

Гибридный метод для решения конических программ с линейными ограничениями типа неравенства

Роланд Хильдебранд

Laboratoire Jean Kuntzmann / CNRS;
Факультет управления и прикладной математики МФТИ
Общероссийский семинар по оптимизации, МФТИ

18 ноября 2022 г.

- методы решения ЛП
- конические программы и барьеры
- метод внутренней точки
- решение вспомогательной задачи
- гибридный метод

- **методы решения ЛП**
- конические программы и барьеры
- метод внутренней точки
- решение вспомогательной задачи
- гибридный метод

ЛП стандартного вида

$$\min_{x \geq 0} \langle c, x \rangle : \quad Ax = b$$

$x \in V \simeq \mathbb{R}^n$, $b \in U \simeq \mathbb{R}^m$, $A: V \rightarrow U$ линейный оператор,
 $c \in V^*$

строки A и c линейно независимы, $0 < m < n$

двойственная ЛП

$$\max_{y \in U^*, s \geq 0} \langle b, y \rangle : \quad s + A^T y = c$$

$s \in V^*$, $A^T: U^* \rightarrow V^*$ — сопряжённый оператор

определим

$$\mathcal{A}_P = \{x \mid Ax = b\} \subset V$$

$$\mathcal{A}_D = \{s \mid \exists y \in U^* : s + A^T y = c\} \subset V^*$$

- $\dim \mathcal{A}_P = n - m, \dim \mathcal{A}_D = m$
- $\mathcal{A}_P, \mathcal{A}_D$ ортогональны друг другу
- x допустимо $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R}_+^n \cap \mathcal{A}_P$
- s допустимо $\Leftrightarrow s \in \mathbb{R}_+^n \cap \mathcal{A}_D$
- s, y определяют друг друга при условии $s \in \mathcal{A}_D$

пара (x, s) является оптимальным решением, если выполняются условия

$$x \geq 0, \quad s \geq 0, \quad x \in \mathcal{A}_P, \quad s \in \mathcal{A}_D, \quad \langle x, s \rangle = 0$$

условие дополняющей нежёсткости $\langle x, s \rangle = 0$ можно также записать в виде

$$x_i s_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

так как в оптимальной точке все произведения $x_i s_i$ неотрицательны

скалярное условие $x_i s_i = 0$ можно свести к

$$x_i = 0 \quad \text{или} \quad s_i = 0$$

получаем 5 условий оптимальности

$$x \geq 0, \quad s \geq 0, \quad x \in \mathcal{A}_P, \quad s \in \mathcal{A}_D, \quad x_i s_i = 0 \quad \forall i$$

разные методы генерируют итерации, которые *всегда* удовлетворяют части условий, и по ходу алгоритма приближаются к удовлетворению остальных

- методы активных ограничений: всегда удовлетворяют $x \in \mathcal{A}_P, s \in \mathcal{A}_D, x_i s_i = 0 \quad \forall i$
- (прямо-двойственные) методы внутренней точки: всегда удовлетворяют $x > 0, s > 0$

условия оптимальности, поддерживаемые разными методами

	прямой симплекс	двойст- венный симплекс	(допустимая) внутренняя точка	недопустимая внутренняя точка
$x \geq 0$	✓	—	✓	✓
$s \geq 0$	—	✓	✓	✓
$x \in \mathcal{A}_P$	✓	✓	✓	—
$s \in \mathcal{A}_D$	✓	✓	✓	—
$x_i s_i = 0$	✓	✓	—	—

Комбинаторный характер метода активных огр.

