

Лекции о дискретных группах, порождённых комплексными отражениями

В. Л. Попов

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва

Школа-конференция

Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов
Самара 21 – 26 августа 2021 г.

Обозначения и постановка задачи

Аффинные пространства

$k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

V - векторное пространство над k .

$n = \dim(V)$.

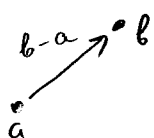
E - аффинное пространство с пространством касательных векторов V , т.е. множество, на котором

просто транзитивно (*)

действует векторная группа V :

$$V \times E \rightarrow E, \quad (v, a) \mapsto a + v. \quad (**)$$

Ввиду (*), для любых $a, b \in E$ существует единственный $v \in V$, для которого $a + v = b$.



Это v обозначается $b-a$ или $\overline{ab}$.

Пример.

$E = V$, где $+$ в (***) - это сложение векторов в V .

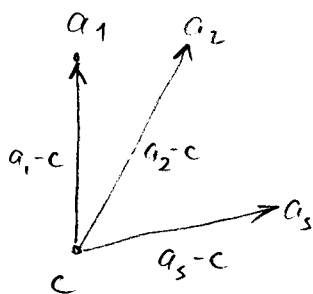
2)

Пусть $a_1, \dots, a_s \in E$ и $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in k$

Зафиксируем канонический вектор $c \in E$ и

рассмотрим точку

$$c + \lambda_1(a_1 - c) + \dots + \lambda_s(a_s - c) \quad (*)$$



Задача

Если $\lambda_1 + \dots + \lambda_s = 1$, то
точка $(*)$ от точки c не зависит.

Обсуждение:

Если $\lambda_1 + \dots + \lambda_s = 1$, то точка $(*)$ обобщается при

$$\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_s a_s \quad (**)$$

и называется барицентрическим линейным координатом
полюс $a_1, \dots, a_s$.

В случае $\lambda_1 = \dots = \lambda_s = \frac{1}{s}$ точка $(**)$
называется центром тяжести полюс $a_1, \dots, a_s$. и
записывается в виде

$$\frac{1}{s} (a_1 + \dots + a_s) \quad (***)$$

Отсюда точка в сумме $(***)$ не зависит.

Аффинные отображения

Пусть E_i , $i=1,2$, - аффинное пространство с пространством параллельных векторов V_i .

Отображение

$$\gamma: E_1 \rightarrow E_2$$

называется аффинным, если существует такое линейное отображение

$$P: V_1 \rightarrow V_2,$$

то

$$\gamma(a_1 + v_1) = \gamma(a_1) + P(v_1) \quad \forall a_1 \in E_1, v_1 \in V_1$$

То P называется линейной частью (или дифференциалом) отображения γ и обозначается
 $\text{Lin}(\gamma)$

Свойства:

① Если $E_1 \xrightarrow{\gamma_1} E_2$ и $E_2 \xrightarrow{\gamma_2} E_3$ аффинны,
то и $E_1 \xrightarrow{\gamma_2 \circ \gamma_1} E_3$ аффинно и $\text{Lin}(\gamma_2 \circ \gamma_1) = \text{Lin}(\gamma_2) \circ \text{Lin}(\gamma_1)$

② γ диффеоморфно $\Leftrightarrow \text{Lin}(\gamma)$ инвертируемо.

③ Если γ диффеоморфно, то γ^{-1} аффинно и $\text{Lin}(\gamma^{-1}) =$
 $= \text{Lin}(\gamma)^{-1}$.

В этом случае γ называется изоморфизмом E_1 и E_2 ,
а при $E_1 = E_2$, $V_1 = V_2 = V$ - автоморфизмом E .

4)

④ Если $E_1 \xrightarrow{\gamma} E_2$ аффинно, то баренцеттеревские линейные комбинации отображаются так:

$$\gamma\left(\sum_{i=1}^s \lambda_i a_i\right) = \sum_{i=1}^s \lambda_i \gamma(a_i)$$

В частности, центр техесн систем $a_1, \dots, a_s$ отобра-
жается в центр техесн систем $\gamma(a_1), \dots, \gamma(a_s)$.

* * *

Аффинная группа
 $\text{Aff}(E)$

- это группа всех автоморфизмов $E \rightarrow E$
(операции - композиция).

Из ① следует, что

$$\begin{aligned} \text{Lin}: \text{Aff}(E) &\rightarrow GL(V), \\ \gamma &\mapsto \text{Lin}(\gamma) \end{aligned}$$

- гомоморфизм групп. Его ядро - это подгруппа

$\text{Tran}(E)$ всех параллельных преобразов

$$\begin{aligned} \tau_v: E &\rightarrow E, \text{ где } v \in V, \\ a &\mapsto a+v \end{aligned}$$

Т.е., имеет точную последовательность групп

$$\{id_E\} \rightarrow \text{Tran}(E) \hookrightarrow \text{Aff}(E) \xrightarrow{\text{Lin}} GL(V) \rightarrow \{id_V\}$$

* * *

5)

Если $\gamma: E_1 \rightarrow E_2$ — изоморфизм аффинных
пространств, то

$$\gamma^*: \text{Aff}(E_1) \rightarrow \text{Aff}(E_2), \\ \alpha \mapsto \gamma \alpha \gamma^{-1}$$

— изоморфизм групп.

* * *

Векторизация

Рассмотрим случай $E = V$

получаемое вложение $GL(V) \ltimes V$
с определением

$$(P, v)(Q, w) = (PQ, P(w) + v) \\ (P, v)^{-1} = (P^{-1}, -P^{-1}(v))$$

действует на V аффинными преобразованиями
по равенству

$$(P, v)(u) = P(u) + v$$

(*)

6)

Содержание

$$GL(V) \ltimes V \rightarrow \text{Aff}(V),$$

сопоставляющее элементу (P, v) преобразование $(*)$, является изоморфизмом групп, по которому они отождествляются. Т.о.,

$$\text{Tran}(V) = V.$$

* * *

В случае одномерного E выбор какой-либо точки $a \in E$ определяет изоморфизм аффинных пространств

$$\begin{aligned} \nu_a : E &\rightarrow V, \\ a+v &\mapsto v \end{aligned}$$

Он называется векторизацией E с помощью выбора начала координат a .

Изоморфизм ν_a^* имеет вид

$$\nu_a^* : \text{Aff}(E) \rightarrow \text{Aff}(V) = GL(V) \ltimes V$$

$$\gamma \mapsto (\text{Lin}(\gamma), \gamma(a) - a)$$

$$\text{В частности, } \text{Lin}(\nu_a^*(\gamma)) = \text{Lin}(\gamma) \quad (*)$$

7)

в частности,

$$\gamma_a^* : \text{Tran}(E) \rightarrow V$$

$$\tau_v \mapsto v = \tau_v(a) - a$$

Зависимость от a :

Задача

$$\gamma_b^*(\gamma) = \gamma_a^*(\tau_{a-b} \gamma \tau_{b-a}) \quad \forall \gamma \in \text{Aff}(E)$$

* * *

Метрика

Зафиксировав на V положительно
определённое скалярное произведение (евкли-
 дово при $k = \mathbb{R}$ и эрмитово при $k = \mathbb{C}$).

$$\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow k$$

8)

Он определяется метрикой на E по

формуле

$$\text{расстояние между } a \text{ и } b = \sqrt{\langle a-b | a-b \rangle} \quad \forall a, b \in E$$

Обозначение:

$$\text{Iso}(E) = \{ \gamma \in \text{Aff}(E) \mid \gamma \text{ — изометрия} \}$$

(в частности, $\text{Iso}(V)$ — группа ортогональных изометрий V)

Задано

линей $\gamma \in \text{Aff}(E)$. Тогда

$$\gamma \in \text{Iso}(E) \iff \text{lin}(\gamma) \in \begin{cases} \text{O}(V) \text{ при } k = \mathbb{R}, \\ \text{U}(V) \text{ при } k = \mathbb{C} \end{cases}$$

$\parallel$
 $\text{GL}(V) \cap \text{Iso}(V)$

↑ ортогональная группа
↑ унитарная группа

Отсюда следует (благодаря (*) на с. 6),

что любая векторизация

$$\gamma_a: E \rightarrow V$$

является аффинным изометризмом.

9)

Кеодвижные точки

Обозначения

Если H - группа преобразований множества X
 « S - кеодское подмножество в H , то мы
 полагаем

$$X^S := \{ x \in X \mid S(x) = x \}$$

Задача

$$X^{hsh^{-1}} = h(X^S) \quad \forall s, h \in H$$

Примеры.

① $X = V$, $H = GL(V)$. Тогда

V^S - линейное подпространство в V .

② $X = E$, $H = Aff(E)$. Тогда

E^S - аффинное подпространство в E , т.е.

$$E^S = a + L,$$

где L - линейное подпространство в V , $a \in E$.

$a + L$ является аффинным пространством с
 пространством параллельных векторов L .

* * *

Ображения

$\gamma \in \text{Iso}(E)$ (соответственно, $R \in \text{Iso}(V) \cap \text{GL}(V)$)

называется аффинным (соответственно, линейным)

отражением аффинного нр-ва E (соотв., векторного нр-ва V)
если:

$$(1) \quad \text{ord}(\gamma) < \infty \quad (\text{соотв., } \text{ord}(R) < \infty),$$

$$(2) \quad \dim_k(E^\gamma) = n-1 \quad (\text{соотв., } \dim_k(V^R) = n-1).$$

E^γ (соотв., V^R) называется зеркалом отражения γ
(соотв., R).

Задача

$(R, v) \in \text{GL}(V) \times V$ является аффинным отражением
или аффинного нр-ва V тогда и только тогда, когда

$$(1) \quad R - \text{линейное отражение векторного нр-ва } V,$$

$$(2) \quad v \perp V^R.$$

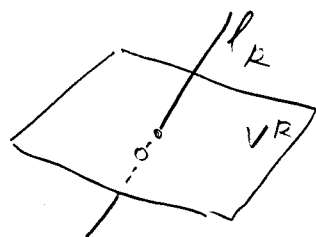
Следствие. Если $n=1$, то (R, v) -отражение $\Leftrightarrow$
 R -отражение.

* * *

Если $R \in \text{GL}(V) \cap \text{Iso}(V)$ - линейное отражение
векторного нр-ва V , то нормаль

$$\ell_R := \{v \in V \mid v \perp V^R\}$$

называется корневой для R



11)
 Всякий вектор $v \in \ell_R$, $v \neq 0$, является
собственным для R , собственное значение
 θ которого является примитивным корнем
из 1 степени
 $d = \text{ord}(R) > 1$.

Если $k = \mathbb{R}$, то $d = 2$.

Если $k = \mathbb{C}$, то d может быть любым.

Пример
 $n = 1$, $k = \mathbb{C}$. Тогда $V^R = 0$, а $\theta = e^{2\pi i s/d}$,
 где $\text{НОД}(s, d) = 1$, $1 \leq s < d$. Геометрически, если
 рассматривать V как евклидову плоскость, то
 R — это поворот вокруг 0 на $2\pi s/d$. Всякий
такой поворот имеет линейное выражение V .

* * *

Пара (v, θ) однозначно определяет линейное
выражение R . Обратное неверно: v определяется
 только с точностью до умножения на ненулевой
 число из k . Здесь увеличивается произвол,

12)

будем рассматривать только v с

$$\|v\| = 1.$$

то определяется v :

при $k = \mathbb{R}$ однозначно с точностью до знака.

при $k = \mathbb{C}$ однозначно с точностью до
умножения на $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| = 1$, т.е. с точностью до
поворота вокруг 0 на вещественной плоскости V .

Обозначения:

$$R_{e, \theta}$$

- это линейное отображение n -во V с собственными
значениями θ и вектором e из корневого угла с

$$\|e\| = 1.$$

Звезда

$$R_{e, \theta}(v) = v - (1 - \theta) \langle v | e \rangle e \quad \forall v \in V$$

(*)

Доказательство

Т.к. $V = V^{R_{e, \theta}} \oplus \ell_{R_{e, \theta}}$ а
 $\ell_{R_{e, \theta}}$ касательна к e , то

13)

ввиду линейности $R_{e,\theta}$, достаточно проверить (*) только для $v \in V^{R_{e,\theta}}$ и $v = e$.

