отношений универсальной функции.

В. Г. Кротов [5] поставил и изучил вопрос о возможной гладкости таких функций F Марцинкевича

Ниже мы будем использовать следующие обозначения:

Пусть $L^p[a, b]$, $p > 0$ – класс всех тех измеримых на $[a, b]$ функций, для которых $\int_{[a, b]} |f(x)|^p dx < \infty$. Говорят, что последовательность $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ($f_k \in L^p[a, b]$, $k \in \mathbf{N}$ – совокупность натуральных чисел) сходится к $f(x) \in L^p[a, b]$ в $L^p[a, b]$, если $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 |f_k(x) - f(x)|^p dx = 0$.

Пусть $M[a, b]$ совокупность (не обязательно конечных) измеримых функций и $L^0[a, b]$ – класс всех почти везде конечных измеримых на $[a, b]$ функций, $C[a, b]$ – классе непрерывных на $[a, b]$ функций.

Под сходимостью в $L^0[a, b]$ мы будем подразумевать сходимость почти всюду и под сходимостью в $C[a, b]$ - равномерную сходимость.

Пусть $c_k(U) := \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx$ — коэффициенты Фурье по заданной на $[a, b]$ ортонормированной системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$ функции $U \in L^1[a, b]$, и пусть $S_m(U, \Phi) = \sum_{k=0}^m c_k(U)\varphi_k(x)$, $m \in \mathbf{N}$.

Пусть S - какое-нибудь из пространств $L^p[a, b]$, $p \in [0, 1)$ и $M[a, b]$.

Прежде чем перейти к формулировке некоторых результатов, дадим соответствующее определение.

Пусть метрическое пространство S — какое-нибудь из пространств $M[a, b]$, $L^p[a, b]$, $p \geq 0$, $C(E)$ и пусть $f_k \in S$.

Определение 1. Пусть $\Omega \subset \Lambda \subseteq \mathbf{N}$

$$\rho(\Omega)_\Lambda := \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|\Omega \cap (0, m)|}{|\Lambda \cap (0, m)|} \quad (1)$$

$\rho(\Omega)_\Lambda$ — называется плотностью подмножества Ω относительно множества Λ где через $|\Omega|$ — число точек конечного множества $\Omega \subset \mathbf{N}$.

Определение 2 . Будем говорить, что функция $U \in L^1[a, b]$ для класса S относительно системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^\infty$

а) **универсальна** (в обычном смысле), если ряд Фурье функции $U(x)$ по этой системе универсален в S , т.е. если для каждой функции $f \in S$ существует подпоследовательность возрастающих натуральных чисел n_k такая, что подпоследовательность частичных сумм $\{S_{n_k}(U, \Phi)\}_{k=1}^\infty$ ряд Фурье функции $U(x)$ с номерами n_k сходится к $f(x)$ в S ,

б) **условно универсальна**, если после выбора подходящих знаков $\{\delta_k = \pm 1\}_{k=0}^\infty$ для ее коэффициентов Фурье можно достичь того, что $\sum_{k=1}^\infty \delta_k c_k(U)\varphi_k(x)$ уже будет универсальным рядом в S ,

в) **почти универсальна**, если существует последовательность знаков $\{\delta_k = \pm 1\}_{k=-\infty}^\infty$, с $\rho(\Omega(u))_{\Lambda(u)} = 1$ (где $\Omega(u) = \{(k, s) \in \Lambda(u) = \text{spes}(u), \delta_k = 1\}$) что частичные суммы ряда $\sum_{k,s=-\infty}^\infty \delta_k c_k(U)e^{ikx}$ был бы плотными в S

г) **универсальна в смысле знаков**, если для каждой функции $f \in S$ можно найти последовательность знаков $\{\delta_k = \pm 1\}_{k=0}^\infty$, для которой ряд $\sum_{k=1}^\infty \delta_k c_k(U)\varphi_k(x)$ сходится к функции $f(x)$ в S ,

д) **универсальна в смысле перестановок**, если ряд Фурье функции $U(x)$ по этой системе универсален в S в смысле перестановок.

т.е. для каждой функции $f \in S$ члены ряда $\sum_{k=0}^\infty c_k(U)\varphi_k(x)$ можно переставить так, чтобы вновь полученный ряд $\sum_{k=1}^\infty c_{\sigma(k)}(U)\varphi_{\sigma(k)}(x)$ сходил к функции $f(x)$ в S .

Для классов $L^p[a, b]^2$, $p \in [0, 1]$ и $M[a, b]^2$ относительно двойной ортонормированной системы $\{\varphi_k(x)\varphi_l(y)\}_{k,l=1}^\infty$ разных типов универсальности интегрируемой функции двух переменных определяются аналогично.

Первой работой, где построены универсальные (в обычном смысле) тригонометрические ряды в классе $M[-\pi, \pi]$ в смысле сходимости почти всюду является работа [1] Меньшова.

В [4] Гроссе-Эрдман доказал существование бесконечно дифференцируемой действительной функции $\Gamma(x)$ с $\Gamma(0) = 0$, ряда Тейлора которой для любого $\gamma > 0$ универсален в $C[-\gamma, \gamma]$. Ясно, что ряда Тейлора этой функции универсален во всех $L^p[-\pi, \pi]$, $p \in (0, 1)$ и в $M[0, 1)$ в смысле сходимости почти всюду

Замечание 1. Следует отметить, что существование универсальных функций зависит от типа универсальности, от системы, от смысла сходимости и от пространства S (вопросы в этом направлении весьма емки).

Замечание 2. Нетрудно видеть, что из знаменитой теоремы Колмогорова [4] (ряд Фурье каждой интегрируемой функции по тригонометрической системе сходится в $L^p[-\pi, \pi]$, $p \in (0, 1)$) следует, что не существует функции $U \in L^1[-\pi, \pi]$ ряд Фурье которой по тригонометрической системе (а также по системе Уолша) был бы универсальным в $L^p[-\pi, \pi]$, $p \in (0, 1)$ и в классе $M[-\pi, \pi]$.

Но тем не менее можно построить функцию $U \in L^1[-\pi, \pi]$, которая **условно универсальна** для класса $M[-\pi, \pi]$ (соотв. для класса $L^p[-\pi, \pi]$) при $p \in (0, 1)$ относительно тригонометрической системы.