- чтобы определить x , в дополнение к $x \in \mathcal{A}_P$ нужно $n - m$ независимых условий
- чтобы определить s , в дополнение к $s \in \mathcal{A}_D$ нужно m независимых условий
- условие $x_i s_i = 0$ даёт одно линейное условие для каждого $i = 1, \dots, n$

чтобы определить решение, нужно положить $x_i = 0$ для $n - m$ индексов i и $s_i = 0$ для оставшихся m индексов i

первые — небазовые, вторые — базовые

понять, какой набор соответствует оптимуму, является комбинаторной задачей

оптимум можно восстановить точно, решив линейную систему

симплекс-метод

- ⊕ конечное кол-во шагов
- ⊕ можно получить точное решение
- ⊖ накапливает ошибки
- ⊖ в теории не полиномиальной сложности

метод внутренней точки

- ⊕ не накапливает ошибки
- ⊕ имеет полиномиальную сложность
- ⊖ получает решение только в пределе

- методы решения ЛП
- **конические программы и барьеры**
- метод внутренней точки
- решение вспомогательной задачи
- гибридный метод

Определение

Конус $K \subset V \simeq \mathbb{R}^n$ называется **регулярным** если он выпуклый, замкнутый, имеет непустую внутренность и не содержит прямых.

Определение

Двойственный к $K \subset V$ конус, обозначаемый K^* , определён посредством $K^* = \{s \in V^* \mid \langle x, s \rangle \geq 0 \quad \forall x \in K\}$.

если K — регулярный конус, то K^* — тоже регулярный, и $(K^*)^* = K$

если $K_1 \subset K_2$, то $K_2^* \subset K_1^*$

Ортогональность в произведениях

пусть $K = \prod_{j=1}^l K_j \subset V = \prod_{j=1}^l V_j$ — прямое произведение регулярных конусов

тогда $V^* = \prod_{j=1}^l V_j^*$, и для $x = (x_1, \dots, x_l) \in V$, $s = (s_1, \dots, s_l) \in V^*$ имеем

$$\langle x, s \rangle = \sum_{j=1}^n \langle x_j, s_j \rangle$$

отсюда получаем $K^* = \prod_{j=1}^n K_j^*$

условие ортогональности $\langle x, s \rangle = 0$ для пары $(x, s) \in K \times K^*$ влечёт за собой

$$\langle x_j, s_j \rangle = 0 \quad \forall j = 1, \dots, l$$

Конические программы

коническая программа над K имеет вид

$$\min_{x \in K} \langle c, x \rangle : \quad Ax = b$$

$x \in V \simeq \mathbb{R}^n$, $b \in U \simeq \mathbb{R}^m$, $A: V \rightarrow U$ линейный оператор,
 $c \in V^*$

строки A и c линейно независимы, $0 < m < n$

двойственная программа определена над K^* :

$$\max_{y \in U^*, s \in K^*} \langle b, y \rangle : \quad s + A^T y = c$$

$s \in V^*$, $A^T: U^* \rightarrow V^*$ — сопряжённый оператор

в случае $K = \mathbb{R}_+^n$ получаем ЛП

определим аффинные подпространства $\mathcal{A}_P$, $\mathcal{A}_D$ как прежде
пара (x, s) является оптимальным решением, если

$$x \in K, \quad s \in K^*, \quad x \in \mathcal{A}_P, \quad s \in \mathcal{A}_D, \quad \langle x, s \rangle = 0$$

условие ортогональности $\langle x, s \rangle = 0$ для прямых произведений
 $K = \prod_{j=1}^l K_j$ можно записать в виде

$$\langle x_j, s_j \rangle = 0 \quad \forall j = 1, \dots, l$$

условия $\langle x_j, s_j \rangle = 0$ дальше не упрощаются,
кроме в случае $K_j = \mathbb{R}_+$ (линейные неравенства)

$\Rightarrow$ методы активных ограничений неприменимы для
конической задачи общего вида

Логарифмично однородные барьеры

Определение (Ю.Е. Нестеров, А.С. Немировский 1994)

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ — регулярный выпуклый конус. Логарифмично однородным самосогласованным барьером на K называется функция $F : K^\circ \rightarrow \mathbb{R}$ класса C^3 , удовлетворяющая условиям

- $F(\alpha x) = -\nu \log \alpha + F(x)$ (логарифмичная однородность)
- $F''(x) \succ 0$ (локально строгая выпуклость)
- $\lim_{x \rightarrow \partial K} F(x) = +\infty$ (барьерное свойство)
- $|F'''(x)[h, h, h]| \leq 2(F''(x)[h, h])^{3/2}$ (самосогласованность)

для всех касательных векторов h в каждой точке $x \in K^\circ$.