• Если $v \in V^{R_{e,\theta}}$, то

$$v - (1-\theta) \underbrace{\langle v|e \rangle}_0 e = v = R_{e,\theta}(v)$$

т.к. $e \perp V^{R_{e,\theta}}$
т.к. $v \in V^{R_{e,\theta}}$

• Если $v = e$, то

$$\begin{aligned} v - (1-\theta) \langle v|e \rangle e &= e - (1-\theta) \underbrace{\langle e|e \rangle}_1 e = \\ &= \theta e = R_{e,\theta}(e) \end{aligned}$$

т.к. e — код вектор

* * *

Задача

Рассмотрим случай $V = E$, $\text{Aff}(V) = \text{GL}(V) \ltimes V$

Пусть $\gamma = (P, v)$ — аффинное отражение,

$$P = \text{Lin}(\gamma) = R_{e,\theta}.$$

Тогда

$$V^\gamma = (1-\theta)^{-1}v + V^R$$

* * *

Пример

$$k = \mathbb{C}, \quad n = 1, \quad E = V = \mathbb{C}.$$

Аффинные преобразования - это всевозможные пре-
менения вида

$$(e^{2\pi i s/d}, v) \in GL(V) \ltimes V,$$

где $s, d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$, $\text{НОД}(s, d) = 1$, $1 \leq s < d$, т.е.
соотнесение вида:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}, \\ z &\mapsto e^{2\pi i s/d} z + v \end{aligned} \quad (*)$$

Если рассматривать $\mathbb{C}$ как евклидову плоскость,
то (*) - это поворот на угол $2\pi s/d$ вокруг

точки

$$(1 - e^{2\pi i s/d})^{-1} v \quad (**)$$

Меняя v в (**), можно получить
любую точку $z \in \mathbb{C}$.

Т.о., аффинные преобразования в $\mathbb{C}$ (рассматриваемые
как евклидова плоскость) - это в точности всевозможные
повороты на углы вида $2\pi s/d$ вокруг
какой-либо точки.

Цель

Найти целую систему классификации
таких подгрупп G в $\text{Iso}(E)$, которые
отличаются свойствами:

- (1) G дискретна,
- (2) G предстаёт аффинным отражением

Будем называть такую G группой отражений
(reflection group).

Замечание (1) означает, что G является
дискретной подмножеством в $\text{Aff}(E)$.

Задана то же равносильно тому, что
выполнены два свойства:

- (a) любая G -орбита в E
является дискретным подмножеством.
- (b) G -стабилизатор любой точки
из E конечен.

Два типа групп отображений

Предложение.

Следующие свойства групп отображений
 $G \subset \text{Iso}(E)$ эквивалентны:

- (i) G имеет в E неподвижную точку,
- (ii) G конечна.

Док-во.

(i) $\Rightarrow$ (ii) Рассмотрим векторное пространство E относительно какой-либо точки

$$a \in E^G. \quad (*)$$

Тогда из (*) следует, что

$$G \subset GL(V) \cap \text{Iso}(V) \quad (**)$$

Т.к. $GL(V) \cap \text{Iso}(V)$ компактна, а G дискретна, из (***) следует, что G конечна.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Рассмотрим какую-либо G -орбиту в E . Это конечное множество $a_1, \dots, a_s$. Поэтому у него есть центр тяжести

$$c = \frac{1}{s} (a_1 + \dots + a_s)$$

$$\text{Поскольку } \gamma(c) = \frac{1}{s} (\gamma(a_1) + \dots + \gamma(a_s)) =$$

$$= \frac{1}{s} (a_1 + \dots + a_s) = c \quad \square$$

т.к. множества $a_1, \dots, a_s$
и $\gamma(a_1), \dots, \gamma(a_s)$
совпадают.

17)

Центральный классификатор

G - группа отражений в E .

Тогда $\text{Lin}(G)$ - группа (линейных) отражений в V .

Положим

$$T = \{v \in V \mid \tau_v \in G\}.$$

(параллельный элемент E на вектор v)

Терминология:

Дискретные подгруппы в V называются решётками.

Решётки - это в точности всевозможные подгруппы вида

$$\mathbb{Z}v_1 + \dots + \mathbb{Z}v_s,$$

где $v_1, \dots, v_s$ - линейно независимые над $\mathbb{R}$ векторы.

Предложение

T является $\text{Lin}(G)$ -инвариантной решёткой в V .

До-во

Рассмотрим каноническое векторное пространство E . Тогда $E = V$, $\text{Aff}(E) = \text{GL}(V) \ltimes V$, а

$$G \cap \text{Tran}(E) = \{(Id_V, t) \mid t \in T\} \quad (*)$$

Т.е. G дискретна, и (*) следует, что T - дискретная подгруппа в V , т.е. решётка.

Пусть $t \in T$ и $P \in \text{Lin}(G)$. Тогда

$\tau_t = (\text{Id}_V, t) \in G$ и существует $\gamma = (P, v) \in G$.

Значит,

$$\begin{aligned} G \ni \gamma \tau_t \gamma^{-1} &= (P, v)(\text{Id}_V, t)(P, v)^{-1} \\ &= (P, P(t) + v)(P^{-1}, -P^{-1}(v)) \\ &= (\text{Id}_V, -v + P(t) + v) \\ &= (\text{Id}_V, P(t)) \\ &= \tau_{P(t)} \end{aligned}$$

Значит, $P(t) \in T$. $\square$

Итерационная классификация является
функция $\text{Lin}(G)$ метрически изометрична пространству
фактора V и $\text{Lin}(G)$ -инвариантная решетка
 T в V . Функция отображения G является
некоторым расширением T с помощью $\text{Lin}(G)$,
 т.е. имеет место полная последовательность групп:

$$\begin{aligned} \{0\} &\rightarrow T \xrightarrow{\quad} G \xrightarrow{\text{Lin}} \text{Lin}(G) \rightarrow \{\text{id}_V\} \\ &\quad | t \mapsto \tau_t \\ &\quad \{\tau_t \mid t \in T\} = G \cap \text{Tran}(E) \end{aligned} \quad (*)$$

* * *

Пример: классификация одномерных ($n=1$) групп отражений

G - группа отражений n -ва E , ($n=1$)

① Случай, когда G конечна и $n=1$

Значит, $E^G \neq \emptyset$.

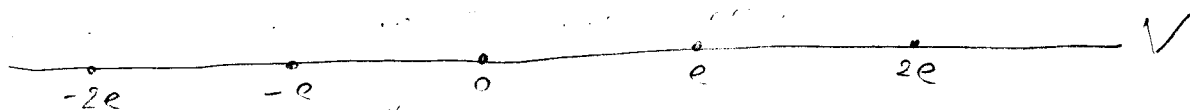
Рассмотрев векторизацию относительно точки $y \in E$, получаем $E=V$ и G - конечная под-группа в $GL(V) = k^*$. Значит,

$$G = \begin{cases} (-1), & \text{если } k = \mathbb{R}, \\ (e^{2\pi i/d}), & d \in \mathbb{N}, d \geq 2, \text{ если } k = \mathbb{C}. \end{cases}$$

② Случай, когда G бесконечна, $\sqrt[n]{k} = \mathbb{R}$

Т.к. G бесконечна, а $\text{Lin}(G) = (-1)$ конечна, то, ввиду (*) на стр 16, T - нетривиальная решетка:

$$T = \mathbb{Z}e, \quad e \in V, \quad e \neq 0.$$



Пусть $a \in E$ - зеркало какого-либо отражения $\gamma \in G$. Рассмотрим векторизацию $\gamma_a: E \rightarrow V$ и соотнесем $E \subset V$ с подпространством γ_a ; а $G \subset \gamma_a^*(G)$ с подпространством γ_a^* .

20)

Тогда

$$\gamma = (-1, 0) \in G$$

Если $t \in T$, т.е. $\tau_t = (1, t) \in G$, то

$$G \ni \tau_t \gamma = (1, t)(-1, 0) = (-1, t)$$

Наоборот, если $\lambda = (-1, u) \in G$, то

$$G \ni \lambda \gamma = (-1, u)(-1, 0) = (1, u) = \tau_u,$$

т.е. $u \in T$.

Вывод:

G является полупростым групповым
циклом $L_2(G) = (-1)$ и результирует T , т.е.

$$G = \{(P, t) \mid P = \pm 1, t \in T\}$$

При этом выражение в G - это в точности всевозможные
элементы вида $(-1, t)$, $t \in T$ (см. следствие из

ср. 10). Зеркалом выражения $(-1, t)$ является
 $0 + (1 - (-1))^{-1}t = \frac{1}{2}t$ (см. задачу из ср. 13)



• - зеркало отражения у G

○ - векторы у решётки T

Защрихованният отрезок Δ е Δ фундаменталният отрезок. Разглеждаме отражение, зеркалния който евяется ея копия;

$$\gamma_1 = (-1, 0), \quad \gamma_2 = (-1, e)$$

$$\begin{aligned} \text{Тогава } \gamma_2 \gamma_1 &= (-1, e)(-1, 0) = \\ &= (1, e) - \text{отражение} \\ &\quad \text{решетки } T \end{aligned}$$

Поэтому G проходима элементами γ_1, γ_2

То, модия две групи отражения в этом случае устроены одинаково и отличаются только выбором отрезка Δ из аффинного пространства E .

Последнее можно выразить в групповых терминах:

Задача: Пусть $G_i, i=1,2$, - группы отражений вещественного аффинного пространства E , проходимость отражений в концах отрезка $\Delta_i \subset E$.

Пусть $\gamma \in \text{Aff}(E)$ - аффинное преобразование, так чтобы

$$\gamma(\Delta_1) = \Delta_2$$

$$\text{Тогава } \gamma G_1 \gamma^{-1} = G_2.$$

Замечание. Так $\gamma \Delta_1$ и Δ_2 могут быть разные, но, все равно говорит $\gamma \notin \text{Iso}(E)$.

Это мотивирует следующее определение
эквивалентности групп отражений, с тем чтобы
 до которой естественно осуществлять их класси-
 фикацию:

Определение (эквивалентность групп отражений)

Группы отражений $G_1 \subset \text{Iso}(E_1)$ и $G_2 \subset \text{Iso}(E_2)$
 называются эквивалентными, если существует
 такая изоморфизм аффинных пространств

$$\gamma: E_1 \rightarrow E_2$$

(γ может и не быть изометризмом!), но

$$\gamma^*(G_1) = G_2$$

(см. сф. 5)

Вывод

При $n=1$ и $k=\mathbb{R}$ с точностью до эквива-
 лентности существует ровно одна группа
отражений. Она порождена отражением
 в концах отрезка Δ относительно E и является
полупрямым произведением группы $\text{Lin}(G)$
 порядка 2 и решетки T . Разор. E/G
компактен и гомотопен Δ .

③ Случай, когда G бесконечна,
 $n=1$ и $k=\mathbb{C}$

Используем следующий факт:

Богус' факт (и любое):

Любая дискретная группа аффинных
изометрий аффинного пространства E
конечно порождена (и даже конечно
представима).

Комментарий: Это вытекает из метода
 Пуанкаре задания такой группы отображения
 и соотношениями с помощью фундаментальной
 области Дирихле и того факта, что эта область
 является сложноупорядоченной с конечными границами.

Следствие (и любое)

Любая группа отображений порождена
конечными элементами.

* * *

Применим это к рассматриваемой
группе образцов: G ($n=1$ и $k=\mathbb{C}$):

Поскольку в этом случае $GL(V) = \mathbb{C}^*$,
а $L_n(G)$ порождена конечным числом
образцов (т.е. это — конечная группа
в $\mathbb{C}^*$), то имеет:

$$L_n(G) = \left(e^{2\pi i/d} \right), \quad d \in \mathbb{N}, d \geq 2 \quad (*)$$

В данном, $L_n(G)$ конечна. Поэтому,
ввиду бесконечности G , рассётка T — нетривиальна.

Каждое g группы $(*)$ нетривиально
инвариантно рассётка в V задаётся
селекцией образцов на

$$d = |L_n(G)| :$$

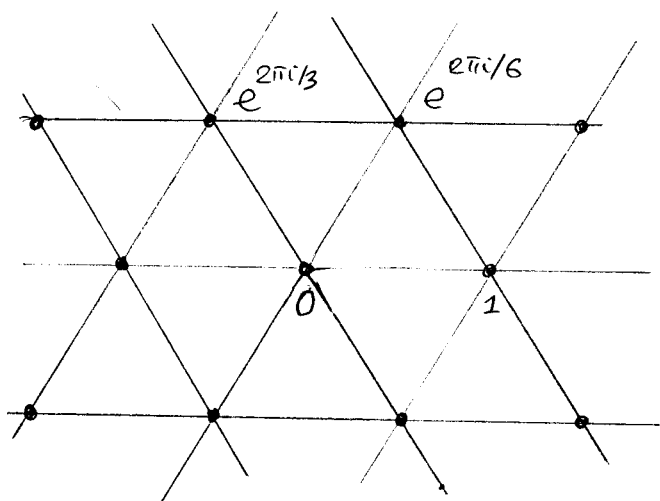
Предполагается.

