

Нули дзета-функции Римана и возмущения дифференциальных операторов

В. В. Капустин

ПОМИ РАН, 15 сентября 2022г.

Дзета-функция Римана и операторы Гильберта-Пойа

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \operatorname{Re} s > 1; \quad \text{аналитическое продолжение в } \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

$$\zeta(s) = 0 \implies \operatorname{Re} s < 1; \quad \text{нетривиальные нули } \zeta \text{ лежат в полосе } 0 < \operatorname{Re} s < 1$$

Гипотеза Римана: все нетривиальные нули ζ имеют вещественную часть $\frac{1}{2}$

Дзета-функция Римана и операторы Гильберта-Пойа

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \operatorname{Re} s > 1; \quad \text{аналитическое продолжение в } \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

$$\zeta(s) = 0 \implies \operatorname{Re} s < 1; \quad \text{нетривиальные нули } \zeta \text{ лежат в полосе } 0 < \operatorname{Re} s < 1$$

Гипотеза Римана: все нетривиальные нули ζ имеют вещественную часть $\frac{1}{2}$

Оператор Гильберта–Пойа: [самосопряжённый] оператор, спектр которого имеет вид $\{t : |\operatorname{Im} t| < \frac{1}{2}, \zeta(\frac{1}{2} + it) = 0\}$

Цель: построение операторов с таким спектром, близких к самосопряжённым;
малые возмущения самосопряжённых дифференциальных операторов

Дзета-функция Римана и операторы Гильберта-Пойа

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \operatorname{Re} s > 1; \quad \text{аналитическое продолжение в } \mathbb{C} \setminus \{1\}$$

$$\zeta(s) = 0 \implies \operatorname{Re} s < 1; \quad \text{нетривиальные нули } \zeta \text{ лежат в полосе } 0 < \operatorname{Re} s < 1$$

Гипотеза Римана: все нетривиальные нули ζ имеют вещественную часть $\frac{1}{2}$

Оператор Гильберта–Пойа: [самосопряжённый] оператор, спектр которого имеет вид $\{t : |\operatorname{Im} t| < \frac{1}{2}, \zeta(\frac{1}{2} + it) = 0\}$

Цель: построение операторов с таким спектром, близких к самосопряжённым; малые возмущения самосопряжённых дифференциальных операторов

Одномерное возмущение самосопряжённого оператора с таким спектром было построено в статье

Б. С. Павлов, Л. Д. Фаддеев, *Теория рассеяния и автоморфные функции*, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1972, том 27, 161–193

Теорема

Рассмотрим оператор Шрёдингера с потенциалом Морса:

$$f \mapsto -f'' + \left(\frac{e^{2x}}{4} + \frac{e^x}{2} \right) f$$

на луче $(\log(4\pi), +\infty)$ с самосопряжённым граничным условием на левом конце.

Тогда существует одномерное возмущение обратного к нему оператора, спектр которого имеет вид

$$\left\{ \frac{4}{\lambda^2} : \zeta \left(\frac{1}{2} + i\lambda \right) = 0, \operatorname{Re} \lambda > 0, \frac{1}{2} + i\lambda \neq \alpha \right\}$$

$H^2 \subset L^2(\mathbb{R})$:

- H^2 есть ЗЛО функций $(z - \lambda)^{-1}$ при $\operatorname{Im} \lambda < 0$
- $H^2 = \mathcal{F} L^2(0, +\infty)$, где $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье ($\mathcal{F} L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R})$):

$$(\mathcal{F}f)(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itz} f(t) dt$$

Имеем $L^2 = H^2 \oplus \overline{H^2}$

$H^2 \subset L^2(\mathbb{R})$:

- H^2 есть ЗЛО функций $(z - \lambda)^{-1}$ при $\operatorname{Im} \lambda < 0$
- $H^2 = \mathcal{F} L^2(0, +\infty)$, где $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье ($\mathcal{F} L^2(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R})$):

$$(\mathcal{F}f)(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itz} f(t) dt$$

Имеем $L^2 = H^2 \oplus \overline{H^2}$

$H^2(\{\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\}) = \mathcal{M} L^2(0, 1)$, где $\mathcal{M}$ — преобразование Меллина:

$$(\mathcal{M}f)(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) t^{s-1} dt$$

Дзета-функция и пространство H^2

$$\operatorname{Re} s > 1 : \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

$$\operatorname{Re} s > 0 : \quad \frac{\zeta(s)}{s} = \frac{1}{s-1} - \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx$$