Параметр однородности ν называется **параметром** барьера.

растяжения действуют прибавлением констант к F

Двойственный барьер

пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция
преобразованием Лежандра функции f называется функция

$$f^*(s) = \sup_{x \in D} \langle s, x \rangle - f(x)$$

Лемма (Ю.Е. Нестеров, А.С. Немировский 1994)

Преобразование Лежандра логарифмично однородного барьера с параметром ν на конусе K является логарифмично однородным барьером с тем же параметром ν на $-K^$.*

двойственный барьер определим как

$$F_*(s) = F^*(-s) = \sup_{x \in K} (-\langle s, x \rangle - F(x))$$

Лемма (Ю.Е. Нестеров, А.С. Немировский 1994)

Пусть $K \subset V$ — регулярный конус, $F : K^\circ \rightarrow \mathbb{R}$ — логарифмично однородный самосогласованный барьер на K . Пусть $w \in K^\circ$ — произвольная внутренняя точка. Тогда **эллипсоид Дикина**

$$E_w = \{x \in V \mid (x - w)^T F''(w)(x - w) \leq 1\}$$

является подмножеством K .

тогда и множество

$$K_w = \{tx \in V \mid x \in E_w, t \geq 0\}$$

которое будем называть **конусом Дикина**, подмножество K получаем также $K^* \subset K_w^*$

конус K_w является эллипсоидальным и задаётся некой квадратичной формой Q с сигнатурой $(+ - \dots -)$

на границе K_w полином

$$p(t) = (tx - w)^T H_w (tx - w) - 1 = t^2 x^T H_w x - 2tx^T H_w w + n - 1$$

имеет двойной корень

здесь $H_w = F''(w)$, а $w^T H_w w = n$ следует из логарифмичной однородности

отсюда получаем

$$x^T \left(H_w w w^T H_w - (n - 1) H_w \right) x = 0$$

на границе, и $Q = H_w w w^T H_w - (n - 1) H_w$

двойственный конус K_w^* также эллипсоидальный и задаётся формой $(n - 1)Q^{-1} = w w^T - H_w^{-1}$

Пример: ортант

на $K = \mathbb{R}_+^n$ имеем барьер $F(x) = -\sum_{i=1}^n \log x_i$ с гессианом $F''(x) = \text{diag}(x^{-2})$

пусть $w > 0$, в этом случае конус Дикина имеет вид

$$K_w = \left\{ x \mid x^T \left(w^{-1} w^{-T} - (n-1) \text{diag}(w^{-2}) \right) x \geq 0, \langle x, w^{-1} \rangle \geq 0 \right\}$$

квадрика, которая задаётся формой

$Q = w^{-1} w^{-T} - (n-1) \text{diag}(w^{-2})$, ограничивает два эллипсоидальных конуса, из которых неравенство $\langle x, w^{-1} \rangle \geq 0$ выделяет один (тот, в котором находится w)

двойственный конус имеет вид

$$K_w^* = \left\{ s \mid s^T \left(w w^T - \text{diag}(w^2) \right) s \geq 0, \langle s, w \rangle \geq 0 \right\}$$

- методы решения ЛП
- конические программы и барьеры
- **метод внутренней точки**
- решение вспомогательной задачи
- гибридный метод

Метод внутренней точки

напомним формулировку конической программы

$$\min_{x \in K} \langle c, x \rangle : \quad Ax = b$$

проблемное условие $x \in K$ устраняется добавлением самосогласованного барьера к функционалу цены

$$\min_x \langle c, x \rangle + \mu \cdot F(x) : \quad Ax = b$$

метод приблизительно решает **безусловную** задачу и одновременно стремится $\mu \rightarrow 0$

следующая итерация вычисляется на основе производных F' , F'' в 1 — 3 точках (метод 2-го порядка)

Центральный путь

барьер более гладкий дальше от границ конуса
для хорошего поведения шага Ньютона нужно держаться
ближе к центру, там где значение барьера меньше