Следующие свойства эквивалентны:

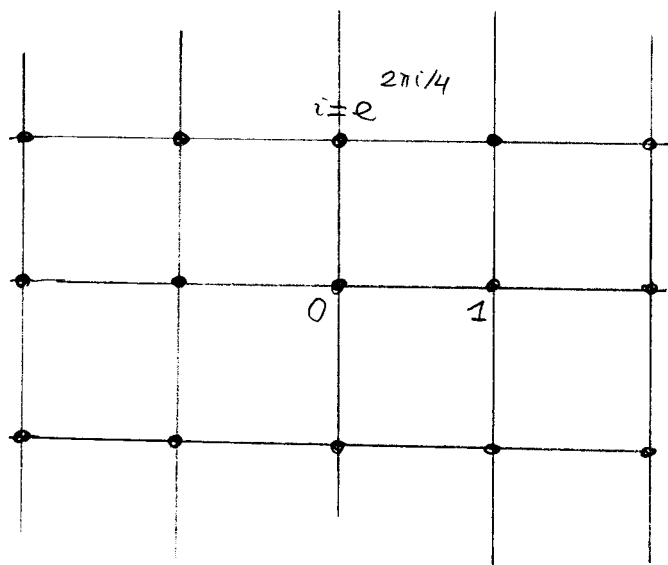
(a) Число $K = (e^{2\pi i/d})^{\sqrt{d}}$, $d \geq 2$, имеет в V ненулевую инвариантную решетку L .

(b) $d = 2, 3, 4$ или 6 и, соответственно,

$$L = \begin{cases} \text{любая ненулевая решетка в } V \text{ при } d=2, \\ (\mathbb{Z} + e^{2\pi i/d} \mathbb{Z})v, \text{ при } d=3, 4, 6, \text{ где } v \in V, v \neq 0. \end{cases}$$



$$\mathbb{Z} + e^{2\pi i/3} \mathbb{Z} = \mathbb{Z} + e^{2\pi i/6} \mathbb{Z}$$



$$\mathbb{Z} + e^{2\pi i/4} \mathbb{Z}$$

До-во.

(b) $\Rightarrow$ (a) ясно.

(a) $\Rightarrow$ (b)

$M = -M$ для любого ненулевого M в V
 Это дает 2-го где $d=2$.

26)

Пусть $d \geq 3$.

Возьмем $v \in L$, $v \neq 0$. Тогда $v, e^{2\pi i/d} v \in L$
 линейно независимы над $\mathbb{R}$. Т.о., $\text{rk}(L) = 2$.

Значит, существуют базис e_1, e_2 двумерного $\mathbb{R}$ -вектор-
ного пространства V , для которого

$$L = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2.$$

Умножение на $e^{2\pi i/d}$, как линейный оператор
в этом пространстве, имеет в базисе e_1, e_2
целочисленную матрицу, т.к. L инвариантна
 относительно этого оператора. Значит, след этого
оператора лежит в $\mathbb{Z}$. С другой стороны,

в базисе $1, i$ матрица этого оператора имеет вид

$$\begin{pmatrix} \cos(2\pi/d) & -\sin(2\pi/d) \\ \sin(2\pi/d) & \cos(2\pi/d) \end{pmatrix},$$

и потому его след равен $2 \cos(2\pi/d)$. Т.о.,

$$2 \cos(2\pi/d) \in \mathbb{Z},$$

т.е. возможно только в следующих случаях

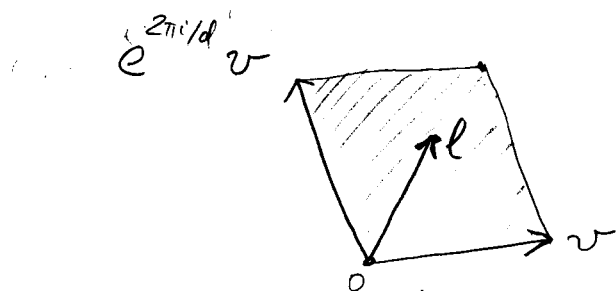
$\cos(2\pi/d)$	d
0	4
1/2	6
-1/2	3
1	1
-1	2

Т.к. $d \geq 3$, то остается описать все $\mathbb{K}$ -инвариантные
 подпространства в первых трех случаях.

Пусть $v \in L$. Тогда

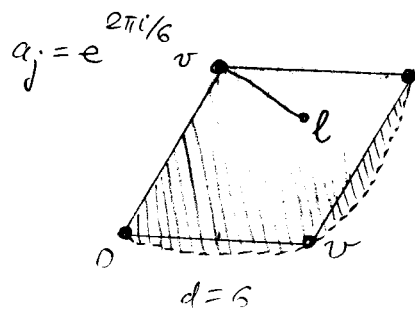
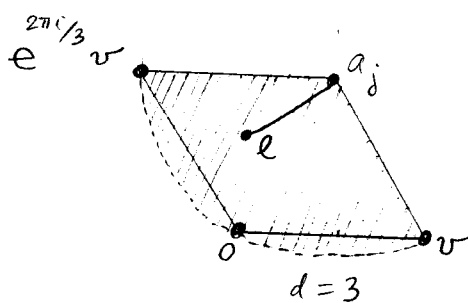
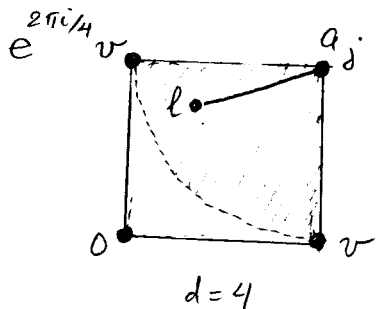
$$M := (\mathbb{Z} + e^{2\pi i/d} \mathbb{Z})v \subseteq L. \quad (*)$$

Если v — кратчайший ненулевой вектор в L , то v имеет место равенство. Действительно, докажем, что любой $l \in L$ лежит в M . Заменяя l на подходящую сумму l с элементами из M , можно считать, что l лежит в параллелограмме



Если l не совпадает ни с одной из его вершин, то, ввиду $d=3, 4, 6$, хотя бы одна из разностей
 $l - a_j \in L$

кроме, чем l (см. рисунки ниже). Проверим.



Если l лежит в заштрихованной области и отстоит от вершин, то $l - a_j$ кроме, чем a_j .

Классификация бесконечных групп
образений G при $n=1$ и $k=\mathbb{C}$

Более замечание (и в k модные):

Т.к. модные векторизации

$$\nu_a: E \rightarrow V \quad (*)$$

является аффинным изоморфизмом, то же модные

группы образений $G \subset \text{Iso}(E)$ группа

$\nu_a^*(G)$ является группой образений в $\text{Iso}(V)$,

явившаяся G . Поэтому, занимаясь классификацией, можно ограничиться рассмотрением

только групп образений в $\text{Iso}(V) \subset \text{GL}(V) \ltimes V$.

* * *

В случае $n=1$, $k=\mathbb{C}$ и бесконечных групп образений G возьмем в качестве a в $(*)$ зеркало такого отображения $\gamma \in G$, что $\text{Lis}(\gamma) = e^{2\pi i/d}$ — образующая циклической группы $\text{Lis}(G)$. Тогда, заменив E на V , а G на $\nu_a^*(G)$, получим $\gamma = (e^{2\pi i/d}, 0)$, и те же рассуждения, что и для $k=\mathbb{R}$ не сдвигая, дают:

Полный список:

При $n=1$, $k=\mathbb{C}$ бесконечные циклические группы G непрерывно реализуемы с точностью до эквивалентности следующим списком групп преобразований аффинных кр-ве V :

① Случаи $|\text{Lin}(G)|=d=3,4,6$, $\text{rk}(T)=2$:

$$G(d, v) := \left\{ (\varepsilon^s, t) \mid s \in \mathbb{Z}, t \in (\mathbb{Z} + \varepsilon \mathbb{Z})v \right\}, \text{ где } v \in V, v \neq 0, \varepsilon = e^{2\pi i/d}.$$

② Случаи $|\text{Lin}(G)|=2$, $\text{rk}(T)=1$:

$$G(2, v) := \left\{ (\pm 1, t) \mid t \in \mathbb{Z}v \right\}, \text{ где } v \in V, v \neq 0.$$

③ Случаи $|\text{Lin}(G)|=2$, $\text{rk}(T)=2$:

$$G(2, v, \lambda) := \left\{ (\pm 1, t) \mid t \in (\mathbb{Z} + \lambda \mathbb{Z})v \right\}, \text{ где } v \in V, v \neq 0, \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

* * *

Эквивалентность функций у того списка:

- Если где функции у того списка эквивалентны, то они относятся к одному и тому же кругу того списка.
- $G(d, v)$ и $G(d, u)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда d, v, u .

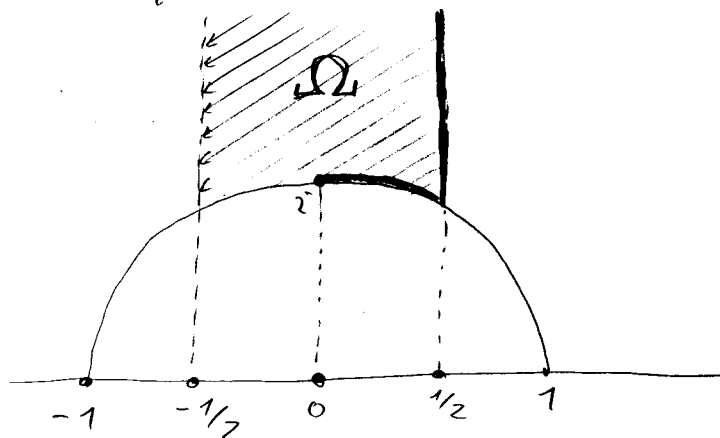
Это следует из фактора

$$(\lambda, 0)(\mu, t)(\lambda^{-1}, 0) = (\mu, \lambda t) \quad \forall \mu, \lambda \in \mathbb{C}^*, t \in V, \quad (*)$$

и пропорциональности модных кет-векторов у V .

- Случай функции $G(2, v; \lambda)$.

Рассмотрим в $\mathbb{C}$ модулярную фигуру Ω :



- Каждая группа из списка (3) списка эквивалентна группе

$$G(2, v, \lambda) : \lambda \in \Omega,$$

где λ однозначно определено.

- Группы $G(2, v, \lambda)$ и $G(2, u, \lambda)$ с $\lambda \in \Omega$ эквивалентны для любых v и u

Комментарий.

Из следствия (*) на с. 30 и того, что две решетки $\mathbb{Z} + \lambda_1 \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} + \lambda_2 \mathbb{Z}$ в $\mathbb{C}$ с $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ конгруэнтны одна к другой умножением на число из $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда λ_1 и λ_2 лежат в одной из пяти групп взаимодуальных преобразований

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C},$$

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad-bc = \pm 1,$$

а Ω — это фундаментальная область для группы.

* * *

Т.е., существуют семейства конечно не изоморфных одномерных комплексных бесконечных групп автоморфизмов, зависящих от непрерывного комплексного параметра — точки из Ω .

* * *

Фактор-пространство E/G компактно, если $G \neq G(2, v)$

Действительно, $E/G = \underbrace{(E/T)}_{\substack{\text{конечная группа} \\ \uparrow \\ \text{2-мерный тор, т.к. } rk T = 2}} \text{Lie}(G) \quad (*)$

Более того, E/T — эллиптическая кривая. Поэтому E/G , как фактор эллиптической кривой по действию конечной группы, является проективной алгебраической кривой. Можно показать что E/G изоморфна $\mathbb{P}^1$.

Комментарий: т.к. E/T гладкая, то ввиду (*), E/G нормальная, а потому (из-за одномерности) — гладкая кривая. То, что род E/G равен 0, получается из формулы Гурвица.

* * *

Если $G = G(2, v)$, то G — это комплексификация бесконечной вещественной одномерной группы вращений. Поэтому фактор E/G некомпактен (и гомеоморфен $\mathbb{R} \times (\text{отрезок})$).

* * *

Алгебраическая структура

Явное описание искаивается, что каждая бесконечная коммутативная групповая структура G в $\text{Iso}(V)$ является подгруппой произведения $\text{Lin}(G)$ и T .