Возникает следующий вопрос ответ на который нам не известен

Вопрос 1. Существует ли ограниченная ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ такая, что в классе измеримых функций можно было бы построить универсальный ряд Фурье по системе $\{\varphi_n(x)\}$?

Нетрудно видеть, что не существует функции $U \in L^1[0, 1)$, которая была бы условно универсальной для класса $L^p[0, 1)$, $p \geq 1$ относительно тригонометрической системы.

Замечание 3. Каковы бы не были число $p \geq 1$ и полная ограниченная ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$, не существует функции $U \in L^1[0, 1]$, которая была бы **условно** универсальной для класса $L^p[0, 1]$ относительно системы $\{\varphi_n(x)\}$ в смысле знаков (соотв. в смысле подпоследовательностей знаков) своих коэффициентов Фурье по этой системе.

Действительно, если бы при некотором $p \geq 1$ относительно некоторой ограниченной ОНС системы $\{\varphi_n(x)\}$ существовала функция $U \in L^1[0, 1]$, которая **условно** универсальна для класса $L^p[0, 1]$, $p \geq 1$, то нашлись бы числа $\delta_k = \pm 1$, такие, что для функции $f(x) = k_0 c_{k_0}(U) \varphi_{k_0}(x)$, где $k_0 > 1$ любое натуральное число с условием $c_{k_0}(U) \neq 0$, можно было бы найти такую подпоследовательность $N_m \nearrow^\infty$, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{N_m} \delta_k c_k(U) \varphi_k(x) - k_0 c_{k_0}(U) \varphi_{k_0}(x) \right|^p dx = 0.$$

Отсюда сразу получаем противоречие – $\delta_{k_0} = k_0 > 1$.

Отметим, что докладчик и Галоян (см. Изв. РАН. Сер. матем., 85, 2, 73–94 (2021)) доказали, что в случае $p \in (0, 1)$ существует функция $U \in L^1[-\pi, \pi]$, которая **условно универсальна** для класса $L^p[-\pi, \pi]$ при $p \in (0, 1)$ относительно тригонометрической системы.

В работе [13] построена функция $U \in L^1[-\pi, \pi]$ –универсальна для класса $L^p[-\pi, \pi]$ при $p \in (0, 1)$ относительно тригонометрической системы **в смысле знаков**.

$$L^0[-\pi, \pi] - ? \\ + L^0[0, 1]$$

Замечание 4. Отметим, что не существует функции $U \in L^1[0, 1]$, которая была бы универсальной для класса $L^0[0, 1]$ в смысле знаков относительно системы $\{f_n(x)\}$, построенной Борисом Сергеевичем Кашиним .

Борис Сергеевич доказал следующую важную теорему

Теорема. Существует полная в $L^2[0, 1]$ ортонормированная система $\{f_n(x)\}$ ограниченных функций такая, что из сходимости почти всюду на $[0, 1]$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(x)$ вытекает $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$).

Отметим также, что мы не знаем ответа на вопрос о том, существует ли функция $U \in L^1[-\pi, \pi]$ универсальна для класса $L^p[-\pi, \pi]$, $p \in (0, 1)$ или $M[-\pi, \pi]$ относительно тригонометрической системы **в смысле перестановок** ?

Оказывается, что любую измеримую, почти всюду конечную функцию путем изменения ее значений на множестве сколь угодно малой меры можно превратить в почти универсальную функцию для класса $L^p[-\pi, \pi]$, $p \in (0, 1)$ относительно тригонометрической системы.

Теперь о почти универсальности относительно двойной тригонометрической системы $\{e^{ikx}e^{isy}\}_{k,s=-\infty}^{\infty}$.

Пусть $T^2 := [-\pi, \pi]^2 = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] = T^1 \times T^1$, пусть $f : T^2 \longrightarrow R$ и пусть

$$L^p(T^2) = \{f; \int\int_{T^2} |f(t, \tau)|^p dt d\tau < \infty, \quad p > 0 \}.$$

Прямоугольные и сферические частичные суммы ряда Фурье по двойной тригонометрической системе функции $f \in L^1(T^2)$ ($f(x + 2\pi, y) = f(x, y + 2\pi) = f(x, y)$) определяются соответственно следующим образом:

$$S_{n.m}((x, y), f) = \sum_{|k| \leq n} \sum_{|s| \leq m} \hat{f}_{k,s} e^{ikx} e^{isy}; \quad S_R((x, y), f) = \sum_{k^2 + s^2 \leq R^2} \hat{f}_{k,s} e^{ikx} e^{isy}, \quad (1)$$

где

$$\hat{f}_{k,s} := \frac{1}{4\pi^2} \iint_{T^2} f(t, \tau) e^{-ikt} e^{-ist} dt d\tau - \quad (2)$$

-коэффициенты Фурье функции $f \in L^1(T^2)$ по двойной тригонометрической системе $\{e^{ikx} e^{isy}\}_{k,s=-\infty}^{\infty}$ функции $f \in L^1(T^2)$.

Спектр функций $u \in L^1(T^2)$ будем обозначать через

$$\Lambda(u) := \text{spec}(u) = \{(k, s); \quad \hat{u}_{k,s} \neq 0\}, \quad (3)$$

а через $\neq(\Omega)$ будем обозначать число точек конечного множества $\Omega \subset Z^2 := \{(k_1, k_2) : |k_1|, |k_2| \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$, где $\mathbf{N}$ —множество натуральных чисел.

Прежде чем перейти к формулировке некоторых результатов, напомним соответствующие определения

Определение 1⁺. Пусть $\Omega \subset \Lambda \subseteq Z^2$

$$\rho(\Omega)_\Lambda := \sup \lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} \frac{\neq(\Omega \cap ((-n, n) \times (-m, m)))}{\neq(\Lambda \cap ((-n, n) \times (-m, m)))} \quad (4)$$

$\rho(\Omega)_\Lambda$ —называется плотностью подмножества Ω относительно множества Λ

Определение 2⁺. Будем говорить, что функция $u \in L^1(T^2)$ для класса $L^p(T^2)$ относительно двойной тригонометрической системы $\{e^{ikx} e^{isy}\}_{k,s=-\infty}^{\infty}$

а) **универсальна (по прямоугольникам, соответственно по сферам)**, если прямоугольные, соотв. сферические частичные суммы ряда Фурье функции $u(x, y)$ по двойной системе $\{e^{ikx} e^{isy}\}_{k,s=-\infty}^{\infty}$ плотны в $L^p(T^2)$,