Дзета-функция и пространство H^2

$$\operatorname{Re} s > 1 : \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

$$\operatorname{Re} s > 0 : \quad \frac{\zeta(s)}{s} = \frac{1}{s-1} - \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx = \frac{1}{s-1} - \int_0^1 \left\{ \frac{1}{y} \right\} y^{s-1} dy$$

Интеграл задаёт преобразование Меллина ограниченной функции $\left\{ \frac{1}{y} \right\}$ на $(0, 1)$, что даёт функцию из $H^2(\{\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\})$

Предложение

Функция $\frac{s-1}{s^2} \zeta(s)$ принадлежит $H^2(\{\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\})$

Дзета-функция и пространство H^2

$$\operatorname{Re} s > 1 : \quad \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

$$\operatorname{Re} s > 0 : \quad \frac{\zeta(s)}{s} = \frac{1}{s-1} - \int_1^{+\infty} \frac{\{x\}}{x^{s+1}} dx = \frac{1}{s-1} - \int_0^1 \left\{ \frac{1}{y} \right\} y^{s-1} dy$$

Интеграл задаёт преобразование Меллина ограниченной функции $\left\{ \frac{1}{y} \right\}$ на $(0, 1)$, что даёт функцию из $H^2(\{\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\})$

Предложение

Функция $\frac{s-1}{s^2} \zeta(s)$ принадлежит $H^2(\{\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\})$

Равносильное утверждение: возьмём α_j , $j = 1, 2, 3$, $\operatorname{Re} \alpha_j = \frac{1}{2}$, $\zeta(\alpha_j) = 0$.

Предложение

Функция $\frac{s(s-1)}{p(s)} \zeta(s)$, $p(s) = (s - \alpha_1)(s - \alpha_2)(s - \alpha_3)$, принадлежит $H^2(\{\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\})$

Оператор Тёплица T_γ в H^2 с символом $\gamma \in L^\infty$: $f \mapsto P_{H^2} \gamma f$

Ядра операторов Тёплица

Оператор Тёплица T_γ в H^2 с символом $\gamma \in L^\infty$: $f \mapsto P_{H^2} \gamma f$

Любая функция $f \in H^2$ принадлежит ядру оператора Тёплица с символом $\bar{f}/f$

Оператор Тёплица T_γ в H^2 с символом $\gamma \in L^\infty$: $f \mapsto P_{H^2} \gamma f$

Любая функция $f \in H^2$ принадлежит ядру оператора Тёплица с символом $\bar{f}/f$

Для $f(s) = \frac{i \cdot s(s-1)}{(s-\alpha_1)(s-\alpha_2)(s-\alpha_3)} \zeta(s) \in H^2(\{\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\})$ получаем символ $\frac{\overline{f(s)}}{f(s)} = \frac{\overline{\zeta(s)}}{\zeta(s)}$

Оператор Тёплица T_γ в H^2 с символом $\gamma \in L^\infty$: $f \mapsto P_{H^2} \gamma f$

Любая функция $f \in H^2$ принадлежит ядру оператора Тёплица с символом $\bar{f}/f$

Для $f(s) = \frac{i \cdot s(s-1)}{(s-\alpha_1)(s-\alpha_2)(s-\alpha_3)} \zeta(s) \in H^2(\{\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\})$ получаем символ $\frac{\overline{f(s)}}{f(s)} = \frac{\overline{\zeta(s)}}{\zeta(s)}$

Для $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ имеем $\bar{s} = 1 - s$, $\overline{\zeta(s)} = \zeta(\bar{s}) = \zeta(1 - s)$

Получаем оператор Тёплица с символом

$$\frac{\overline{\zeta(s)}}{\zeta(s)} = \frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)} = \pi^{\frac{1}{2}-s} \cdot \frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{1-s}{2})}$$

в силу функционального уравнения $\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{\pi s}{2}) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$,

которое переписывается как $\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)} = \pi^{\frac{1}{2}-s} \cdot \frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{1-s}{2})}$

Оператор Тёплица T_γ в H^2 с символом $\gamma \in L^\infty$: $f \mapsto P_{H^2} \gamma f$

Любая функция $f \in H^2$ принадлежит ядру оператора Тёплица с символом $\bar{f}/f$

Для $f(s) = \frac{i \cdot s(s-1)}{(s-\alpha_1)(s-\alpha_2)(s-\alpha_3)} \zeta(s) \in H^2(\{\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\})$ получаем символ $\frac{\overline{f(s)}}{f(s)} = \frac{\overline{\zeta(s)}}{\zeta(s)}$