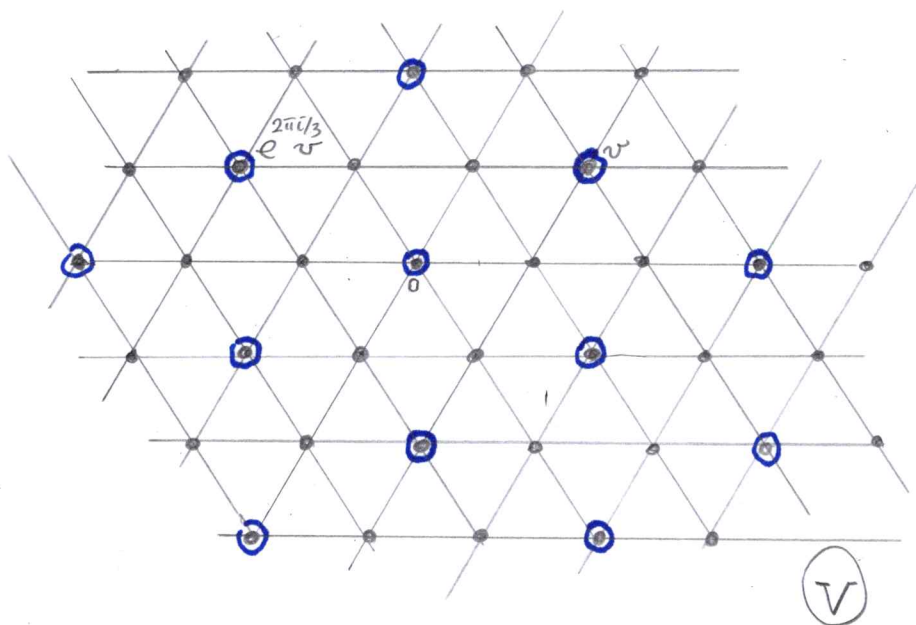
* * *

Зеркала отражений

Если (α, t) - отражение (при $n=1$), то по задаче на сф. 13 его зеркалом является точка $(1-\alpha)^{-1}t$.

Отсюда следует, что зеркала устроены так:

Группа $G(3, v)$:

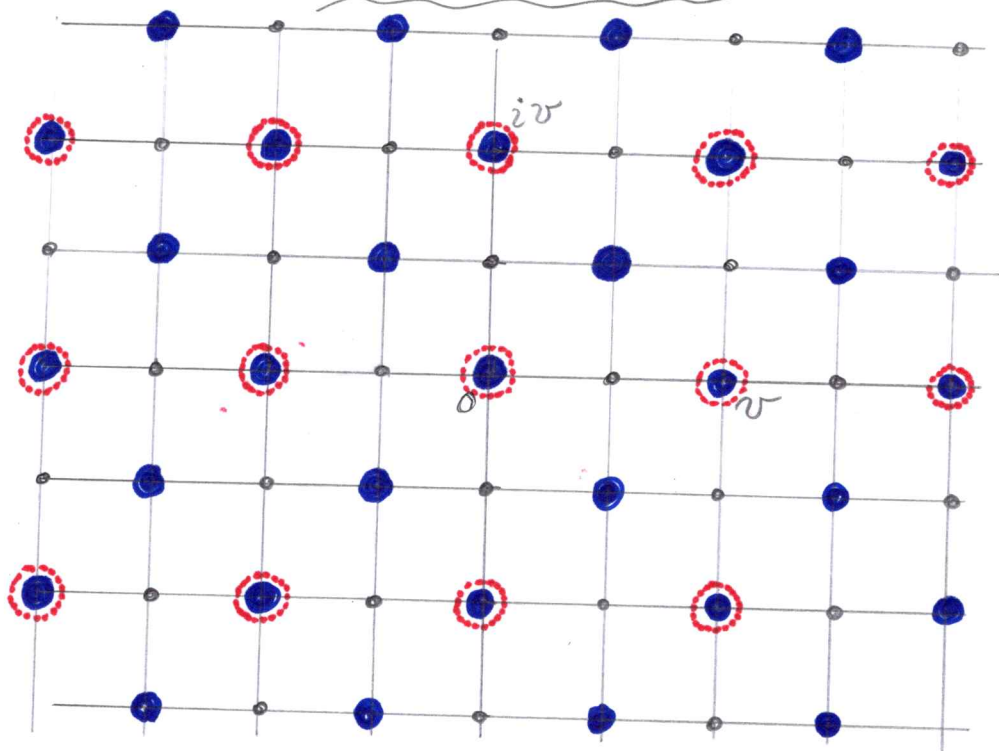


- - зеркала отражений порядка 3 (повороты в плоскости V на $\pm \frac{2\pi}{3}$ вокруг этих точек)

- - векторы из решётки T

34)

Группа $G(4, v)$:



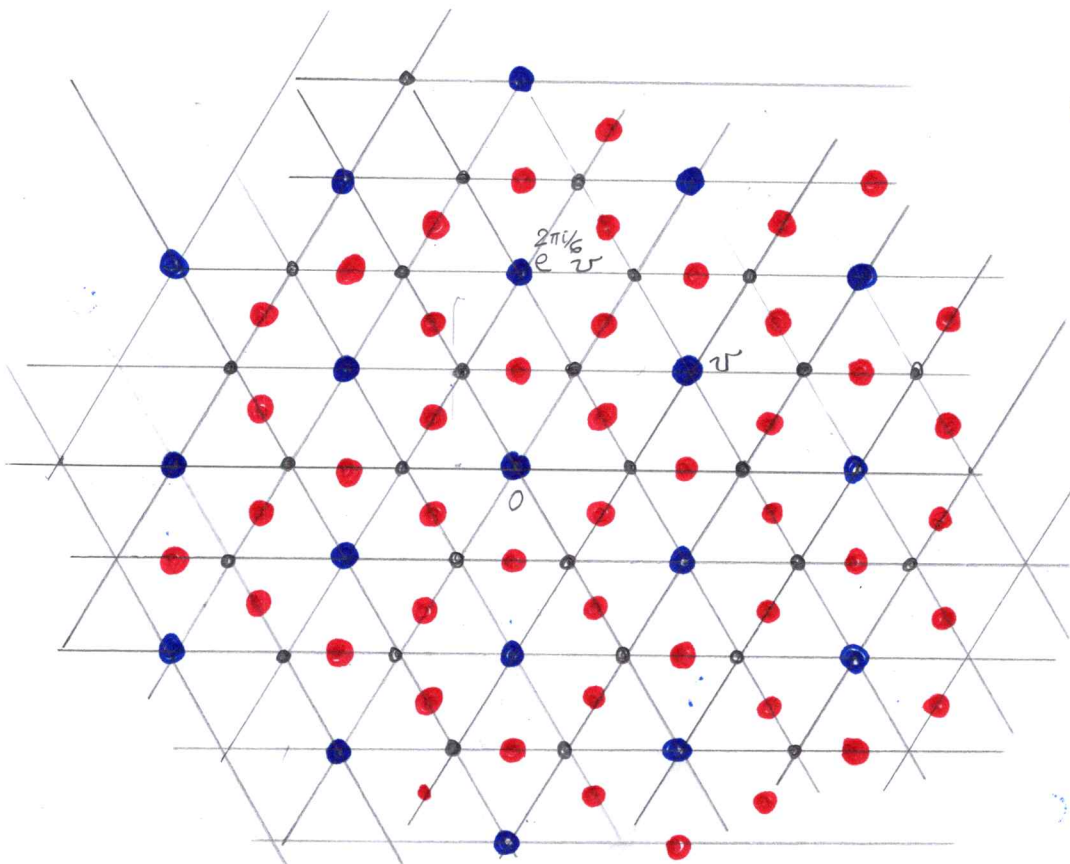
(V)

● - зеркало отражения порядка 4

• - зеркало отражения порядка 2, не являющиеся зеркалом отражения порядка 4.

○ - вектор из решетки T

Группа $G(6, v)$:

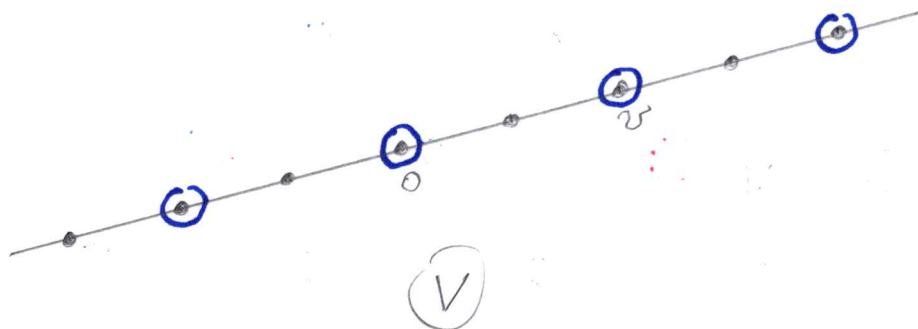


● - зеркало отражения порядка 6, откуда - вектор решетки T

• - зеркало отражения порядка 3, не являющиеся зеркалом отражения порядка 6

● - зеркало отражения порядка 2, не являющиеся зеркалом отражения порядка 6.

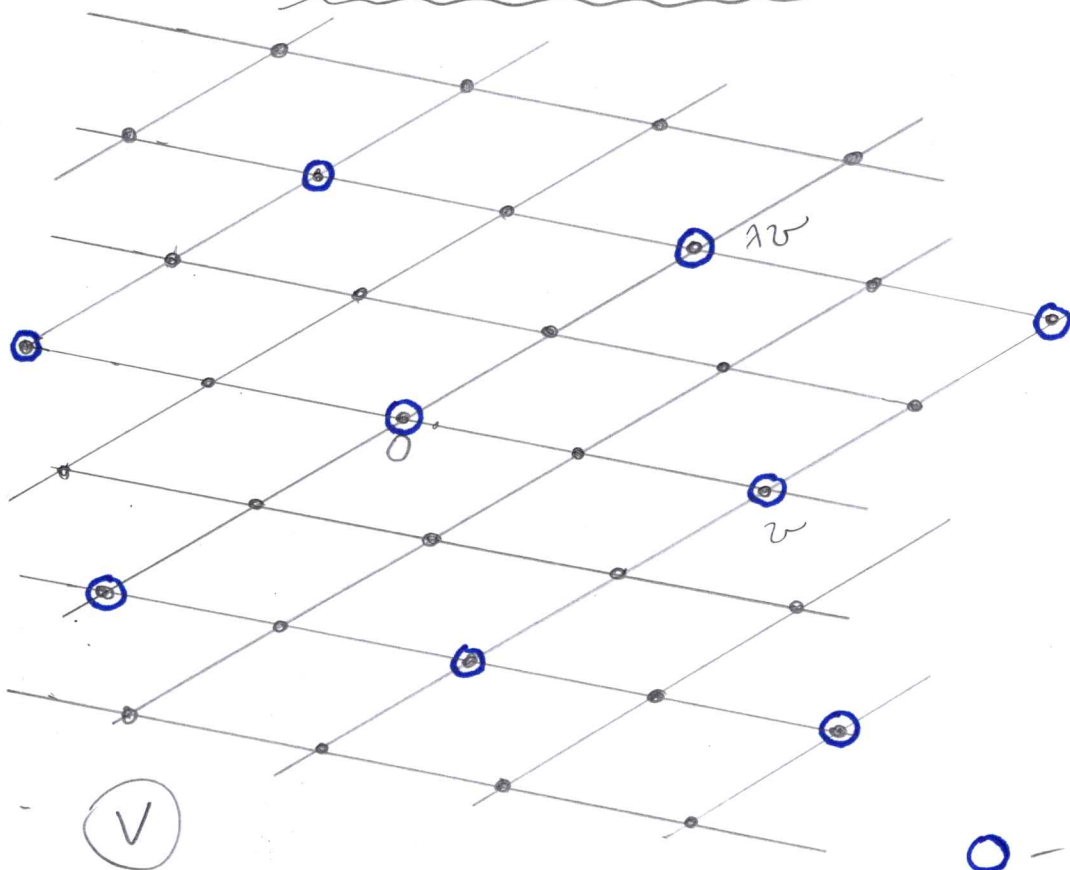
Группа $G(2, v)$:



• - зеркала
отражений
упорядка 2
(повороты вектор-
ной плоскости
 V на π вокруг
такой точки)

○ - векторы из решётки T

Группа $G(2, v, \lambda)$:



• - зеркала
отражений
упорядка 2
(повороты
векторной
плоскости V
на π вокруг
такой точки)

○ - векторы из
решётки T

Задача

Для $G = G(d, v)$ при $d=2, 3, 4, 6$

найти два выражения, упрощающих G .