б) **условно универсальна** (по прямоугольникам, соответственно по сферам), если существует последовательность знаков $\{\delta_{k,s} = \pm 1\}_{k,s=-\infty}^{\infty}$, что прямоугольные (соотв. сферические) частичные суммы ряда $\sum_{k,s=-\infty}^{\infty} \delta_{k,s} \hat{u}_{k,s} e^{ikx} e^{isy}$ был бы плотными в $L^p(T^2)$,

в) **почти универсальна** (по прямоугольникам, соответственно по сферам), если существует последовательность знаков $\{\delta_{k,s} = \pm 1\}_{k,s=-\infty}^{\infty}$, с $\rho(\Omega(u))_{\Lambda(u)} = 1$ (где $\Omega(u) = \{(k, s) \in \Lambda(u) = \text{spec}(u), \delta_{k,s} = 1\}$) что прямоугольные (соотв. сферические) частичные суммы ряда $\sum_{k,s=-\infty}^{\infty} \delta_{k,s} \hat{u}_{k,s} e^{ikx} e^{isy}$ был бы плотными в $L^p(T^2)$.

Аналогично можно дать приведенные выше обозначения и определения (в одномерном) и в многомерном случаях. Пусть

$$T^d := [-\pi, \pi]^d; \quad d \in \mathbf{N}$$

Недавно Сергей Владимирович Конягин доказал следующую важную теорему

Теорема 1. (Конягин С. В.). Пусть подпоследовательность частичных сумм ряда Фурье функции $f \in L^1(T^d)$ по кратной тригонометрической системе по Прингсхейму (по прямоугольникам) на некотором множестве $E \subset T^d$ положительной меры сходится к функции g (не обязательно конечной). Тогда $g = f$ почти всюду на E .

Из этой теоремы следует

Теорема 2. (Конягин С. В.). Не существует функции $u \in L^1(T^d)$, $d \geq 2$ универсальна по прямоугольникам для класса $L^p(T^d)$, $p \in (0, 1)$ относительно кратной тригонометрической системы.

Замечание 1. Тот факт, что не существует функции $u \in L^1(T^1)$, которая была бы универсальной для класса $L^p(T^1)$, $p \in (0, 1)$ относительно тригонометрической системы, следует из знаменитой теоремы А. Н. Колмогорова [2] (ряд Фурье каждой интегрируемой функции по тригонометрической системе сходится в $L^p(T^1)$, $p \in (0, 1)$) и несмотря на то, что теорема Колмогорова, как доказал С. В. Конягин [3], не верна для кратной тригонометрической системы, но приведенное выше утверждение справедливо и в многомерном случае.

Тем не менее, существует функция $u \in L^1(T^d)$ - условно универсальна (по прямоугольникам и по сферам), для класса $L^p(T^d)$, $p \in (0, 1)$ относительно кратной тригонометрической системы

Более того имеет место следующее утверждение

Теорема 3. Существует функция $u \in L^1(T^d)$ почти универсальна как прямоугольникам так и по сферам для класса $L^p(T^d)$, $p \in (0, 1)$ относительно кратной тригонометрической системы.

Отметим, что из теоремы 2 Конягина вытекает, что теорема 3 окончательна в определенном смысле, за это выражаю благодарность Сергею Владимировичу Конягину.

В связи с приведенными выше результатами и определением возникают следующие (на наш взгляд, актуальные) вопросы, ответы на которые нам неизвестны. (Интересно было бы узнать ответы на эти вопросы).

Вопрос 1. Существует ли функция $U \in L^1[-\pi, \pi)$ универсальна для класса $L^p[-\pi, \pi)$, $p \in (0, 1)$ или $M[-\pi, \pi)$ относительно тригонометрической системы **в смысле перестановок** ?

Вопрос 2. Существует ли функция $U \in L^1[0, 1)$ универсальна для классов $L^p[0, 1]$, $p \in (0, 1)$ относительно системы Уолша **в смысле перестановок** ?

Вопрос 3. Существует ли ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$, относительно которой для класса $M[0, 1)$ (соотв. $L^p[0, 1]$ при некотором $p \in [0, 1)$) можно было бы построить универсальную функцию?

Вопрос 4. Верны ли теоремы 1 и 2 для системы Виленкина (соов. для системы Хаара, для системы Франклина)?

Вопрос 5. Существуют ли ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$, $x \in [0, 1]$ и функция $U \in L^1[0, 1]^2$, такие, что ряда Фурье функции U по двойной системе $\{\varphi_k(x)\varphi_l(y)\}_{k,l=1}^\infty$ был бы универсальным $L^p[0, 1]^2$ при некотором $p \in (0, 1)$?

Вопрос 6. Можно ли в теореме 3 почти универсальную функцию выбрать так, чтобы ее ряд Фурье сходилась в $L^1(T^2)$ (по прямоугольникам, по сферам)?

В связи с вопросом 1 отметим, что существуют функция $U \in L^1[-\pi, \pi)^2$ такая, что после выбора подходящих знаков $\{\delta_k = \pm 1\}_{k=-\infty}^\infty$ для ее коэффициентов Фурье можно достичь того, что $\sum_{k=-\infty}^\infty \delta_k c_k(U) e^{ikx}$ уже будет универсальным рядом в $L^p[-\pi, \pi)^2$, $p \in (0, 1)$ в смысле перестановок.

Теперь докажем

Теорема 3. Существует функция $u \in L^1(T^2)$ почти универсальна как по прямоугольникам так и по сферам для класса $L^p(T^2)$, $p \in (0, 1)$ относительно двойной тригонометрической системы.