(прямой) центральный путь состоит из решений $x \in \mathcal{A}_\mu$
вспомогательных проблем минимизации

$$\langle c, x \rangle + \mu \cdot F(x) \rightarrow \min$$

для данного μ точка характеризуется условием

$$s = -\mu \cdot F'(x) \in \mathcal{A}_D$$

точки s образуют двойственный центральный путь

на центральном пути имеем $\langle x, s \rangle = \mu \cdot \nu$

при $\mu \rightarrow 0$ получаем в пределе условие ортогональности

Точка шкалировки

пусть (x, s) — приближения точек центрального пути
мы хотим вычислить коррекции (δ_x, δ_s) такие, что

$$s + \delta_s = -\mu \cdot F'(x + \delta_x)$$

линеаризацией получаем

$$s + \delta_s = -\mu \cdot (F'(x) + H\delta_x),$$

где H — аппроксимация Гессiana $F''(x)$
теория предписывает положить

$$\mu \cdot H = H_w := F''(w)$$

где $w \in K^o$ — **точка шкалировки** пары (x, s)
на центральном пути имеем $w = x/\sqrt{\mu}$

Система для вычисления направления поиска

вместе с уравнениями

$$A(x + \delta_x) = b, \quad s + \delta_s + A^T(y + \delta_y) = c$$

получаем линейную систему

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & I & A^T \\ H_w & I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_x \\ \delta_s \\ \delta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - Ax \\ c - s - A^T y \\ -s - \mu F'(x) \end{pmatrix}$$

убирая δ_x, δ_s из системы, получаем

$$AH_w^{-1}A^T\delta_y = AH_w^{-1}(\mu F'(x) + c - A^T y) + b - Ax$$

матрица системы $M := AH_w^{-1}A^T$ положительно определена
система решается факторизацией M по Холецкому

- методы решения ЛП
- конические программы и барьеры
- метод внутренней точки
- **решение вспомогательной задачи**
- гибридный метод

Вспомогательная задача

пусть Q — форма сигнатуры $(+ - \dots -)$ на V , а w — такое, что $w^T Q w > 0$

определим эллипсоидальный конус

$$K = \{x \in V \mid x^T Q x \geq 0, x^T Q w \geq 0\}$$

мы хотим решить коническую программу

$$\min_{x \in K} \langle c, x \rangle : Ax = b$$

ограничение $x^T Q w \geq 0$ присутствует только для того, чтобы выделить один из двух конусов, задаваемых квадратикой Q (тот, в котором лежит w)

это ограничение не активно

ограничение $x^T Q x \geq 0$ активно, поскольку решение лежит на границе конуса

Матрица линейной системы

введём множители Лагранжа $y \in U^*$, $\lambda > 0$

функция Лагранжа имеет вид

$$\mathcal{L} = \langle c, x \rangle - y^T (Ax - b) - \lambda(x^T Qx)$$

условие первого порядка

$$c - A^T y - 2\lambda Qx = 0$$

положим $s = 2\lambda Qx$ (решение двойственной задачи)

тогда получим систему

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & I & A^T \\ -2\lambda Q & I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ s \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$$

для решения системы нужно обратить матрицу $AQ^{-1}A^T$

Решение задачи

получаем решение

$$y = (AQ^{-1}A^T)^{-1}(AQ^{-1}c - 2\lambda b), \quad s = c - A^T y, \quad x = \frac{1}{2\lambda} Q^{-1} s$$

неизвестная λ определяется из уравнения

$$4\lambda^2 x^T Q x = s^T Q^{-1} s = 0$$

имеем

$$s = (I - A^T(AQ^{-1}A^T)^{-1}AQ^{-1})c + 2\lambda A^T(AQ^{-1}A^T)^{-1}b,$$

откуда получаем

$$c^T(Q^{-1} - Q^{-1}A^T(AQ^{-1}A^T)^{-1}AQ^{-1})c + 4\lambda^2 b^T(AQ^{-1}A^T)^{-1}b = 0,$$

$$2\lambda = \sqrt{-\frac{c^T(Q^{-1} - Q^{-1}A^T(AQ^{-1}A^T)^{-1}AQ^{-1})c}{b^T(AQ^{-1}A^T)^{-1}b}}$$