(X)
н/о

Для $G = G(2, v, \lambda)$ найти три
выражения, упрощающих G , и доказать, что
„три” нельзя заместить на „два”.

Задача

Исследовать для каких v выражения при
 $n=1$, $k=\mathbb{C}$ фундаментальные относительно E .

Это завершает рассмотрение случая
 $n=1$. Далее рассматриваем случай
случай.

* * *

Криводольность

Если E_i - аффинные пространства с нулевыми
 характеристическими идеалами V_i , $i=1, \dots, s$, то $E_1 \times \dots \times E_s$
 естественно наделено структурой аффинного
 пространства с нулевыми идеалами $V_1 \oplus \dots \oplus V_s$. Если
 V_i снабжено метрикой $\langle \cdot \rangle_i$, то $V_1 \oplus \dots \oplus V_s$
 снабжается метрикой $\langle \cdot \rangle_1 \perp \dots \perp \langle \cdot \rangle_s$

* * *

Пусть H - подгруппа в $\text{Aff}(E)$.

Если существуют неуравновешенные аффинные
 пространства $E_1, \dots, E_s$, где $s \geq 2$, и подгруппы
 H_i в $\text{Aff}(E_i)$ такие, что

H эквивалентна $H_1 \times \dots \times H_s$,

то H называется криводольной. Всегда —

некриводольная

* * *

Задание. Если $H_i \subset \text{Iso}(E_i)$ представляет ограждение
или дискретку, то это * * * верно и для $H_1 \times \dots \times H_s$.

* * *

Терема

• Пусть $G \subset \text{Iso}(E)$ — группа, проходческая
образующая (не обязательно дискретная). Тогда:

(a) G эквивалентна $G_1 \times \dots \times G_s$, где
 $G_i \subset \text{Iso}(E_i)$ неуничтожима и линейно
приводима (и тогда $\dim_k E_i = 1$), либо проход-
ная образующая, и не все G_i тривиальны.

(b) G неуничтожима $\Leftrightarrow \text{Lin}(G)$ — неуни-
водимая (в смысле теории представлений) группа
линейных преобразований V

(c) $G_1, \dots, G_s$ определены однозначно с
точностью до эквивалентности и привода

• Важное примечание $G_1 \times \dots \times G_s$
численно в (a) виде проходческая образующая

* * *

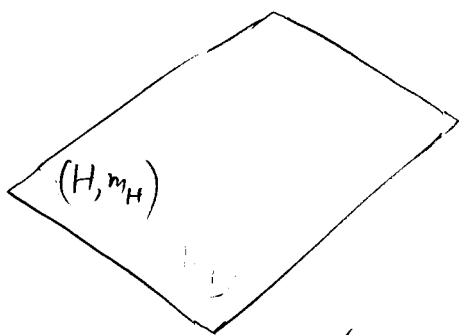
Это сводит задачу классификации групп
образующих к описанию неуничтожимых таких групп

* * *

Геометрическая переформулировка леммы

Пусть $\mathcal{H}$ - класс, каждый элемент пар (H, m_H) ,
где H - интервалосоусь (= аффинное подпространство -
во пространстве E , а m_H - целое
число ≥ 2 (кратность)).

(H, m_H) однозначно определяет отображение
 $\gamma \in \text{Iso}(E)$, у которого



$$\left\{ \begin{array}{l} H = E^\gamma, \\ e^{2\pi i / m_H} \text{ — это собственные числа } \text{Lin}(\gamma) \end{array} \right.$$

Пусть $G(\mathcal{H})$ - группа, порождённая всем
такими отображениями γ .

Проблемы:

(a) Когда $G(\mathcal{H})$ дискретна (т.е. является
группой отображений)?

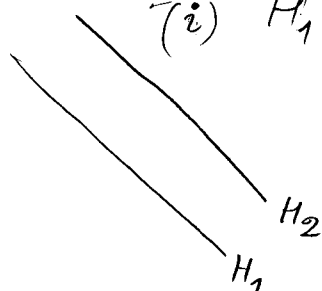
При исследовании этой проблемы
можно ограничиться только компактным $\mathcal{H}$.

Пример (zagara):

$n=2$, $k=\mathbb{R}$. В этом случае все $m_H=2$.

Пусть $\mathcal{H}$ состоит только из двух пар $(H_1, 2)$ и $(H_2, 2)$,
где H_1 и H_2 — прямые на евклидовой плоскости E

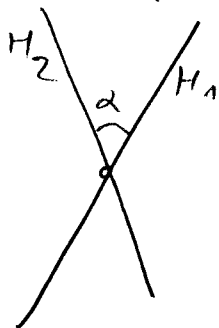
(i) H_1 и H_2 не пересекаются.



Тогда $G(\mathcal{H})$ — бесконечная группа
образений. Она приводится к
звездчатому $G_1 \times G_2$, где G_1 —

тривиальная одномерная группа, G_2 — беско-
нечная одномерная группа образений (см.
ср. 19-20)

(ii) H_1 и H_2 пересекаются.



Тогда $G(\mathcal{H})$ — группа образений
(абсолютно конечно) $\langle \Rightarrow \rangle$

угол α имеет вид
 $2\pi \cdot q$,

где q — рациональное число.

42)

* * *

Для $k = \mathbb{C}$ ответ на (a) и (c)

не найден. Ответ на (b) может быть

выведен из явного списка представле-
ний всех классов эквивалентности

группы выражений, которые будут описаны
ниже.

* * *

Классификация групп выражений

при $k = \mathbb{R}$ (Коксетер 1937,
Витт 1941)

$k = \mathbb{R}$

G - неприводимая группа выражений
пространства E .

Пусть M - совокупность зеркал всех выражений у G .

Тогда:

(a) $E \setminus \bigcup_{H \in M} H$ - несвязное объединение
связных компонент
("камер").

(b) Ввиду $X^{hsh^{-1}} = h(X^s)$ (задана на сф. $\mathcal{G}$),

G переводит зеркала в зеркала, а потому камер
ры в камеры.

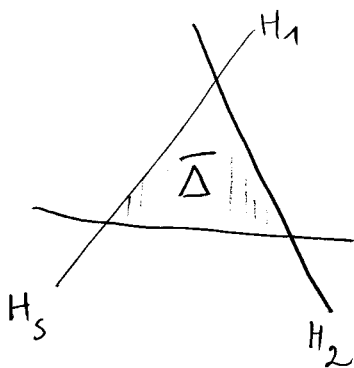
Действие G на множестве всех камер
точно транзитивно.

Следовательно, замыкание $\bar{\Delta}$ любого ка-
меры Δ является фундаментальной областью
для действия G на E .

(c) Значит, согласно Пуанкаре, если
 $H_1, \dots, H_s$ - такие зеркала, что $\bar{\Delta} \cap H_1, \dots, \bar{\Delta} \cap H_s$ -
это все грани коразмерности 1 многоугольника
 $\bar{\Delta}$, то G порождает отражениями

$\gamma_1, \dots, \gamma_s$, где

γ_i - отражение в зеркале H_i .



44)

(d) Вуг $\bar{\Delta}$:Если G конечна, то $\bar{\Delta}$ является n -мерным симплексом, т.е.

$$\bar{\Delta} = a + \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \mid \lambda_i \geq 0 \forall i \right\},$$

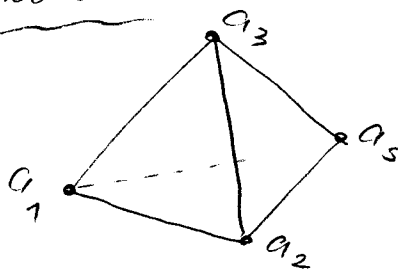
где $v_1, \dots, v_n$ — базис в V 

Т.о., $s=n$,
если G
конечна

Если G бесконечна, то $\bar{\Delta}$ является n -мерным симплексом, т.е. множествомвсех возможных барцентрических линейных
комбинаций вида

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i a_i, \quad \lambda_i \geq 0,$$

где $a_1, \dots, a_{n+1} \in E$ — точки, не лежащие в
одной гиперплоскости



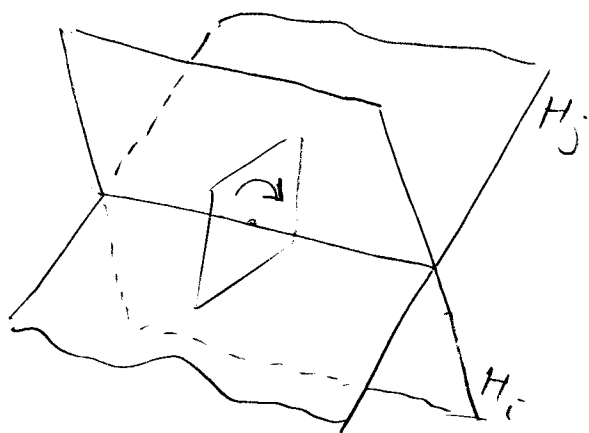
Т.о., $s=n+1$,
если G
бесконечна

(e) Угол между H_i и H_j равен

$$\frac{\pi}{m_{ij}}, m_{ij} \in \mathbb{N}$$

Поэтому $\chi_i \chi_j$ — это поворот на $\frac{2\pi}{m_{ij}}$ в

двумерной плоскости ортогональной $H_i \cap H_j = E^{\delta_i \delta_j}$



(f) Наоборот, если в E задан n -мерный
многогранник P , являющийся либо

симплициальным комплексом, либо симпликсом

с углами вида $\frac{\pi}{m}$, $m \in \mathbb{N}$ между

парами гиперплоскостей, пересекающих P по

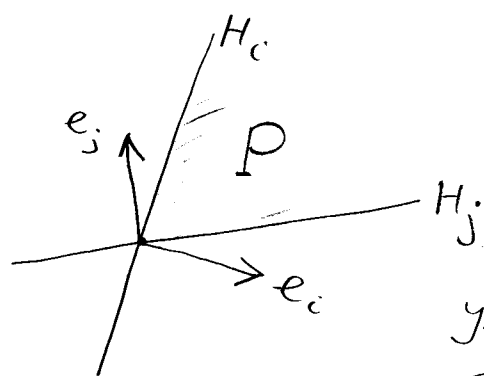
$(n-1)$ -мерным граням, то группа $G(P)$ порождена

отражениями в таких гиперплоскостях, диссертация

и конъюгатами

(g) Это дает классификацию
неприводимых групп отражений к
классификации таких P с точностью до
аффинных преобразований E .

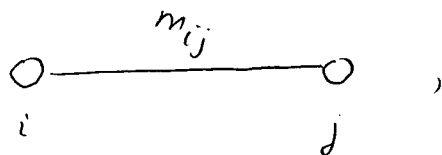
Ответ дается в терминах диаграмм
Кокстера - графов, у которых вершины
биективно соответствуют $(n-1)$ -мерным граням
 P , а ребра между этими гранями номера-
ются числами на ребрах по правилу:



$R_{e_i, -1}$ - отражение с зеркалом H_i ,
 e_i лежит в той же
полупространстве, что и P .

Угол между e_i и e_j равен $\frac{\pi}{m_{ij}}$, $m_{ij} \in \mathbb{N}$

Это изображается на диаграмме
Кокстера так:



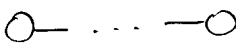
примеч.: если $m_{ij} = 2$, то ребра между i и j нет,

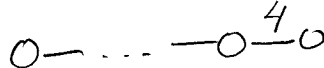
если $m_{ij} = 3$, то m_{ij} на ребре не пишется.