§ 1. Основные леммы

Основным средством для доказательства теоремы 3 (в двумерном случае) является следующая лемма

Лемма 2[×] . Пусть даны числа $N_0 \in \mathbf{N}$; $\varepsilon, \eta, p \in (0, 1)$ и функция $f(x, y) \in L^p(T^2)$, $p \in (0, 1)$. Тогда можно найти полиномы по двойной тригонометрической системе вида

$$H(x, y) = \sum_{N_0 \leq |k|, |l| \leq N} c_{k,l} e^{i(kx+ly)} = \sum_{N_0 \leq |k| \leq N} \sum_{N_0 \leq |l| \leq N} c_{k,l} e^{i(kx+ly)},$$

$$Q(x, y) = \sum_{N_0 \leq |k|, |l| \leq N} \delta_{k,l} c_{k,l} e^{i(kx+ly)}, \quad \delta_{k,l} = \pm 1, \quad N_0 \leq |k| \leq N, \quad N_0 \leq |l| \leq N$$

удовлетворяющие следующим условиям:

$$\iint_{T^2} |H(x, y)| dx < \theta, \quad \iint_{T^2} |f(x, y) - Q(x, y)|^p dx dy < \varepsilon,$$

При доказательстве леммы $2^\times$ воспользуемся леммой 4.2, доказанной в [4]:
Изв. РАН. Сер. матем., 85, 2, 73–94 (2021)

Лемма 4.2 . Для любых чисел $n \in N, \varepsilon_0, \eta_0, p \in (0, 1), \gamma_0 \neq 0$ и отрезок интервала $\Delta_0 \subset [-\pi, \pi]$ существуют тригонометрические полиномы

$$H(x) = \sum_{n \leq |k| < m} c_k e^{ikx}, \quad Q(x) = \sum_{n \leq |k| < m} \delta_k c_k e^{ikx}, \quad \delta_k = \pm 1,$$

удовлетворяющие следующим условиям:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |Q(x) - \gamma_0 \chi_{\Delta}(x)|^p dx < \varepsilon,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |H(x)| dx < \varepsilon,$$

Сперва докажем следующую лемму

Лемма $1^\times$. Для любых чисел $\gamma \neq 0, \varepsilon, \eta, p \in (0, 1), N_0 > 1$ и для любого квадрата $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \subset T^2 = [-\pi, \pi]^2$ существуют полиномы по двойной тригонометрической системе вида

$$H(x, y) = \sum_{N_0 \leq |k|, |s| < N} c_{k,s} e^{i(kx+sy)}, \quad Q(x, y) = \sum_{N_0 \leq |k|, |s| < N} \delta_{k,s} c_{k,s} e^{i(kx+sy)}, \quad \delta_{k,s} = \pm 1,$$

обладающие следующими свойствами:

$$\iint_{T^2} |Q(x, y) - \gamma \chi_{\Delta}(x, y)|^p dx dy < \varepsilon,$$

$$\iint_{T^2} |H(x, y)| dx dy < \eta.$$

($\chi_E(x, y)$ - характеристическая функция множества E)

Доказательство Леммы $1^\times$. Применим лемму 4.2, полагая в ее формулировке

$$\gamma_0 = \gamma, \Delta_0 = \Delta_1, \quad n = N_0, \quad \eta_0 = \sqrt{\eta}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{4|\Delta_2|}$$

Тогда определяются полиномы $H_1(x)$ и $Q_1(x)$ вида

$$H_1(x) = \sum_{N_0 \leq |k| < N} a_k e^{ikx}, \quad Q_1(x) = \sum_{N_0 \leq |k| < N} \beta_k a_k e^{ikx}, \quad \beta_k = \pm 1, \quad (1.1)$$

удовлетворяющие условиям:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |Q_1(x) - \gamma \chi_{\Delta_1}(x)|^p dx < \frac{\varepsilon}{2|\Delta_2|}, \quad (1.2)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |H_1(x)| dx < \sqrt{\eta}. \quad (1.3)$$

Снова применим Лемму 4.2, полагая в ее формулировке

$$\gamma_0 = 1, \quad \Delta_0 = \Delta_2, \quad n = N_0, \quad \eta_0 = \sqrt{\eta}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2 \int_{-\pi}^{\pi} |Q_1(x)|^p dx}.$$

Тогда определяются полиномы $H_2(y)$ и $Q_2(y)$ вида

$$H_2(y) = \sum_{N_0 \leq |k| < N} b_s e^{isy}, \quad Q_2(y) = \sum_{N_0 \leq |s| < N} \epsilon_s b_s e^{isy}, \quad \epsilon_s = \pm 1, \quad (1.4)$$

такие, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} |Q_2(y) - \chi_{\Delta_2}(y)|^p dy < \frac{\varepsilon}{2 \int_{-\pi}^{\pi} |Q_1(x)|^p dx}, \quad (1.5)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |H_2(y)| dy < \sqrt{\eta}. \quad (1.6)$$

Определим полиномы $H(x, y)$ и $Q(x, y)$ и числа $c_{k,s}$, $\delta_{k,s}$ следующим образом:

$$H(x, y) = H_1(x) H_2(y), \quad Q(x, y) = Q_1(x) Q_2(y), \quad (1.7)$$

$$c_{k,s} = a_k b_s, \quad N_0 \leq |k| < N, \quad N_0 \leq |s| < N, \quad (1.8)$$

$$\delta_{k,s} = \beta_k \epsilon_s, \quad N_0 \leq |k|, |s| < N. \quad (1.9)$$

Из (1.1), (1.3) и (1.6)- (1.9) вытекает

$$H(x, y) = \sum_{N_0 \leq |n|, |s| < N} c_{k,s} e^{i(kx+sy)} = \sum_{N_0 \leq |k| \leq N} \sum_{N_0 \leq |l| \leq N} c_{k,l} e^{i(kx+ly)},$$

$$Q(x, y) = \sum_{N_0 \leq |n|, |s| < N} \delta_{k,s} c_{k,s} e^{i(kx+sy)}, \quad \delta_{k,s} = \pm 1, \quad N_0 \leq |k|, |s| < N,$$

и

$$\iint_{T^2} |H(x, y)| dx dy = \int_{-\pi}^{\pi} |H_1(x)| dx \int_{-\pi}^{\pi} |H_2(y)| dy < \eta.$$

В силу (1.2), (1.5) и (1.7) имеем

$$\begin{aligned} \iint_{T^2} |Q(x, y) - \gamma \chi_{\Delta}(x, y)|^p dx dy &= \iint_{T^2} |Q_1(x) Q_2(y) - \gamma \chi_{\Delta_1}(x) \chi_{\Delta_2}(y)|^p dx dy \leq \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |Q_2(y) - \chi_{\Delta_2}(y)|^p dy \int_{-\pi}^{\pi} |Q_1(x)|^p dx + \int_{-\pi}^{\pi} |Q_1(x) - \gamma \chi_{\Delta_1}(x)|^p dx \int_{-\pi}^{\pi} |\chi_{\Delta_2}(y)|^p dy < \varepsilon. \end{aligned}$$

Лемма 1[×] доказана.

