

Основы теории открытых квантовых систем. Лекция 1

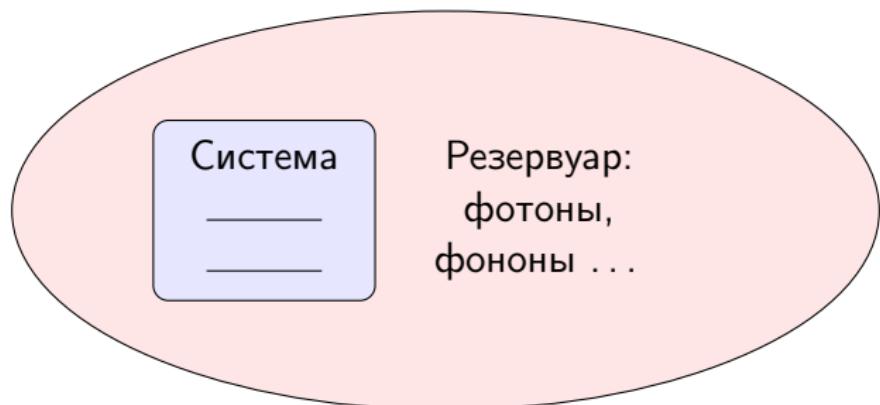
Теретёнков Александр Евгеньевич

13 сентября 2022 г.

Порядок отчётности

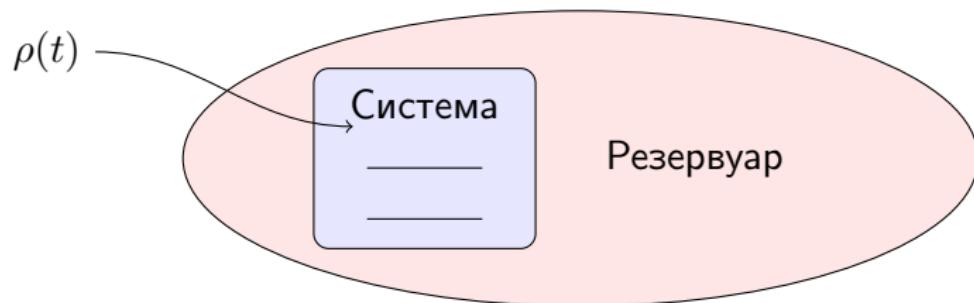
- 1 В процессе курса даются задачи.
- 2 Их решения нужно посыпать на почту taeedu@mail.ru в течение двух недель после того, как они были даны.

О чём курс? Уровни описания открытых систем



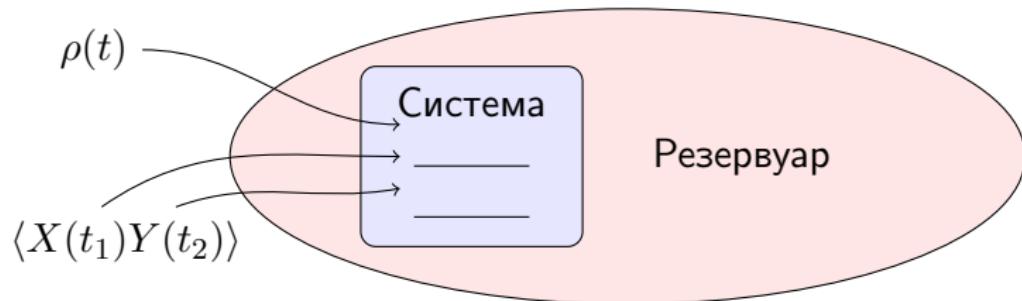
От резервуара мы хотим избавиться.

О чём курс? Уровни описания открытых систем



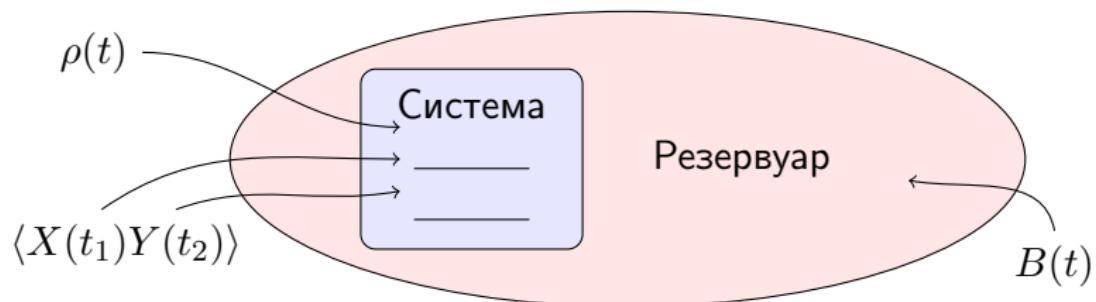
- 1 Уровень одновременной динамики.

О чём курс? Уровни описания открытых систем



- 1 Уровень одновременной динамики.
- 2 Уровень многовременных корреляций.