Для $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ имеем $\bar{s} = 1 - s$, $\overline{\zeta(s)} = \zeta(\bar{s}) = \zeta(1 - s)$

Получаем оператор Тёплица с символом

$$\frac{\overline{\zeta(s)}}{\zeta(s)} = \frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)} = \pi^{\frac{1}{2}-s} \cdot \frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{1-s}{2})}$$

в силу функционального уравнения $\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin(\frac{\pi s}{2}) \Gamma(1-s) \zeta(1-s)$,

которое переписывается как $\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)} = \pi^{\frac{1}{2}-s} \cdot \frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{1-s}{2})}$

Пользуемся аппроксимацией $\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z}{z} \prod_{k=1}^n (1 + \frac{z}{k})^{-1}$

Пространство де Бранжа — гильбертово пр-во целых функций с L^2 -нормой на $\mathbb{R}$

- (db1) функционал $F \mapsto F(\lambda)$ непрерывен для всех комплексных λ ;
- (db2) пространство инвариантно относительно инволюции $F \mapsto F^\sharp(z) = \overline{F(\bar{z})}$;
- (db3) если $F(\lambda) = 0$, то $\frac{F(z)}{z-\lambda}$ лежит в пространстве

Пространство де Бранжа — гильбертово пр-во целых функций с L^2 -нормой на $\mathbb{R}$

- (db1) функционал $F \mapsto F(\lambda)$ непрерывен для всех комплексных λ ;
- (db2) пространство инвариантно относительно инволюции $F \mapsto F^\sharp(z) = \overline{F(\bar{z})}$;
- (db3) если $F(\lambda) = 0$, то $\frac{F(z)}{z-\lambda}$ лежит в пространстве;
- (db4)* инволюция $F \mapsto F(-z)$ действует в пространстве и является изометрией

Пространство распадается в ортогональную прямую сумму своих четного и нечетного подпространств

Пространство де Бранжа — гильбертово пр-во целых функций с L^2 -нормой на $\mathbb{R}$

- (db1) функционал $F \mapsto F(\lambda)$ непрерывен для всех комплексных λ ;
- (db2) пространство инвариантно относительно инволюции $F \mapsto F^\sharp(z) = \overline{F(\bar{z})}$;
- (db3) если $F(\lambda) = 0$, то $\frac{F(z)}{z-\lambda}$ лежит в пространстве;
- (db4)* инволюция $F \mapsto F(-z)$ действует в пространстве и является изометрией

Пространство распадается в ортогональную прямую сумму своих четного и нечетного подпространств

Пример: пространство многочленов степени $\leq n$

Целая функция $\mathcal{E}$ — из класса Эрмита–Билера, если $|\mathcal{E}(\bar{z})| < |\mathcal{E}(z)|$ при $\operatorname{Im} z > 0$

Тогда пространство де Бранжа $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ состоит из целых функций F , для которых $\frac{F}{\mathcal{E}}$ и $\frac{F^{\sharp}}{\mathcal{E}}$ принадлежат $H^2(\{\operatorname{Im} z > 0\})$

Дополнительное предположение: $\mathcal{E}^{\sharp}(z) = \mathcal{E}(-z)$

Нормы $\frac{F}{\mathcal{E}}$ и $\frac{F^{\sharp}}{\mathcal{E}}$ в H^2 совпадают и определяют норму F в $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$

Целая функция $\mathcal{E}$ — из класса Эрмита–Билера, если $|\mathcal{E}(\bar{z})| < |\mathcal{E}(z)|$ при $\operatorname{Im} z > 0$

Тогда пространство де Бранжа $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ состоит из целых функций F , для которых $\frac{F}{\mathcal{E}}$ и $\frac{F^{\sharp}}{\mathcal{E}}$ принадлежат $H^2(\{\operatorname{Im} z > 0\})$

Дополнительное предположение: $\mathcal{E}^{\sharp}(z) = \mathcal{E}(-z)$

Нормы $\frac{F}{\mathcal{E}}$ и $\frac{F^{\sharp}}{\mathcal{E}}$ в H^2 совпадают и определяют норму F в $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$

Пример: $\mathcal{E}$ — многочлен с нулями в нижней полуплоскости

Кси функция Римана: $\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$; имеем $\xi(1-s) = \xi(s)$