Лемма 2[×]. Пусть даны числа $N_0 \in N, \varepsilon, \eta, p \in (0, 1)$ и функция $f(x, y) \in L^p[-\pi, \pi]^2$. Тогда можно найти полиномы по двойной тригонометрической системе вида

$$H(x, y) = \sum_{N_0 \leq |k|, |s| < N} c_{k,s} e^{i(kx+sy)}, \quad Q(x, y) = \sum_{N_0 \leq |k|, |s| < N} \delta_{k,s} c_{k,s} e^{i(kx+sy)}, \quad \delta_{k,s} = \pm 1, \quad N_0 \leq |k|, |s| \leq N$$

удовлетворяющие следующим условиям:

$$\iint_{T^2} |H(x, y)| dx < \eta, \quad \iint_{T^2} |f(x, y) - Q(x, y)|^p dx dy < \varepsilon.$$

Доказательство Леммы 2[×]. Возьмем ступенчатую функцию

$$\psi(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \gamma_{\nu} \chi_{\Delta_{\nu}}(x, y) \quad (1.10)$$

такую, что $(\Delta_{\nu}, (\nu = 1, 2, \dots, \nu_0))$ — квадраты постоянства функции $\psi(x, y)$

$$\iint_{T^2} |f(x, y) - \psi(x, y)|^p dx dy < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.11)$$

Последовательным применением леммы 1[×] можно определить полиномы

$$H_{\nu}(x, y) = \sum_{N_{\nu-1} \leq |k|, |s| < N_{\nu}} c_{k,s}^{(\nu)} e^{i(kx+sy)}, \quad \nu = 1, 2, \dots, \nu_0, \quad (1.12)$$

$$Q_{\nu}(x, y) = \sum_{N_{\nu-1} \leq |k|, |s| < N_{\nu}} \delta_{k,s}^{(\nu)} c_{k,s}^{(\nu)} e^{i(kx+sy)}, \quad \delta_{k,s}^{(\nu)} = \pm 1, \quad \nu = 1, 2, \dots, \nu_0 \quad (1.13)$$

удовлетворяющие условиям:

$$\iint_{T^2} |H_\nu(x, y)|^p dx dy \leq \frac{\eta}{\nu_0}, \nu = 1, 2, \dots, \nu_0, \quad (1.14)$$

$$\iint_{T^2} |Q_\nu(x, y) - \gamma_\nu \chi_{\Delta_\nu}(x, y)|^p dx dy < \frac{\varepsilon}{2\nu_0}, \nu = 1, 2, \dots, \nu_0. \quad (1.15)$$

Определим полиномы $H(x, y)$ и $Q(x, y)$ и следующим образом

$$H(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} H_\nu(x, y), \quad Q(x, y) = \sum_{\nu=1}^{\nu_0} Q_\nu(x, y), \quad (1.16)$$

где

$$c_{k,s} = \begin{cases} c_{k,s}^{(\nu)}, & N_{\nu-1} \leq |k|, |s| < N_\nu, \quad 1 \leq \nu \leq \nu_0, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.17)$$

$$\delta_{k,s} = \begin{cases} \delta_{k,s}^{(\nu)}, & N_{\nu-1} \leq |k|, |s| < N_\nu, \quad 1 \leq \nu \leq \nu_0. \\ 1, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (1.18)$$

В силу соотношения (1.12) - (1.14) и (1.16) -(1.18) будем иметь

$$H(x, y) = \sum_{N_0 \leq |k|, |s| < N} c_{k,s} e^{i(kx+sy)}, \quad Q(x, y) = \sum_{N_0 \leq |k|, |s| < N} \delta_{k,s} c_{k,s} e^{i(kx+sy)}, \quad \delta_{k,s} = \pm 1, \quad N_0 \leq |k|, |s| < N,$$

и

$$\iint_{T^2} |H(x, y)| dx dy = \iint_{T^2} |H(x, y)| dx dy \leq \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \iint_{T^2} |H_\nu(x, y)| dx dy \leq \mu, \quad N = N_{\nu_0}.$$

Из условий (1.10), (1.11), (1.15) и (1.16) следует:

$$\begin{aligned} \iint_{T^2} |f(x, y) - Q(x, y)|^p dx dy &\leq \iint_{T^2} |f(x, y) - \psi(x, y)|^p dx dy + \\ &+ \sum_{\nu=1}^{\nu_0} \iint_{T^2} |Q_\nu(x, y) - \gamma_\nu \chi_{\Delta_\nu}(x, y)|^p dx dy < \varepsilon. \end{aligned}$$

Лемма $2^\times$ доказана.

§ 2. Доказательство Теоремы 3.

Мы рассмотрим доказательство Теоремы 3 в двумерном случае.

Пусть

$$F = \{f_n(x, y)\}_{n=1}^{\infty}, \quad (2.1)$$

есть последовательность всех полиномов по двойной тригонометрической системе с рациональными коэффициентами. Нетрудно видеть, что последовательно применив лемму, по индукции можем найти последовательности полиномов $\{\{H_n^{(j)}(x, y)\}_{j=1}^{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\{Q_n^{(j)}(x, y)\}_{j=1}^{\lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ вида

$$H_n^{(j)}(x, y) = \sum_{M_n^{(j-1)} \leq |k|, |s| < M_n^{(j)}} c_{k,s}^{(n,j)} e^{i(kx+sy)}, \quad M_1^{(0)} = 1, \quad (2.2)$$

$$Q_n^{(j)}(x, y) = \sum_{M_n^{(j-1)} \leq |k|, |s| < M_n^{(j)}} \delta_{k,s}^{(n,j)} c_{k,s}^{(n,j)} e^{i(kx+sy)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

$$M_1^{(0)} < M_1^{(1)} < \dots < M_{n-1}^{(\lambda_{n-1})} = M_n^{(0)} < M_n^{(1)} < \dots < M_n^{(\lambda_n)} = M_{n+1}^{(0)} < M_{n+1}^{(1)} \dots, \quad (2.4)$$