О чём курс? Уровни описания открытых систем



- 1 Уровень одновременной динамики.
- 2 Уровень многовременных корреляций.
- 3 Уровень динамики системы и резервуара.

О чём курс? Марковское приближение

❶ Уравнение Горини – Коссаковского – Сударшана – Линдблада

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H, \rho(t)] + \mathcal{D}(\rho(t)),$$

$$\mathcal{D}(\rho) \equiv \sum_j \left(C_j \rho C_j^\dagger - \frac{1}{2} \{ C_j^\dagger C_j, \rho \} \right),$$

где H — самосопряжённый оператор (гамильтониан),
 $\mathcal{D}(\rho)$ — диссипатор,

C_j — произвольные операторы,

$[X, Y] \equiv XY - YX$,

$\{X, Y\} \equiv XY + YX$.

Предполагается выбор единиц измерения так, что
постоянная Планка $\hbar = 1$.

О чём курс? Марковское приближение

- ① Уравнение Горини – Коссаковского – Сударшана – Линдблада
- ② Обобщённая регрессионная формула.

$$t_N \geq \dots \geq t_1 \geq 0$$

$$\begin{aligned} & \langle Y^{(0)}(0) \cdot \dots \cdot Y^{(N)}(t_N) X^{(N)}(t_N) \cdot \dots \cdot X^{(0)}(0) \rangle = \\ & = \text{Tr}_S X^{(N)} \Phi_{t_N - t_{N-1}} (\dots X^{(1)} \Phi_{t_1} (X^{(0)} \rho Y^{(0)}) Y^{(1)} \dots) Y^{(N)}, \end{aligned}$$

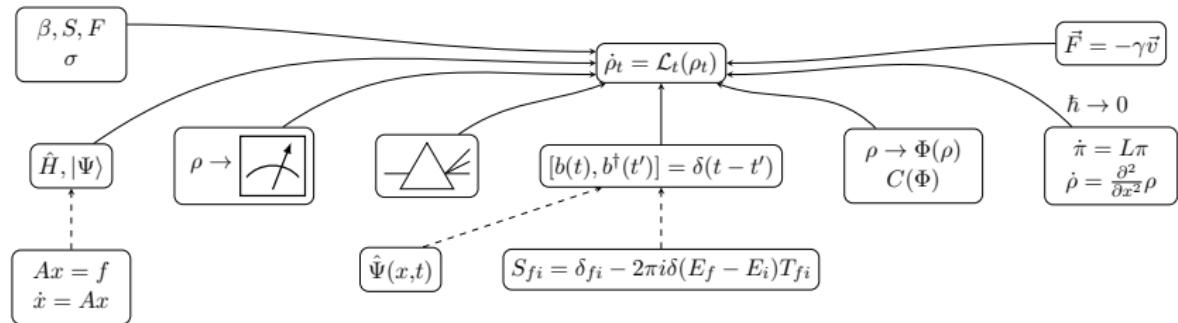
где $\rho_t = \Phi_t \rho_0$.

О чём курс? Марковское приближение

- ① Уравнение Горини – Коссаковского – Сударшана – Линдблада
- ② Обобщённая регрессионная формула.
- ③ Квантовые стохастические дифференциальные уравнения.

$$dU(t) = \left[-i \left(H - \frac{i}{2} \sum_j L_j^\dagger L_j \right) dt + \right. \\ \left. + \sum_j \left(L_j^\dagger W_j dB_j(t) - L_j dB_j^\dagger(t) + (I - W_j) d\Lambda_j(t) \right) \right] U(t)$$

Связь с другими разделами физики и математики



Напоминание квантовой механики и линейной алгебры

Начнём с напоминания...

Как задаются чистые состояния?

Чистые состояния

\mathcal{H} — гильбертово пространства на полем \mathbb{C} .

$$|\Psi\rangle \in \mathcal{H} : ||\Psi|| = 1,$$

где $||\Psi|| \equiv \sqrt{\langle \Psi | \Psi \rangle}$.

Предполагается, что $|\Psi\rangle$ и $e^{i\alpha}|\Psi\rangle$ соответствует одно и то же состояние, поэтому чистые состояния — элементы *проективного гильбертова пространства*.

Чистые состояния

Для простоты сконцентрируемся на случае $\dim \mathcal{H} = n < \infty$. В этом случае с точностью до изоморфизма

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_n \end{pmatrix}, \quad \langle \Psi | = (\overline{\Psi}_1 \dots \overline{\Psi}_n)$$

$$||\Psi||^2 = \langle \Psi | \Psi \rangle = |\Psi_1|^2 + \dots + |\Psi_n|^2$$

Как задаются *смешанные состояния*?

Смешанные состояния

$$\rho \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

1 $\rho^\dagger = \rho$

2 $\rho \geq 0$

3 $\text{Tr } \rho = 1$

Что значит $\rho \geq 0$?

$$\langle v | \rho | v \rangle \geq 0, \quad \forall |v\rangle \in \mathcal{H}$$

Эквивалентно все собственные числа неотрицательны.