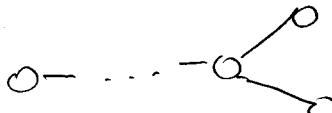
Полный список диаграмм Кокстера
многогранника P , для которых $G(P)$ -
дискретная невырожденная группа

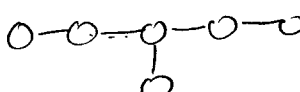
$G(P)$ конечна

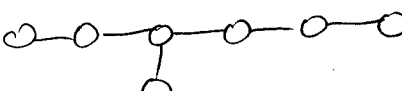
$G(P)$ бесконечна

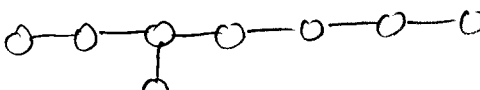
A_n 

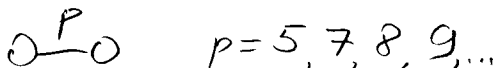
$B_n = C_n$ 

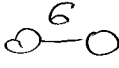
D_n 

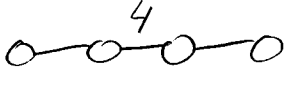
E_6 

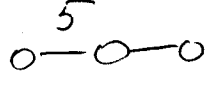
E_7 

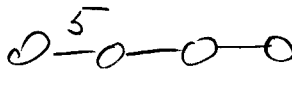
E_8 

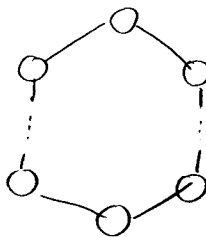
F_p $p = 5, 7, 8, 9, \dots$ 

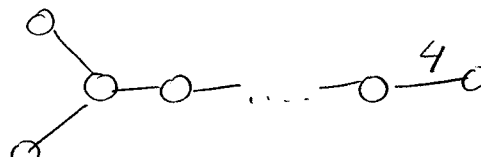
G_2 

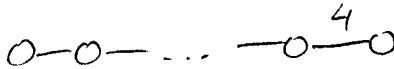
F_4 

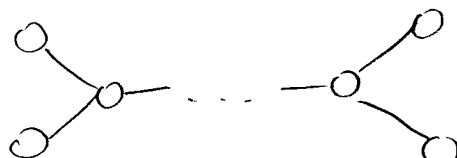
H_3 

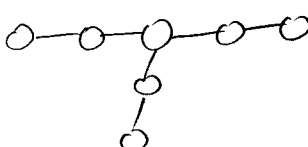
H_4 

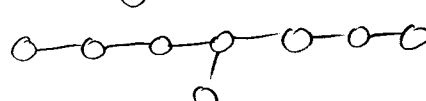
$\tilde{A}_n$ 

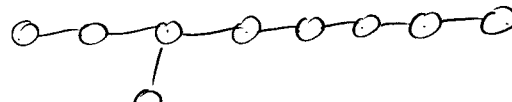
$\tilde{B}_n$ 

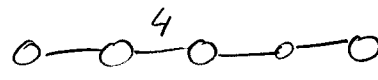
$\tilde{C}_n$ 

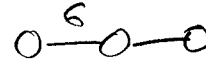
$\tilde{D}_n$ 

$\tilde{E}_6$ 

$\tilde{E}_7$ 

$\tilde{E}_8$ 

$\tilde{F}_4$ 

$\tilde{G}_2$ 

Это в полном все аффинные
группы Вейля среди простых
корней

(h) Если G бесконечна, то

- E/G компактно

(ибо симпликс Δ компактен и является фундаментальной областью);

- T - решётка ранга $n = \dim E$

(по теореме Бейердаха);

- группа $\text{Lin}(G)$ конечна

(ибо $\text{Lin}(G) \subset \underbrace{O(V)}_{\substack{\text{компактная} \\ \text{группа}}}$ и в базисе из T

матрицы элементов из $\text{Lin}(G)$ унитарны
ввиду $\text{Lin}(G)$ -инвариантности T).

- группа $\text{Lin}(G)$ порождена $n = \dim_k E$

ображениями

(ибо $\text{Lin}(G)$ порождена образами,
линейно независимыми и конечными)

- G является конечно порождённой

$\text{Lin}(G)$ и T .

Это вытекает из следующих обычных
закончений

Zadara (h 1405e)

Для подгруппы H в $Aut(E)$ следующие свойства эквивалентны:

(a) H является полугруппой преобразования
 $\text{Lin}(H) = H \cap \text{Tran}(E)$.

(b) Существование такой точки $a \in E$, что

$$\{h \in H \mid \ell(a) = a\} \xrightarrow{\text{Lin}} \text{Lin}(H)$$

- изоморфизм (а называется специальным тогда где H)

Zadara (k model)

Если H неупрощаема, а $\text{Lin}(H)$ переходна
 $n = \dim E$ элементов, то в E существует
элементарная матрица дан H .

10. Estimated Service Charge

(i) Не любая неприводимая конечная
группа отражений K может быть группой
 $\text{Lin}(G)$ для бесконечной неприводимой
группы отражений. Необходимое условие —
кристаллографичность, т.е. существование
 K -инвариантной решетки полного ранга в V
(иногда T — такая решетка для $\text{Lin}(G)$).

Следующая теорема характеризует
группы K вида $\text{Lin}(G)$ и, в частности,
показывает, что кристаллографичность
является и достаточным условием.

Она сформулирована в форме,
удобной для сравнения с аналогичными
результатами для случая $k = \mathbb{C}$.

Теорема ($k = \mathbb{R}$)

Для неприводимой конечномерной группы
 $K \subset O(V)$, представимой отображением

$$R_{e_s, \bigoplus_{i=1}^n \theta_s} \quad , \quad s=1, \dots, n = \dim_k V$$

следующие свойства эквивалентны:

(1) $K = \text{Lin}(G)$, G — бесконечная группа
отражений в $\text{Iso}(E)$.

(2) В V существует K -инвариантная решётка
ранга n . (т.е. K -кристаллографическая группа)

(3) K определена над $\mathbb{Q}$.

(4) $K = G(P)$, где тип диаграммы Кокстера сим-
плициального комплекса P содержится в списке:

$$A_n, B_n = C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2,$$

т.е. K является группой Вейля неприводимой системы корней.

(5) Все числа

$$c_{ij} = (1 - \theta_i)(1 - \theta_j) \langle e_i | e_j \rangle \langle e_j | e_i \rangle$$

лежат в $\mathbb{Z}$.

(6) Кольцо $\mathbb{Z}[c_{ij}]$ совпадает с $\mathbb{Z}$

Классификация групп отражений при $k = \mathbb{C}$

$$k = \mathbb{C}$$

G - неприводимая группа отражений
пространства E .

Случай конечно группы G

Можно считать, что $G \subset U(V)$.

Полный список таких G известен не
компьютерными (как при $k = \mathbb{R}$), а алгебраическими
методами в 1954 г. Шенердодом и
Тоддом (Shephard, Todd).

Как и при $k = \mathbb{R}$, ответ можно описать
с помощью фрагов, задающих образующие
отражение

$$R_j = R_{e_j, \theta_j}, \text{ где } \theta_j = e^{2\pi i / m_j}, m_j \in \mathbb{N}, m_j \geq 2$$

$$\|e_j\| = 1$$

$$j = 1, \dots, d$$

Возьмем как это делается.

Рассмотрим касательную на e_j
прямую

$$l_j = \mathbb{C} e_j.$$

Изно, по R_j однозначно определяется пара

$$(l_j, m_j)$$

(т.е. прямая l_j с кратностью m_j) и определяет её.

Т.о., дело сводится к заданию графом
системы прямых с кратностями

$$(l_1, m_1), \dots, (l_d, m_d)$$

с точностью до замены её на

$$(\gamma(l_1), m_1), \dots, (\gamma(l_d), m_d), \quad (*)$$

где γ - унитарное преобразование V

(ибо соответствующее (*) выражение

проходит группу образов $\gamma \in \gamma^{-1}$,
эквивалентно α).

Системы прямых с кратностями в V
и циклические произведения

Такие системы задаются численными инвариантами следующим образом.

Определение. Индексированные
множеством J (возможно, бесконечным)
системы $\{\ell_j\}_{j \in J}$ и $\{\ell'_j\}_{j \in J}$ (соответственно,

$\{(\ell_j, m_j)\}_{j \in J}$ и $\{(\ell'_j, m'_j)\}_{j \in J}$), где

ℓ_j, ℓ'_j - однородные линейные подпространства

в V , а $m_j, m'_j \in \mathbb{N}$, называются изометри-

чными, если существует такое преобразование

$\gamma \in U(V)$, что

$$\gamma(\ell_j) = \ell'_j \quad \forall j \in J \quad (*)$$

(соответственно, вытекают $(*)$ и

$$m_j = m'_j \quad \forall j \in J)$$

Предложение (унитарные инварианты
системы прямых в V)

Пусть e_j - вектор единичной длины
из прямой l_j .

(1) Для любых последовательности
 $j_1, \dots, j_s \in J$ число

$$h_{j_1 \dots j_s} := \langle e_{j_1} | e_{j_2} \rangle \langle e_{j_2} | e_{j_3} \rangle \dots \langle e_{j_{s-1}} | e_{j_s} \rangle \langle e_{j_s} | e_{j_1} \rangle$$

не зависит от выбора e_j .

(2) С точностью до изометрии система
прямых $\{l_j\}_{j \in J}$ однозначно определяется
совокупностью всех чисел $h_{j_1 \dots j_s}$.

* * *

Отсюда получаются числовые инварианты
систем прямых с кратностями

$$\{(l_j, m_j)\}_{j \in J} \tag{*}$$

А именно:

Определение. Числа

$$c_{j_1 \dots j_s} = h_{j_1 \dots j_s} \prod_{t=1}^s (1 - e^{2\pi i / m_{j_t}})$$

называются циклическими произведениями
системы (*).

Следствие. С помощью изометрии

система параметров с кратностями $\{(p_j, m_j)\}$

однозначно определяется совокупностью
своих циклических произведений

1.1.

Комментарии

(1) $h_j = 1$ и $c_j = 1 - e^{2\pi i / m_j}$, так как m_j

находится по c_j . Поэтому $h_{j_1 \dots j_s}$ находится

по совокупности всех циклических произведений,
а значит, находится h_j .

(2) Источником формулы для циклического умножения является использование формулы для отражений из сф. 12:

$$R_{e,\theta}(v) = v - \underbrace{(1-\theta)\langle v|e\rangle e}$$

* * *

Задача. $c_{j_1 \dots j_s}$ зависит только от цикла

$\sigma = (j_1, \dots, j_s)$. В частности,

$$c_{j_1 j_2} = c_{j_2 j_1}$$

Поэтому используется обозначение

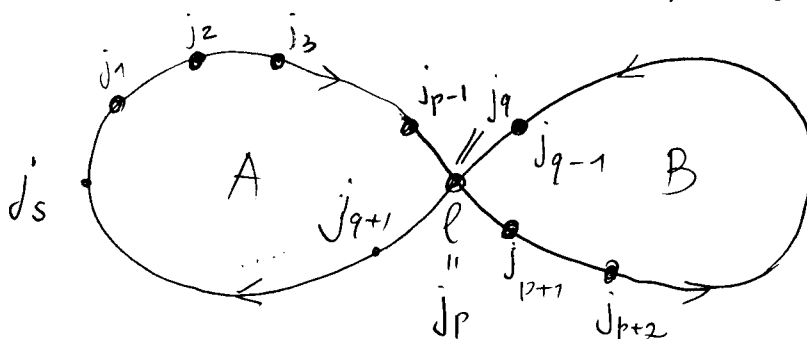
$$c_\sigma = c_{j_1 \dots j_s}$$

* * *

Задача (сведение к простым циклам):

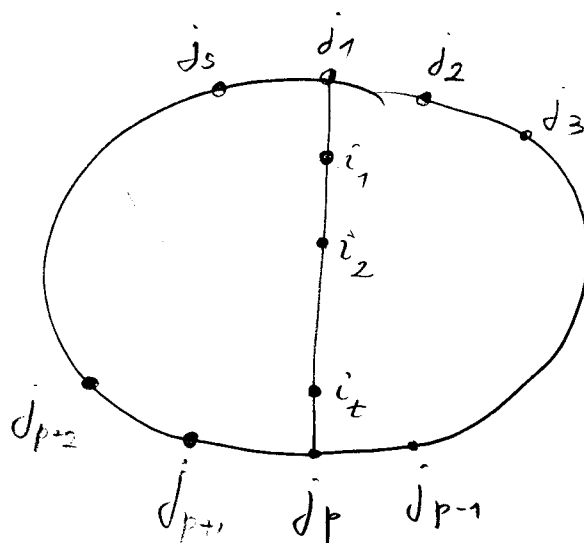
$$c_{\text{A} \cup \text{B}} = c_{\text{A}} \cdot c_{\text{B}}, \text{ т.е.}$$

$$\begin{aligned} c_{j_1 j_2 \dots j_{p-1} \ell j_{p+1} \dots j_{q-1} \ell j_{q+1} \dots j_s} &= \\ &= c_{j_1 \dots j_{p-1} \ell j_{q+1} \dots j_s} \cdot c_{\ell j_{p+1} \dots j_{q-1}} \end{aligned}$$



* * *

Задача (сведение к коммутационно независимым циклам.)



$$C_{\text{cycle}} \cdot C_{\text{cycle}} =$$

$$= C_{\text{cycle}} \cdot C_{i_1 j_1} \cdot C_{i_1 i_2} \cdot C_{i_2 i_3} \cdots C_{i_t j_p}$$