если

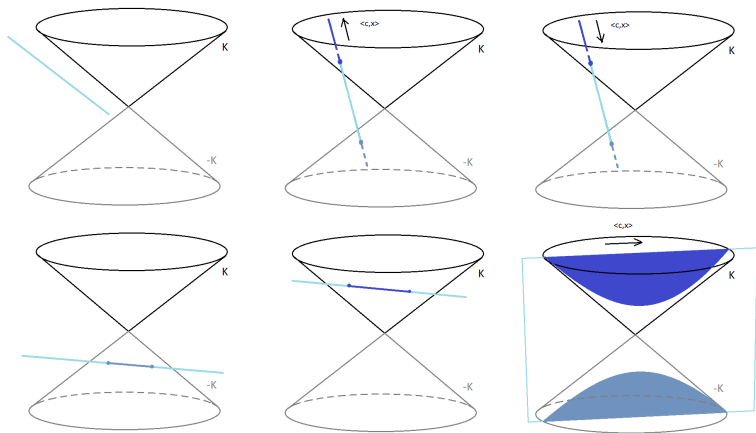
$$\frac{c^T(Q^{-1} - Q^{-1}A^T(AQ^{-1}A^T)^{-1}AQ^{-1})c}{b^T(AQ^{-1}A^T)^{-1}b} > 0$$

то решения не существует, задача недопустимая или неограниченная

но даже если

$$\frac{c^T(Q^{-1} - Q^{-1}A^T(AQ^{-1}A^T)^{-1}AQ^{-1})c}{b^T(AQ^{-1}A^T)^{-1}b} < 0$$

то получившееся решение может лежать в конусе $-K$ вместо K
в этом случае также задача недопустимая или неограниченная
какой случай (недопустимость, неограниченность) имеет место,
следует из сигнатур форм $Q^{-1} - Q^{-1}A^T(AQ^{-1}A^T)^{-1}AQ^{-1}$,
 $AQ^{-1}A^T$ и знаков их значений на c, b



задача слева недопустима, справа неограничена
в центре: решение существует

Условия на существование решения

- если $AQ^{-1}A^T \prec 0$,
 $c^T(Q^{-1} - Q^{-1}A^T(AQ^{-1}A^T)^{-1}AQ^{-1})c < 0$, то задача неограничена (справа снизу)
- если $Q^{-1} - Q^{-1}A^T(AQ^{-1}A^T)^{-1}AQ^{-1} \prec 0$,
 $b^T(AQ^{-1}A^T)^{-1}b < 0$, то задача недопустима (слева сверху)

в других случаях нужно проверять, в правильном ли конусе лежит решение

если нет, то в случае $AQ^{-1}A^T \prec 0$ задача недопустима (снизу слева), в случае $Q^{-1} - Q^{-1}A^T(AQ^{-1}A^T)^{-1}AQ^{-1} \prec 0$ неограничена (сверху справа)

здесь мы опустили граничные случаи

- вспомогательная задача решается аналитически
- получаем также решение z двойственной задачи
- самый трудоёмкий шаг — решение системы с матрицей $AQ^{-1}A^T$

- методы решения ЛП
- конические программы и барьеры
- метод внутренней точки
- решение вспомогательной задачи
- **гибридный метод**

Условие комплементарности

пусть $K = K' \times \mathbb{R}_+^l$, т.е. в конической программе присутствуют линейные неравенства

тогда для $x = (x', x_1, \dots, x_l)$, $s = (s', s_1, \dots, s_l)$ условие комплементарности можно записать как

$$\langle x', s' \rangle = 0, \quad x_i s_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, l$$

есть альтернатива $x_i = 0$ или $s_i = 0$ для всех $i = 1, \dots, l$

Какое из этих условий имеет место в оптимуме?