Теорема

Функция $\mathcal{E}(z) = K_s(2\pi)$, где K — модифицированная функция Бесселя и $s = s(z) = \frac{1-iz}{2}$, принадлежит классу Эрмита–Билера, и пространство де Бранжа $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ содержит функцию $\frac{\xi(\frac{1}{2}-iz)}{p(s)}$, где $p(s) = (s - \alpha_1)(s - \alpha_2)(s - \alpha_3)$

Кси функция Римана: $\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$; имеем $\xi(1-s) = \xi(s)$

Теорема

Функция $\mathcal{E}(z) = K_s(2\pi)$, где K — модифицированная функция Бесселя и $s = s(z) = \frac{1-iz}{2}$, принадлежит классу Эрмита–Билера,

и пространство де Бранжа $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ содержит функцию $\frac{\xi(\frac{1}{2}-iz)}{p(s)}$, где $p(s) = (s - \alpha_1)(s - \alpha_2)(s - \alpha_3)$

Так как $K_s^{\sharp}(2\pi) = K_{s-1}(2\pi)$, имеем $\mathcal{E}^{\sharp}(z) = \mathcal{E}(-z)$, то есть $F \mapsto F(-z)$ есть изометрическая инволюция на $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$. Следовательно,

$\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ есть ортогональная прямая сумма своих чётного и нечётного подпространств

Кси функция Римана: $\xi(s) = \frac{1}{2} s(s-1) \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$; имеем $\xi(1-s) = \xi(s)$

Теорема

Функция $\mathcal{E}(z) = K_s(2\pi)$, где K — модифицированная функция Бесселя и $s = s(z) = \frac{1-iz}{2}$, принадлежит классу Эрмита–Билера, и пространство де Бранжа $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ содержит функцию $\frac{\xi(\frac{1}{2}-iz)}{p(s)}$, где $p(s) = (s - \alpha_1)(s - \alpha_2)(s - \alpha_3)$

Так как $K_s^{\sharp}(2\pi) = K_{s-1}(2\pi)$, имеем $\mathcal{E}^{\sharp}(z) = \mathcal{E}(-z)$, то есть $F \mapsto F(-z)$ есть изометрическая инволюция на $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$. Следовательно, $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$ есть ортогональная прямая сумма своих чётного и нечётного подпространств

Лемма (Р. В. Романов)

Функция $\frac{2\pi^s}{\Gamma(s)} K_s(2\pi)$ ограничена и ограниченно обратима в области $\{\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\}$ и стремится к 1 при $s \rightarrow \infty$

Оператор в пространстве де Бранжа

Пусть φ — целая функция, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\lambda) = 0$ и $\frac{\varphi}{z-\lambda} \in \mathcal{H}_\varepsilon$

Оператор в пространстве де Бранжа

Пусть φ — целая функция, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\lambda) = 0$ и $\frac{\varphi}{z-\lambda} \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$

Определим (непрерывный) оператор в $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$:

$$F \mapsto \frac{F - F(0)\varphi}{z}$$

Оператор в пространстве де Бранжа

Пусть φ — целая функция, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\lambda) = 0$ и $\frac{\varphi}{z-\lambda} \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$

Определим (непрерывный) оператор в $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$:

$$F \mapsto \frac{F - F(0)\varphi}{z}$$

Имеем $\frac{\varphi}{z-\lambda} \rightarrow \frac{\frac{\varphi}{z-\lambda} + \frac{1}{\lambda}\varphi}{z} = \frac{1}{\lambda} \frac{\varphi}{z-\lambda}$, получаем спектр оператора: $\{\frac{1}{\lambda} : \varphi(\lambda) = 0\}$

Оператор в пространстве де Бранжа

Пусть φ — целая функция, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\lambda) = 0$ и $\frac{\varphi}{z-\lambda} \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$

Определим (непрерывный) оператор в $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$:

$$F \mapsto \frac{F - F(0)\varphi}{z}$$

Имеем $\frac{\varphi}{z-\lambda} \rightarrow \frac{\frac{\varphi}{z-\lambda} + \frac{1}{\lambda}\varphi}{z} = \frac{1}{\lambda} \frac{\varphi}{z-\lambda}$, получаем спектр оператора: $\{\frac{1}{\lambda} : \varphi(\lambda) = 0\}$