*

*

*

на плоскости

Граф, задающий $\{(l_j, m_j)\}_{j \in J}$

① Вершины находятся в биективном
соответствии с множеством крючковых $\{l_j\}_{j \in J}$:

Вершина, соответствующая l_j , изображается
кружком, который помечается индексом j ,
а внутри кружка пишется кратное m_j :



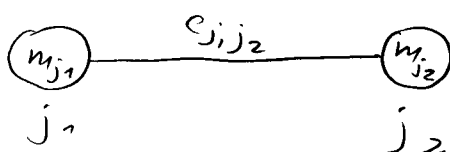
Если $m_j = 2$, то внутри кружка ничего не пишется:



② Вершины, соответствующие l_{j_1} и l_{j_2} ,
соединяются ребром, если (и только если)

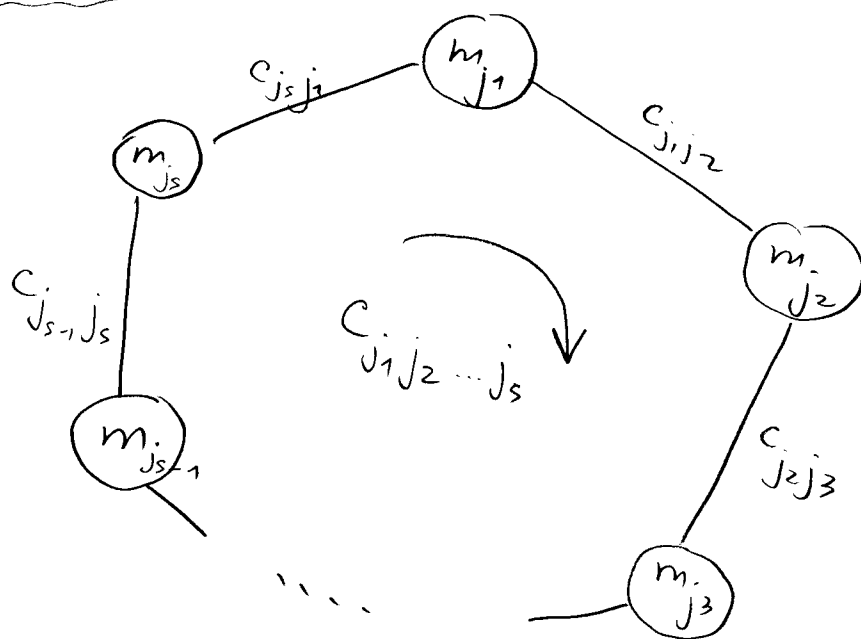
$c_{j_1 j_2} \neq 0$ и на этом ребре пишется

$$c_{j_1 j_2} = c_{j_2 j_1}$$



Если $c_{j_1 j_2} = 1$, то на ребре ничего не пишется

③ Если в ориентированном графе имеются простые циклы с вершинами $j_1, j_2, \dots, j_s$, то внутри него, указав ^{стрелкой} направление отхода (скажем, по часовой стрелке) пишем цикл $C_{j_1 j_2 \dots j_s}$ (читается, по порядку в последовательности $j_1, j_2, \dots, j_s$ следует этому направлению отхода)



Из определения циклических графовидений и задач на стр. 57-58 следует, что достаточно писать $C_{j_1 j_2 \dots j_s}$ только для циклов, независимо простых циклов и то

61)

по конкретному такому способу
графу восстанавливается любое
уникальное представление, а потому
он однозначно с точностью до
изометрии определяет систему $\{(l_j, u_j)\}_{j \in J}$.

* * *

* Задача

Пусть $s_{j_1 j_2 \dots j_s}$ указано в том графе.
Как найти $s_{j_s j_{s-1} \dots j_1}$?

* * *

В дальнейшем графом группы G
называется описанный граф, задающий
с точностью до изометрии систему

$$(l_1, u_1), \dots, (l_d, u_d),$$

связанно с системой образующих
выражений группы G .

* * *

Пример: группа $G(m, p, n)$

$$V = \mathbb{C}^n,$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{j=1}^n a_j \bar{b}_j,$$

$$\varepsilon_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{j-я координата}$$

Пусть $\theta \in \mathbb{C}, \theta \neq 0$

Задача

Пусть $s \neq t$ и $\varphi_{s,t} \in GL(V)$ заданы условиями

$$\varphi_{s,t}(\varepsilon_l) = \begin{cases} \varepsilon_l & \text{если } l \neq s, t, \\ \theta \varepsilon_t & \text{если } l = s, \\ \theta^{-1} \varepsilon_s & \text{если } l = t. \end{cases}$$

Тогда $\text{ord}(\varphi_{s,t}) = 2$; $\dim(V^{\varphi_{s,t}}) = n-1$

" $\varphi_{s,t}$ унитарен $\Leftrightarrow |\theta| = 1$.

* * *

Пусть далее $|\theta| = 1$, т.е. $\varphi_{s,t} \in U(V)$.

Тогда $\varphi_{s,t}$ — отражение.

63)

Когда группа H , порождённая всеми $\varphi_{s,t}$ конечна?

Т.к. матрицы $\varphi_{st} \varphi_{ts}$ в базисе $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ равны

$$\text{diag}(1, \dots, 1, \underset{\textcircled{S}}{\uparrow} \theta^2, 1, \dots, 1, \underset{\textcircled{+}}{\uparrow} \theta^{-2}, 1, \dots, 1),$$

то для конечности H необходимо, чтобы θ было корнем из 1.

Считаем далее, что

$$\theta = e^{2\pi i/m}, \quad m \in \mathbb{N}, m \geq 2 \quad (*)$$

Задача

Условие $(*)$ и достаточно для конечности H .
Более того, если $(*)$ выполняется, то H
состоит в точности из всех линейных
преобразований $V \rightarrow V$, для которых

$$\begin{cases} \varepsilon_j \rightarrow \theta^{d_j} \varepsilon_{\sigma(j)} \quad \forall j, \\ d_1 + \dots + d_n \equiv 0 \pmod{m}, \end{cases}$$

где σ - перестановка номеров $1, \dots, n$.

64)

Комплексная конечно-групповая отражение
и симметрия
 $G(m, m, n)$.

Задано

$G(m, m, n)$ неупорядоченная

Задано

$G(m, m, n)$ указывается следующим и
отражениями:

$$R_1: \varepsilon_1 \rightarrow \theta \varepsilon_2, \varepsilon_2 \rightarrow \theta^{-1} \varepsilon_1, \varepsilon_j \rightarrow \varepsilon_j \quad \forall j \neq 1, 2,$$

$$R_{j+1}: \varepsilon_j \rightarrow \varepsilon_{j+1}, \varepsilon_{j+1} \rightarrow \varepsilon_j, \varepsilon_l \rightarrow \varepsilon_l \quad \forall l \neq j, j+1$$

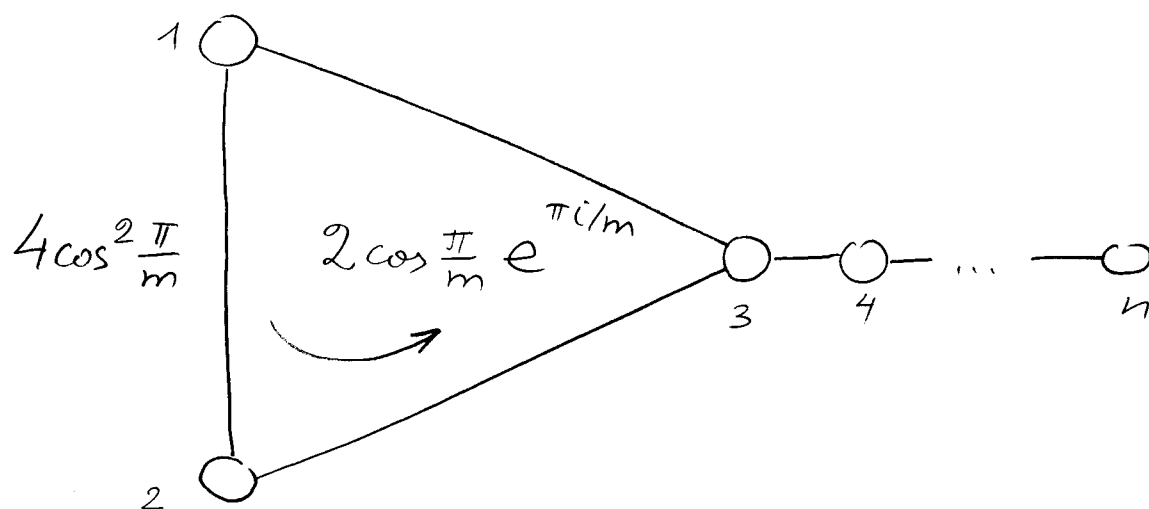
$j=1, \dots, n-1$

Построим граф группы $G(m, m, n)$,
определяемый системой отражений
отражений $R_1, \dots, R_n$.

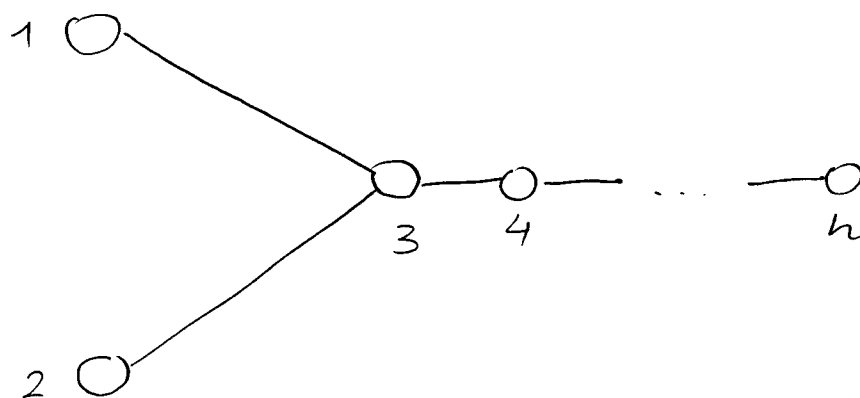
Имеем: $R_1 = R_{e_1, -1}, \quad e_1 = (\theta^{-1} \varepsilon_1 - \varepsilon_2) / \sqrt{2}$

$$R_{j+1} = R_{e_{j+1}, -1}, \quad e_{j+1} = (\varepsilon_j - \varepsilon_{j+1}) / \sqrt{2}$$

$$G(m, m, n), \quad m \geq 3 :$$



$$G(2, 2, n) = D_n :$$



Теперь рассмотрим какой-либо корень из единицы $\alpha \in \mathbb{C}$ (случай $\alpha = 1$ не исключается) и линейное отображение

$$R_{n+1} : V \rightarrow V,$$

$$\varepsilon_j \rightarrow \varepsilon_j \quad \forall j \neq n,$$

$$\varepsilon_n \rightarrow \alpha \varepsilon_n$$

Если $\alpha \neq 1$, то R_{n+1} — отражение.

Лемма. Группа, порождённая отображениями
 $R_1, \dots, R_n, R_{n+1}$ конечна тогда и только
тогда, когда

$$\begin{cases} m = pq, & p, q \in \mathbb{N}, \\ \alpha^q = 1 \end{cases}$$

Если она конечна, то состоит в точности
из всех линейных отображений $V \rightarrow V$, для
которых

$$\varepsilon_j \rightarrow \theta^{d_j} \varepsilon_{\sigma(j)},$$

$$d_1 + \dots + d_n \equiv 0 \pmod{p},$$

где σ — перестановка множества $1, \dots, n$.

Полученная конечная группа
образована элементами
 $G(m, p, n)$

Замечание

При $p=1$ можно исключить R_1 из системы
образующих, т.е. $G(m, 1, n)$ порождается n
образующими $R_2, R_3, \dots, R_{n+1}$.