Идея метода

чтобы доказать $s_i = 0$, нужно свести условие $x_i = 0$ к противоречию

пусть $\bar{v}$ — верхняя оценка на оптимальное значение задачи
его можно получить

- как значение функционала $c^T x$ на допустимой точке
- как оптимальное значение вспомогательной задачи, в которой K заменён на внутреннюю аппроксимацию K_w

пусть $\underline{v}_i$ — оптимальное значение задачи

$$\min_{x \in K_{out}} \langle c, x \rangle : \quad Ax = b, \quad x_i = 0$$

где K_{out} — внешняя аппроксимация конуса K

тогда $\underline{v}_i$ — нижняя оценка на значение задачи

$$\min_{x \in K} \langle c, x \rangle : \quad Ax = b, \quad x_i = 0$$

если $\underline{v}_i > \bar{v}$, то условие $x_i = 0$ не может иметь место

чтобы доказать $x_i = 0$, нужно свести условие $s_i = 0$ к противоречию

пусть $\underline{v}$ — нижняя оценка на оптимальное значение задачи его можно получить

- как значение функционала $b^T y$ на допустимой точке
- как оптимальное значение вспомогательной задачи, в которой K^* заменён на внутреннюю аппроксимацию K_{w-1}

пусть $\overline{v}_i$ — оптимальное значение задачи

$$\max_{y, s \in K_{inn}^*} \langle b, y \rangle : \quad s + A^T y = c, \quad s_i = 0$$

где K_{inn} — внутренняя аппроксимация конуса K

тогда $\overline{v}_i$ — верхняя оценка на значение задачи

$$\min_{y, s \in K^*} \langle b, y \rangle : \quad s + A^T y = c, \quad s_i = 0$$

если $\overline{v}_i < \underline{v}$, то условие $s_i = 0$ не может иметь место

Выбор аппроксимаций

пусть w — точка шкалировки в текущей итерации

внутренняя аппроксимация $K_{inn} = K_w$

внешняя аппроксимация $K_{out} = K_{w^{-1}}^*$, где $w^{-1} := -F'(w)$

в этом случае матрица Q отличается на матрицу ранга 1 от H_w , с точностью до множителя

линейные ограничения во вспомогательной задаче либо совпадают с ограничениями в основной, либо отличаются на 1 уравнение

⇒ матрица системы во вспомогательной задаче отличается от $AH_w^{-1}A^T$ на матрицу ранга ≤ 2

можно использовать формулу Шермана-Моррисона для решения системы во вспомогательной задаче

⇒ решение вспомогательной задачи мало затратно по сравнению с основным шагом

Двойственное решение

прямая вспомогательная задача

$$\min_{x \in K_{out}} \langle c, x \rangle : \quad Ax = b, \quad x_i = 0$$

двойственная к ней

$$\max_{y, \lambda, \tilde{s} \in K_{out}^*} \langle b, y \rangle : \quad \tilde{s} - \lambda e_i + A^T y = c$$

имеем $K_{out}^* \subset K^*$

двойственное решение $s = \tilde{s} - \lambda e_i$ выполняет все условия, кроме $s_i \geq 0$

наоборот, $s_i < 0$, иначе невозможно неравенство $\underline{v}_i > \bar{v}$

Сокращение размерности

если установлено $s_i = 0$

- убираем строку и столбец i матрицы A , элиминировав переменную x_i
- другие элементы x не меняются
- текущее значение s заменяется на выпуклую комбинацию s с решением двойственной вспомогательной задачи, такую что $s_i = 0$

аналогично в случае $x_i = 0$

можно убирать несколько пар (x_i, s_i) одновременно
тогда выпуклая комбинация включает в себя все двойственные решения вспомогательных задач

обновление улучшает зазоры по ограничениям и по функционалу

- метод можно использовать для решения любой конической программы с линейными неравенствами
- можно положить в основу любой вариант метода внутренней точки (допустимый или недопустимый)
- решение вспомогательных задач занимает малую долю времени, если не проверять все пары переменных (x_i, s_i)
- со временем размерность уменьшается и метод ускоряется, точность аппроксимации эллипсоидальными конусами также улучшается
- ЛП общего положения решается за конечное число итераций — все уравнения $x_i s_i = 0$ разрешаются

Спасибо за внимание!