Возьмём α , $\operatorname{Re} \alpha = \frac{1}{2}$, $\zeta(\alpha) = 0$, и определим

$$\varphi(z) = \frac{|\operatorname{Im} \alpha|^2}{\xi\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\xi\left(\frac{1}{2} - iz\right)}{\left(\frac{1}{2} - iz - \alpha\right) \left(\frac{1}{2} - iz - \bar{\alpha}\right)}$$

Тогда $\varphi(0) = 1$; множество нулей φ есть множество всех нетривиальных нулей ζ кроме α и $\bar{\alpha}$, развёрнутое на вещественную прямую

Оператор в пространстве де Бранжа

Пусть φ — целая функция, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\lambda) = 0$ и $\frac{\varphi}{z-\lambda} \in \mathcal{H}_{\mathcal{E}}$

Определим (непрерывный) оператор в $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$:

$$F \mapsto \frac{F - F(0)\varphi}{z}$$

Имеем $\frac{\varphi}{z-\lambda} \rightarrow \frac{\frac{\varphi}{z-\lambda} + \frac{1}{\lambda}\varphi}{z} = \frac{1}{\lambda} \frac{\varphi}{z-\lambda}$, получаем спектр оператора: $\{\frac{1}{\lambda} : \varphi(\lambda) = 0\}$

Возьмём α , $\operatorname{Re} \alpha = \frac{1}{2}$, $\zeta(\alpha) = 0$, и определим

$$\varphi(z) = \frac{|\operatorname{Im} \alpha|^2}{\xi\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\xi\left(\frac{1}{2} - iz\right)}{\left(\frac{1}{2} - iz - \alpha\right) \left(\frac{1}{2} - iz - \bar{\alpha}\right)}$$

Тогда $\varphi(0) = 1$; множество нулей φ есть множество всех нетривиальных нулей ζ кроме α и $\bar{\alpha}$, развёрнутое на вещественную прямую

Отметим, что φ — чётная функция

Непрерывный оператор в $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$,

$$F \mapsto \frac{F - F(0)\varphi}{z};$$

φ — чётная функция, спектр имеет вид $\{\frac{1}{\lambda} : \varphi(\lambda) = 0\} = \{\frac{1}{\lambda} : \frac{1}{2} - i\lambda \in Z\}$,

где $Z = \{s : \operatorname{Re} s \in (0, 1), \zeta(s) = 0\} \setminus \{\alpha, \bar{\alpha}\}$

Непрерывный оператор в $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$,

$$F \mapsto \frac{F - F(0)\varphi}{z};$$

φ — чётная функция, спектр имеет вид $\{\frac{1}{\lambda} : \varphi(\lambda) = 0\} = \{\frac{1}{\lambda} : \frac{1}{2} - i\lambda \in Z\}$,

где $Z = \{s : \operatorname{Re} s \in (0, 1), \zeta(s) = 0\} \setminus \{\alpha, \bar{\alpha}\}$

Квадрат оператора имеет вид

$$F \mapsto \frac{F - (F(0) + zF'(0))\varphi}{z^2}$$

Если F чётная, то $F \rightarrow \frac{F - F(0)\varphi}{z^2}$, и если F нечётная, то $F \rightarrow \frac{F - F'(0)z\varphi}{z^2}$

Непрерывный оператор в $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$,

$$F \mapsto \frac{F - F(0)\varphi}{z};$$

φ — чётная функция, спектр имеет вид $\{\frac{1}{\lambda} : \varphi(\lambda) = 0\} = \{\frac{1}{\lambda} : \frac{1}{2} - i\lambda \in Z\}$,

где $Z = \{s : \operatorname{Re} s \in (0, 1), \zeta(s) = 0\} \setminus \{\alpha, \bar{\alpha}\}$

Квадрат оператора имеет вид

$$F \mapsto \frac{F - (F(0) + zF'(0))\varphi}{z^2}$$

Если F чётная, то $F \rightarrow \frac{F - F(0)\varphi}{z^2}$, и если F нечётная, то $F \rightarrow \frac{F - F'(0)z\psi}{z^2}$

Эти операторы являются одномерными возмущениями операторов $F \mapsto \frac{F - F(0)\varphi}{z^2}$ и $F \rightarrow \frac{F - F'(0)z\psi}{z^2}$, где ψ — чётная функция, на чётном и нечётном подпространствах соответственно

Непрерывный оператор в $\mathcal{H}_{\mathcal{E}}$,

$$F \mapsto \frac{F - F(0)\varphi}{z};$$

φ — чётная функция, спектр имеет вид $\{\frac{1}{\lambda} : \varphi(\lambda) = 0\} = \{\frac{1}{\lambda} : \frac{1}{2} - i\lambda \in Z\}$,