которые для всех $j \in [1, \lambda_n]$ удовлетворяют условиям:

$$\lambda_n = 4^n (M_n^{(1)})^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

$$\delta_{k,s}^{(n,j)} = \pm 1, \quad M_n^{(j-1)} \leq |k|, |s| < M_n^{(j)}, \quad 1 \leq j \leq \lambda_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

$$\iint_{T^2} |H_n^{(j)}(x, y)| dx dy < 2^{-3(n+j)}, \quad 1 \leq j \leq \lambda_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

$$\iint_{T^2} \left| f_n(x, y) - \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=2}^{\lambda_k} H_k^{(j)}(x, y) + Q_k^{(1)}(x, y) \right) \right|^p dx dy < \frac{1}{2^{3(n+2)}}, \quad (2.8)$$

Ясно, что (см (2.7))

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\lambda_n} \left(\iint_{T^2} |H_n^{(j)}(x, y)| dx dy \right) < \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}. \quad (2.9)$$

Определим функцию $u(x, y)$ и последовательности чисел $\{c_{k,s}\}$ следующим образом

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\lambda_n} H_n^{(j)}(x, y) \right) = \sum_{k,s=-\infty}^{\infty} c_{k,s} e^{i(kx+sy)}, \quad (2.10)$$

где

$$c_{k,s} = \begin{cases} c_{k,s}^{(n,j)}, & M_n^{(j-1)} \leq |k|, |s| < M_n^{(j)}, \quad 1 \leq j \leq \lambda_n, \quad n = 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.11)$$

Отсюда и из (2.7) и (2.9)–(2.11) получим

$$\begin{aligned} u \in L^1(T^2), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{T^2} \left| \sum_{0 \leq |k|, |s| < M_n^{(\lambda_n)} c_{k,s} e^{i(kx+sy)} - u(x, y) \right| dx dy = \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{T^2} \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\lambda_m} H_m^{(j)}(x, y) \right) \right| dx dy = 0, \end{aligned}$$

следовательно (см. (3) и (2.11))

$$c_{k,s} = \widehat{u}_{k,s}, \quad (k, s) \in Z^2, \quad (2.12)$$

и

$$\begin{aligned} \Lambda(u) \subseteq \{(k, s) \in Z^2; \ M_n^{(j-1)} \leq |k|, |s| < M_n^{(j)}, \ 1 \leq j \leq \lambda_n, \ n = 1, 2, \dots\} = \\ = \{(k, s) \in Z^2; \ (|k|, |s|) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=1}^{\lambda_n} [M_n^{(j-1)}, M_n^{(j)}]^2 \right)\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Положим

$$\delta_{k,s} = \begin{cases} 1, & (|k|, |s|) \in (Z^2 \setminus \Lambda(u)) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=2}^{\lambda_n} [M_n^{(j-1)}, M_n^{(j)}]^2 \right) \right) \\ \delta_{k,s}^{(n,1)}, & M_n^{(0)} \leq |k|, |s| < M_n^{(1)}, \ n = 1, 2, \dots \end{cases}, \quad (2.14)$$

$$\Omega(u) = \{(k, s) \in \Lambda(u) = \text{spec}(u), \ \delta_{k,s} = 1\} \quad (2.15)$$

$$\delta_{k,s} = \delta_{k,s}^{(n,1)} : (k, s) \in [M_n^{(0)}, M_n^{(1)}]^2\}$$

Принимая во внимание неравенство (см. (2.5), (2.6) и (2.13))

$$\begin{aligned} & \frac{\neq \left(\Omega(u) \cap ((-M_n^{(\lambda_n)}, M_n^{(\lambda_n)})^2) \right)}{\neq \left(\Lambda(u) \cap ((-M_n^{(\lambda_n)}, M_n^{(\lambda_n)}) \times (-M_n^{(\lambda_n)}, M_n^{(\lambda_n)})) \right)} \geq \\ & \geq \frac{\neq \left(\Lambda(u) \cap ((-M_n^{(\lambda_n)}, M_n^{(\lambda_n)}) \times (-M_n^{(\lambda_n)}, M_n^{(\lambda_n)})) \right) - \left(2M_n^{(1)} \right)^2}{\neq \left(\Lambda(u) \cap ((-M_n^{(\lambda_n)}, M_n^{(\lambda_n)}) \times (-M_n^{(\lambda_n)}, M_n^{(\lambda_n)})) \right)} \geq 1 - \frac{\left(2M_n^{(1)} \right)^2}{\lambda_n} \geq 1 - \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Отсюда и из (4), (2.13) имеем

$$\rho(\Omega(u))_{\Lambda(u)} = \sup \lim_{m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty} \frac{\neq (\Omega(u) \cap ((-n, n) \times (-m, m)))}{\neq (\Lambda(u) \cap ((-n, n) \times (-m, m)))} = 1. \quad (2.16)$$

Теперь докажем, что ряд

$$\sum_{k,s=-\infty}^{\infty} \delta_{k,s} \widehat{u}_{k,s} e^{i(kx+sy)} \quad (2.17)$$

универсален в пространстве $L^p(T^2)$ как по прямоугольникам так и по сферам (т.е. функция $u(x, y)$ почти универсальна для класса $L^p(T^2)$, $p \in (0, 1)$ как по прямоугольникам так и по сферам относительно двойной тригонометрической системы).

Пусть $f(x, y)$ произвольная функция из $L^p(T^2)$. Нетрудно видеть, что можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_q}(x, y)\}_{q=1}^{\infty}$ из последовательности (2.1) такую, что

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \iint_{T^2} |f_{n_q}(x, y) - f(x, y)|^p dx dy = 0 \quad (2.18)$$

Обозначая, через $N_q = M_{n_q}^{(1)} - 1$, из (2.3) и (2.11)- (2.15) для всех $n, m \geq N_q$, $q \geq 1$ будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{|k| \leq N_q} \sum_{|s| \leq m} \delta_{k,s} \widehat{u}_{k,s} e^{i(kx+sy)} &= \sum_{|k| \leq n} \sum_{|s| \leq N_q} \delta_{k,s} \widehat{u}_{k,s} e^{i(kx+sy)} = \\ &= \sum_{k^2+s^2 \leq R_q^2=2(N_q)^2} \delta_{k,s} \widehat{u}_{k,s} e^{i(kx+sy)} = \sum_{|k|, |s| \leq N_q} \delta_{k,s} \widehat{u}_{k,s} e^{i(kx+sy)}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\iint_{T^2} \left| \sum_{|k|, |s| \leq N_q} \delta_{k,s} \widehat{u}_{k,s} e^{i(kx+sy)} - f(x, y) \right|^p dx dy \leq \iint_{T^2} |f_{n_q}(x, y) - f(x, y)|^p dx dy$$