Какие матрицы плотности соответствуют чистым состояниям?

Смешанные состояния

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$$

В базисе

$$\rho = \begin{pmatrix} |\Psi_1|^2 & \overline{\Psi}_1\Psi_2 & \dots & \overline{\Psi}_1\Psi_n \\ \overline{\Psi}_2\Psi_1 & |\Psi_2|^2 & \dots & \overline{\Psi}_2\Psi_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \overline{\Psi}_n\Psi_1 & \overline{\Psi}_n\Psi_2 & \dots & |\Psi_n|^2 \end{pmatrix}$$

Смешанные состояния

В общем случае эрмитову матрицу можно диагонализовать

$$\rho = \sum_i p_i |e_i\rangle\langle e_i|,$$

где $|e_i\rangle$ — собственные вектора, p_i — собственные значения матрицы ρ .

Более того, 2 ведёт к

$$p_i \geq 0,$$

а из 3:

$$\sum_i p_i = 1.$$

Смешанные состояния

В общем случае

$$\sum_i p_i A_i, \quad p_i \geq 0, \sum_i p_i = 1$$

называется *выпуклой комбинацией*.

На выпуклую комбинацию можно смотреть как на математическое ожидание

$$\sum_i p_i A_i = \mathbb{E}_p A$$

В частности, это позволяет интерпретировать смешанное состояние ρ как случайное чистое состояние.

Смешанные состояния

Если фиксировать базис и рассматривать только диагональные матрицы в этом базисе

$$\begin{pmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

то такие матрицы соответствуют классическим распределениям p_i . Так классическая теория вероятности вкладывается в квантовую.

В общем случае произвольного базиса ρ_{ii} — населённости (уровня, узла) = population, ρ_{ij} — когерентности между (уровнями, узлами) i и j .

Как определить функцию от
диагонализуемой матрицы?

Функции от матриц

$$f(\rho) = \sum_i f(p_i) |e_i\rangle\langle e_i|,$$

Кроме того, отметим, что

$$\text{Tr } f(\rho) = \sum_i f(p_i)$$

Функции от матриц

В случае, если ряд Тейлора функции f существует и сходится в круге с центром в точке 0, то можно дать другое определение (не требующее диагонализуемости)

$$f(\rho) = \sum_j \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \rho^j,$$

где $\rho^j = \rho \cdot \dots \cdot \rho$ понимается в смысле умножения матриц. Эти определения совпадают. В частности если $\rho = \sum_i p_i |e_i\rangle\langle e_i|$, то

$$\rho^j = \sum_i p_i^j |e_i\rangle\langle e_i|.$$

Функции от матриц

$\text{Tr } \rho^2$ называется *чистотой (purity)*.

Упражнение $\text{Tr } \rho^2 \leq 1$ и $\text{Tr } \rho^2 = 1 \Leftrightarrow \rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$.

Ещё одна важная величина — энтропия фон Неймана

$$S = -\text{Tr } \rho \ln \rho = -\sum_i p_i \ln p_i$$

Справа стоит классическое (не квантовое) определение. Важна в физике.

Функции от матриц

Вообще можно ввести энтропии Ренъи

$$S_\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \ln \text{Tr} \rho^\alpha = \frac{1}{1-\alpha} \ln \sum_i p_i^\alpha$$

Упражнение

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} S_\alpha = S$$

— энтропия Шенона.

$$\lim_{\alpha \rightarrow +0} S_\alpha = \ln \#\{i : p_i \neq 0\} = \ln \dim \text{supp } \rho$$

— энтропия Хартли.

Хаотическое состояние (Характерно для конечномерных г.п.)

$$\rho = \frac{I}{n}$$

Далее мы будем задавать динамику системы с помощью гамильтониана $H = H^\dagger$. Если $H \geq 0$ и состояние $|0\rangle$ такое, что $H|0\rangle = 0$ единственno, то его можно называть вакуумным или основным (ground state) состоянием.

**Какое смешанное состояние играет
центральную роль в статистической
физике?**

Некоторые специальные состояния

Гиббсовское состояние

$$\rho_\beta = \frac{e^{-\beta H}}{\text{Tr } e^{-\beta H}}$$

где β — обратная температура. $Z = \text{Tr } e^{-\beta H}$ — статистическая сумма.

Если $H = \sum_{i=0}^{N-1} \varepsilon_i |i\rangle\langle i|$, то $\rho = \frac{1}{Z} \sum_i e^{-\beta \varepsilon_i} |i\rangle\langle i|$, $Z = \sum_i e^{-\beta \varepsilon_i}$.

Упражнение

$$\lim_{\beta \rightarrow +0} \rho_\beta \rightarrow ? \quad \lim_{\beta \rightarrow +\infty} \rho_\beta \rightarrow ?$$