где $Z = \{s : \operatorname{Re} s \in (0, 1), \zeta(s) = 0\} \setminus \{\alpha, \bar{\alpha}\}$

Квадрат оператора имеет вид

$$F \mapsto \frac{F - (F(0) + zF'(0))\varphi}{z^2}$$

Если F чётная, то $F \rightarrow \frac{F - F(0)\varphi}{z^2}$, и если F нечётная, то $F \rightarrow \frac{F - F'(0)z\psi}{z^2}$

Эти операторы являются одномерными возмущениями операторов $F \mapsto \frac{F - F(0)\varphi}{z^2}$ и $F \rightarrow \frac{F - F'(0)z\psi}{z^2}$, где ψ — чётная функция, на чётном и нечётном подпространствах соответственно, и среди таких операторов есть самосопряжённые

Изометрия $V : L^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^2\left(\left\{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\right\}, e^{\pi \operatorname{Im} s} + e^{-\pi \operatorname{Im} s}\right)$

$$(Vu)(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left(K_s(t) + K_{s-1}(t)\right) u(t) dt$$

$$s = \frac{1-iz}{2}: \quad V \{u : u \equiv 0 \text{ на } (0, a)\} = \mathcal{H}_{\mathcal{E}_a}, \quad \mathcal{E}_a(z) = \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \cdot K_s(a) \quad (a = 2\pi)$$

Изометрия $V : L^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^2\left(\left\{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\right\}, e^{\pi \operatorname{Im} s} + e^{-\pi \operatorname{Im} s}\right)$

$$(Vu)(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left(K_s(t) + K_{s-1}(t)\right) u(t) dt$$

$$s = \frac{1-iz}{2}: \quad V \{u : u \equiv 0 \text{ на } (0, a)\} = \mathcal{H}_{\mathcal{E}_a}, \quad \mathcal{E}_a(z) = \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \cdot K_s(a) \quad (a = 2\pi)$$

Оператору Штурма–Лиувилля $u \mapsto -\frac{d}{dt}(4t^2 \dot{u}) + (4t^2 - 4t - 1)u$ в $L^2(\mathbb{R}_+)$ соответствует умножение на z^2

Граничное условие $u(2\pi) = 0$ определяет самосопряжённый оператор в $L^2(2\pi, \infty)$

Его обратному соответствует оператор $F \mapsto \frac{F - F(0)\psi}{z^2}$ в пространстве де Бранжа при $\psi = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}^\#}{2}$

Изометрия $V : L^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^2\left(\left\{\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}\right\}, e^{\pi \operatorname{Im} s} + e^{-\pi \operatorname{Im} s}\right)$

$$(Vu)(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \left(K_s(t) + K_{s-1}(t)\right) u(t) dt$$

$$s = \frac{1-iz}{2}: \quad V \{u : u \equiv 0 \text{ на } (0, a)\} = \mathcal{H}_{\mathcal{E}_a}, \quad \mathcal{E}_a(z) = \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \cdot K_s(a) \quad (a = 2\pi)$$

Оператору Штурма–Лиувилля $u \mapsto -\frac{d}{dt}(4t^2 \dot{u}) + (4t^2 - 4t - 1)u$ в $L^2(\mathbb{R}_+)$ соответствует умножение на z^2

Граничное условие $u(2\pi) = 0$ определяет самосопряжённый оператор в $L^2(2\pi, \infty)$

Его обратному соответствует оператор $F \mapsto \frac{F - F(0)\psi}{z^2}$ в пространстве де Бранжа при $\psi = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}^\#}{2}$

$$\text{Замена } t = \frac{e^x}{2}: \quad u \in L^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow \frac{e^{x/2}}{\sqrt{2}} \cdot u\left(\frac{e^x}{2}\right) \in L^2(\mathbb{R}) \quad x \in (\log(4\pi), \infty)$$

$$\text{Оператор Шрёдингера с потенциалом Морса} \quad f \mapsto -f'' + \left(\frac{e^{2x}}{4} + \frac{e^x}{2}\right) f$$

При самосопряжённом граничном условии в $\log(4\pi)$ одномерное возмущение обратного оператора имеет спектр $\left\{\frac{4}{\lambda^2} : \zeta\left(\frac{1}{2} + i\lambda\right) = 0, \operatorname{Re} \lambda > 0, \frac{1}{2} + i\lambda \neq \alpha\right\}$