В силу (2.2), (2.3), (2.8), (2.11), (2.14), (2.15) и (2.18) имеем

$$\leq \iint_{T^2} \left| f_{n_q}(x, y) - \sum_{k=1}^{n_q} \left(\sum_{j=2}^{\lambda_k} H_k^{(j)}(x, y)(x, y) + Q_k^{(1)}(x, y) \right) \right|^p dx dy \rightarrow 0, \quad q \rightarrow \infty \quad (2.20)$$

Учитывая соотношения (1)-(4), (2.16), (2.17), (2.19) и (2.20) получаем, что функция $u(x, y)$ почти универсальна для класса $L^p(T^2)$, $p \in (0, 1)$ как по прямоугольникам так и по сферам относительно двойной тригонометрической системы.

Теорема 3(в двумерном случае) доказана.

(В многомерном случае доказывается аналогично)

Замечание 5. Оказывается, что любую измеримую, почти всюду конечную функцию путем изменения ее значений на множестве сколь угодно малой меры можно превратить в почти универсальную функцию для классов $L^p[-\pi, \pi]^2$, $p \in (0, 1)$ относительно двойной тригонометрической системы.

Теорема 5. Для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E_\varepsilon \subset [0, 1]$ с мерой $|E_\varepsilon| > 4\pi^2 - \varepsilon$ такое, что для каждой функции $f \in L^1(T^2)$ можно найти функцию $U \in L^1(T^2)$, совпадающую с f на E_ε и такую, что

$U(x)$ почти универсальна как прямоугольникам так и по сферам для класса $L^p(T^2)$, $p \in (0, 1)$ относительно кратной тригонометрической системы.

Основным средством для доказательства теоремы (в двумерном случае) является следующая лемма

Лемма 2⁺. Пусть заданы числа $N_0 \in \mathbf{N}$; $\varepsilon, \eta, p, \beta \in (0, 1)$ и функция $f(x, y) \in L^p(T^2)$, $p \in (0, 1)$. Тогда можно найти полиномы по двойной тригонометрической системе вида

$$H(x, y) = \sum_{N_0 \leq |k|, |l| \leq N} c_{k,l} e^{i(kx+ly)} = \sum_{N_0 \leq |k| \leq N} \sum_{N_0 \leq |l| \leq N} c_{k,l} e^{i(kx+ly)},$$

$$Q(x, y) = \sum_{N_0 \leq |k|, |l| \leq N} \delta_{k,l} c_{k,l} e^{i(kx+ly)}, \quad \delta_{k,l} = \pm 1, \quad N_0 \leq |k| \leq N, \quad N_0 \leq |l| \leq N$$

измеримот множество $E \subset T^2$ и функция $g(x, y)$ удовлетворяющие следующим условиям:

$$\iint_{T^2} |H(x, y)| dx dy < \eta, \quad \iint_{T^2} |f(x, y) - Q(x, y)|^p dx dy < \varepsilon,$$

++

$$\iint_{T^2} |g(x, y)| dx dy < 4 \iint_{T^2} |f(x, y)| dx dy,$$

$$g(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in E; \quad |E| \geq 4\pi^2 - \beta$$

Замечание 5. Метод доказательства Теоремы 2 позволяет получить новый подход для построения универсальных тригонометрических рядов : любую измеримую, почти всюду конечную функцию путем изменения ее значений на некоторой множестве сколь угодно малой меры можно превратить в такую функцию, что после выбора подходящих знаков $\{\delta_{k,s} = \pm 1\}_{k=-\infty}^{\infty}$ для ее коэффициентов можно достичь того, что $\sum_{k,s=-\infty}^{\infty} \delta_{k,s} \widehat{u}_{k,s} e^{i(kx+sy)}$ будет универсальным рядом в $M[-\pi, \pi]^2$, даже в $L^p(T^2)$, $p \in (0, 1)$.

С П А С И Б О !

$$\delta_{k,s} = \begin{cases} 1, & (|k|, |s|) \in (Z^2 \setminus \Lambda(u)) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{j=2}^{\lambda_n} [M_n^{(j-1)}, M_n^{(j)}]^2 \right) \right) \\ \delta_{k,s}^{(n,1)}, & M_n^{(0)} \leq |k|, |s| < M_n^{(1)}, \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}, \quad (2.14)$$

$$\Omega(u) = \{(k, s) \in \Lambda(u) = \text{spec}(u), \quad \delta_{k,s} = 1\} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \delta_{k,s} &= \delta_{k,s}^{(n,1)} : (k, s) \in [M_n^{(0)}, M_n^{(1)}]^2 \\ \lambda_n &= 4^n (M_n^{(1)})^2, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} &M_n^{(0)} \dots \pm 1 \dots M_n^{(1)} \dots +1 \dots M_n^{(2)} \dots +1 \dots M_n^{(3)} \dots +1 \dots M_n^{(j-1)} \dots +1 \dots M_n^{(j)} \dots +1 \dots M_n^{(\lambda_n)} = M_{n+1}^{(0)} \dots \\ &\pm 1 \dots M_{n+1}^{(1)} \dots \text{-----} \\ &\dots \pm \dots \pm \dots \pm 1, +1, \text{,,}, 1 \end{aligned}$$

В СМЫСЛЕ ЗНАКОВ.

почти универсальна для класса $L^p(T^2)$, $p \in (0, 1)$ как прямоугольникам так и по сферам относительно системе Уолша (измененной функции) относительно по систему Уолша **в смысле знаков**

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д.Е. Меньшов, “О частичных суммах тригонометрических рядов”, Мат. Сборник, 20:2 , 197-238.(1947)
- [2] А.А. Талалян, “О сходимости почти всюду подпоследовательностей частных сумм общих ортогональных рядов”, Изв. АН Арм. ССР 10:3,17-34 (1957)
- [3] G. D Birkhoff, C. R. Acad. Sci. Paris 189:1, 473-475 (1929).
- [4]. Marcinkiewicz J. , Sur les nombres derives, Fund. Math. 24, 305-308 (1935)
- [5]14. MacLane G.R., Sequences of derivatives and normal families, J. Anal. Math. 2 ,72–87 (1952)
- [6] В.Г. Кротов, “О гладкости универсальных функций Марцинкевича и универсальных тригонометрических рядах”, Изв. вузов. Матем., 35:8 (1991), 26-31.
- [7] K.G.Grosse-Erdmann, “Holomorphe Monster und Universelle Funktionen, Mitt. Math., Semin. G. 176, 1–84 (1987)
- [8]. Luh W. , Universal approximation properties of overconvergent power series on open sets, Analysis 6 (1986), 191- 2
- [9] А.Н. Колмогоров, “Sur les fonctions harmoniques conjugees et les series de Fourier, FM, 7,(1925) 23-28.
- [10] М. Г. Григорян, “О существовании и структуре универсальных функций”, Док. РАН, Матем (Doklady Mathematics) , 496, 30-33 (2021)
- [11] М. G. Grigoryan, Sargsyan A. A., “On the universal function for the class $L^p[0, 1]$, $p \in (0, 1)$, Journal of Func. Anal. 270, 8, 3111–3133 (2016)
- [7] Г.Г. Геворкян, К.А. Навасардян, “О рядах Уолша с монотонными коэффициентами”, Изв. АН. Росс., 632:1 , 41-60 (1999)
- [12] М. G. Grigoryan, “On the universal and strong property related to Fourier-Walsh series”, Banach Journal of Math. Analysis, .v.11, 3. p.698 -712. (2017)
- [13] М. Г. Grigoryan , L. N. Galoyan, “On the universal functions”, Journal of Approximation Theory v.225. p.191 -208 (2018).
- [14] М. Г. Григорян, “Об универсальных рядах Фурье”, Матем. Заметки . т. 108, 2. с. 296–2996 (2020).

[15] М. Г. Григорян, Л. Н. Галоян, “Функции, универсальные относительно тригонометрической системы, Изв. РАН. Сер. матем., 85, 2, 73–94 (2021)

[16] М. Г. Григорян, “Функции, с универсальными рядами Фурье- Уолша”, Матем. Сб. т.211, .6. с.107 -131.(2020).

[17] Б.С.Кашин, “Об одной полной ортонормированной системе“ Матем. Сб.,99(141):3, 356-365 (1976).

[18]. С. В. Конягин, О сходимости по Прингсхейму частных сумм многомерных рядов Фурье, Пленарная лекция,21-ая международная Саратовская зимняя школа «Совр. проблемы т. функций и их прилож.» (Саратов,31.01-04,02,2022г.)

[19]. С. В. Конягин, “О расходимости по мере кратных рядов Фурье”, Матем. заметки, 44:2 (1988), 196–201.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта с 21AG-1A066

Теорема 2. Существуют подпоследовательность натуральных чисел $\{N_m\}_{m=1}^{\infty}$ и функция $U \in L^1[0, 1)$ со сходящимся почти всюду на $[0, 1)$ и по $L^1[0, 1)$ норме рядом Фурье-Уолша с монотонно убывающими коэффициентами, такие, что

а) для каждой функции $f \in M[0, 1)$ можно найти числа (знаки) $\delta_k = \pm 1, k = 1, 2, \dots$, такие, что $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N_m} \delta_k c_k(U) W_k(x) = f(x)$ почти всюду на $[0, 1)$

б) функция U является универсальной для класса $M[0, 1)$ (в случае сходимости по мере)относительно системы Уолша в смысле знаков.

Замечание 2. Теорема 2 окончательна следующем смысле: в теореме 2 вместо подмножества $\{N_m\}_{m=1}^{\infty}$ нельзя взять m , поскольку известно (см. [25]), что ряды Уолша не сходятся к ∞ на множестве положительной меры. Значит, не возможно построить функцию $U \in L^1[0, 1]$ универсальную для класса $M[0, 1)$ относительно системы Уолша в смысле знаков в случае сходимости почти всюду (а для *для класса* $L^0[0, 1)$ - возможно см. [7]). Однако, можно построить функцию $U \in L^1[0, 1]$ универсальную для класса $M[0, 1)$ относительно системы Уолша в смысле знаков в случае сходимости по мере.

В докладе обсуждается вопрос существования таких функций (универсальных функций), ряды Фурье которых в том или ином смысле универсальны в классах $L^p[-\pi, \pi]$, $L^p[-\pi, \pi]^2$, $p \in (0, 1)$

(Е Г У, E-mail: gmarting@ysu.am) В частности

Аналогично можно дать приведенные выше обозначения и определения и в многомерном случаях. Пусть

$$T^d := [-\pi, \pi]^d; \quad d \in \mathbf{N}$$

системы Уолша в смысле знаков.

Замечание 4. Метод доказательства Теоремы 2 (см. также доказательство теоремы 4 работы [12]) позволяет получить новый подход для построения универсальных рядов относительно по систему Уолша **в смысле знаков**: любую измеримую, почти всюду конечную функцию путем изменения ее значений на некоторой множестве сколь угодно малой меры можно превратить в такую функцию, ряда Фурье которой по системе Уолша (измененной функции) будет универсальным рядом в $M[0, 1]$ **в смысле знаков**.

Тем не менее мы можем построить функцию $U \in L^1[0, 1]^2$ **условно универсальную** для класса $L^p[0, 1]^2$, $p \in (0, 1)$ относительно двойной тригонометрической системы (соотв.относительно двойной системы Уолша).

Точнее существуют функция $U \in L^1[0, 1]^2$ и числа (знаки) $\delta_{ks} = \pm 1$, $k = 1, 2, \dots$, такие, что прямоугольные или сферические частичные суммы двойного ряда $\sum_{k,s=-\infty}^{\infty} \delta_{k,s} c_{k,s}(U) e^{i2\pi kx} e^{i2\pi sy}$ были бы плотными в $L^p[0, 1]^2$, $p \in (0, 1)$), (здесь $c_{k,s}(U)$ — коэффициенты Фурье по двойной тригонометрической системе). Аналогичное утверждение верно и для двойной системы Уолша.

Теорема 4. Существуют функция $U \in L^1[-\pi, \pi]^2$ последовательность знаков $\{\varepsilon_k = \pm 1\}_{k=-\infty}^{\infty}$ такие, что ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \varepsilon_k c_k(U) e^{ikx}$ — универсален в $L^p[-\pi, \pi]^2$, $p \in (0, 1)$ в смысле перестановок.