..... * * *

Построим граф группы $G(m, p, n)$,
определенный системой образующих
 $R_1, R_2, \dots, R_{n+1}$

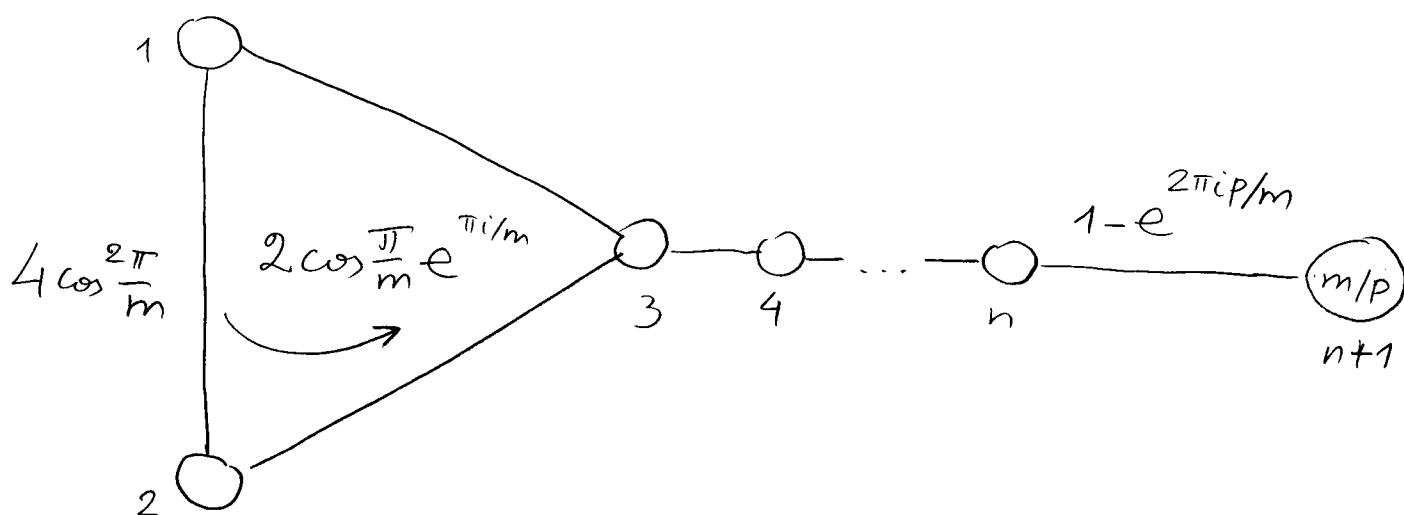
Он получается из графа $G(m, m, n)$
 присоединением еще одного вершины,
 соответствующей R_{n+1} , и соответствующим
 ребр. Введем

$$R_{n+1} = R_{e_{n+1}}, \theta^p, \text{ где } e_{n+1} = e_n, \theta^p = e^{2\pi i p/m}$$

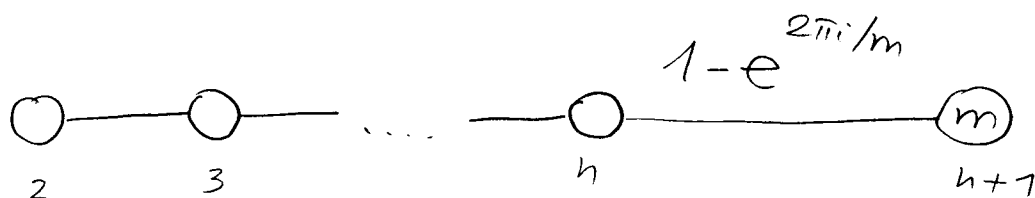
68)

граф циклический $G(m, p, n)$ относительно
системы образующих $R_1, R_2, \dots, R_n, R_{n+1}$
имеет вид:

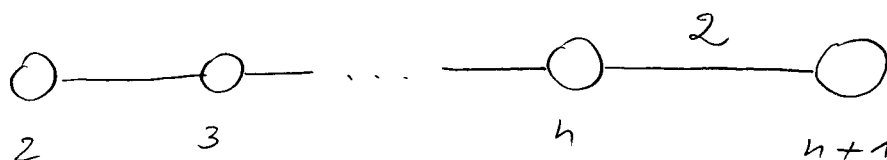
$G(m, p, n)$, $n \geq 3$, $p \neq 1, m$:



$G(m, 1, n)$:



При $m=2$ получаем $G(2, 1, n) = B_n = C_n$:



* * *

В терминах графов требуется классификация всех невырожденных конечных комплексных групп. Оказывается, таков:

Термины классификации

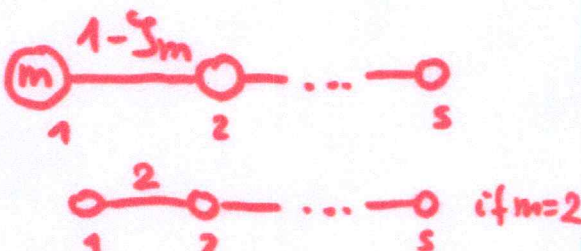
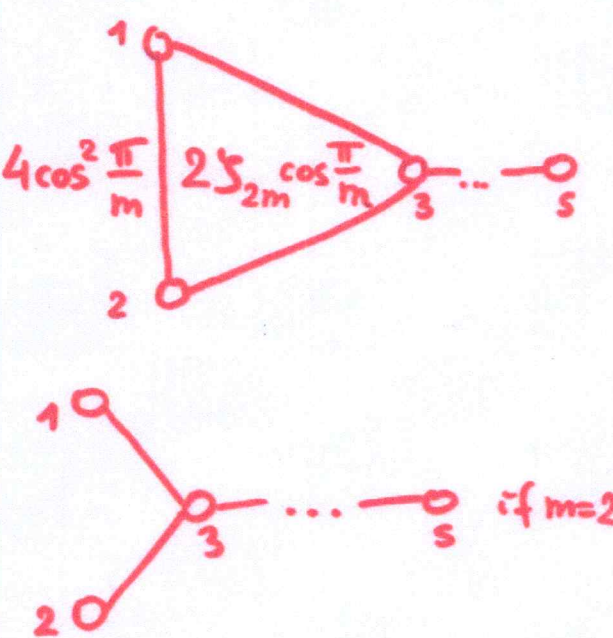
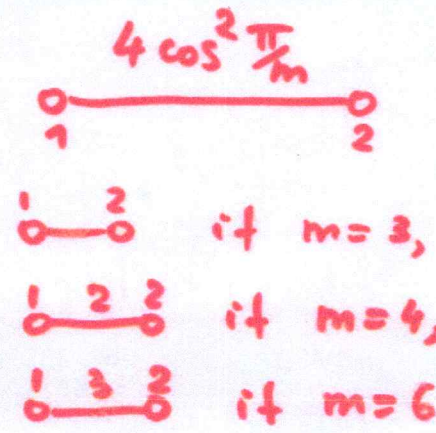
($k = \mathbb{C}$, G невырожденная и конечная)

Графы, задающие систему изоморфизмических образений всех (с точностью до автоморфизма) конечных невырожденных комплексных групп образений, — это в точности графы из следующей таблицы (в графах указаны ориентированные ребра и соответствующие стрелки):

Графы конечных неприводимых
комплексных групп отражений

$$\zeta_d = e^{2\pi i/d}, \omega = e^{2\pi i/3},$$

$$\eta = e^{2\pi i/5}, \epsilon = e^{2\pi i/8}.$$

№	Обозначение	Граф	Кольцо, порождённое над $\mathbb{Z}$ циклическими произведениями	$\dim V$
1	A_s $s \geq 1$		$\mathbb{Z}$	s
2	$G(m, 1, s)$ $m \geq 2, s \geq 2$ type $B_s = C_s$ if $m=2$		$\mathbb{Z}[e^{2\pi i/m}]$ $\mathbb{Z}[\omega]$ if $m=3, 6$, $\mathbb{Z}[i]$ if $m=4$, $\mathbb{Z}$ if $m=2$	s
2	$G(m, m, s)$ $m \geq 2, s \geq 3$, type D_s if $m=2$		$\mathbb{Z}[e^{2\pi i/m}]$, $\mathbb{Z}[\omega]$ if $m=3, 6$, $\mathbb{Z}[i]$ if $m=4$ $\mathbb{Z}$ if $m=2$	s
2	$G(m, m, 2) =$ $I_2(m)$, $m \geq 3$, A_2 if $m=3$, B_2 if $m=4$, G_2 if $m=6$		$\mathbb{Z}[4 \cos^2 \frac{\pi}{m}]$, $\mathbb{Z}$ if $m=3, 4, 6$	2

№	Обозначение (обозначение)	Граф	Кольцо, порождённое над $\mathbb{Z}$ циклическими произведениями	$\dim V$
2	$G(m, p, s-1)$ $m \geq 2,$ $s \geq 4$ $p m$ $p \neq 1, m$		$\mathbb{Z}[e^{2\pi i/m}],$ $\mathbb{Z}[i]$ if $m=4,$ $p=2$ $\mathbb{Z}[\omega]$ if $m=6$ $p=2$ and $m=6, p=3$	$s-1$
2	$G(m, p, 2)$ $m \geq 2$ $p m$ $p \neq 1, m$		$\mathbb{Z}[z_m, 2 \cos \frac{\pi}{m},$ $z_m(1 - z_m^p)],$ $\mathbb{Z}[2i]$ if $m=4,$ $p=2$ $\mathbb{Z}[\omega]$ if $m=6,$ $p=2$ $\mathbb{Z}[2\omega]$ if $m=6,$ $p=3$	2
3	$[]^m$		$\mathbb{Z}[e^{2\pi i/m}]$ $\mathbb{Z}[\omega]$ if $m=6, 3$ $\mathbb{Z}[i]$ if $m=4$ $\mathbb{Z}$ if $m=2$	1
4	$3[3]3$		$\mathbb{Z}[\omega]$	2

№	Обозначение	Граф	Кольцо, порождённое на $\mathbb{Z}$ циклическими произведениями $\dim V$
5	$3[4]3$		$\mathbb{Z}[w]$ 2
6	$3[6]2$		$\mathbb{Z}[e^{2\pi i/12}]$ 2
7	$\langle 3, 3, 2 \rangle_6$		$\mathbb{Z}[e^{2\pi i/12}]$ 2
8	$4[3]4$		$\mathbb{Z}[i]$ 2
9	$4[6]2$		$\mathbb{Z}[\epsilon]$ 2
10	$4[4]3$		$\mathbb{Z}[e^{2\pi i/12}]$ 2
11	$\langle 4, 3, 2 \rangle_{12}$		$\mathbb{Z}[e^{2\pi i/24}]$ 2
12	$GL(2, 3)$		$\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ 2

№	Обозначение	Граф	Кольцо, порождённое над циклическими произведениями	$\dim V$
13	$\langle 4, 3, 2 \rangle_2$		$\mathbb{Z}[i, \sqrt{2}]$	2
14	$3[8]2$		$\mathbb{Z}[\omega, i\sqrt{2}]$	2
15	$\langle 4, 3, 2 \rangle_6$		$\mathbb{Z}[i, \omega, \sqrt{2}]$	2
16	$5[3]5$		$\mathbb{Z}[\eta]$	2
17	$5[6]2$		$\mathbb{Z}[e^{2\pi i/20}]$	2
18	$5[4]3$		$\mathbb{Z}[e^{2\pi i/15}]$	2
19	$\langle 5, 3, 2 \rangle_{30}$		$\mathbb{Z}[e^{2\pi i/60}]$	2
20	$3[5]3$		$\mathbb{Z}[\omega, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$	2

N^0	Обозначение	Граф	Кольцо, порождённое над $\mathbb{Z}$ циклическими произведениями	$\dim V$
21	$3[10]2$		$\mathbb{Z}[\omega, i\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$	2
22	$\langle 5, 3, 2 \rangle_2$		$\mathbb{Z}[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, i\frac{\sqrt{5}-1}{2}]$	2
23	H_3		$\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$	3
24	$J_3(4)$		$\mathbb{Z}[\frac{1+i\sqrt{7}}{2}]$	3
25	L_3		$\mathbb{Z}[\omega]$	3
26	M_3		$\mathbb{Z}[\omega]$	3
27	$J_3(5)$		$\mathbb{Z}[\omega, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$	3

№	Обозначение	Граф	Кольцо, порождённое над $\mathbb{Z}$ циклическими произведениями	$\dim V$
28	F_4		$\mathbb{Z}$	4
29	N_4		$\mathbb{Z}[i]$	4
30	H_4		$\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{5}}{2}]$	4
31	EN_4		$\mathbb{Z}[i]$	4
32	L_4		$\mathbb{Z}[\omega]$	4
33	$[21; 2]^3$		$\mathbb{Z}[\omega]$	5
34	$[21; 3]^3$		$\mathbb{Z}[\omega]$	6

№	Обозначение	Граф	Кольцо, порождённое на $\mathbb{Z}$ циклическими произведениями	$\dim V$
35	E_6		$\mathbb{Z}$	6
36	E_7		$\mathbb{Z}$	7
37	E_8		$\mathbb{Z}$	8

Далее через K_i обозначается
 конечная направляемая группа
 образений, граф которой относительно
 некоторой системы образований
 образений имеет номер i
 в приведенной таблице

Из этой классификации вытекают следующие

Теорема

При $k = \mathbb{C}$ всякая неприводимая конечная группа выражений K n -мерного линейного пространства V проходит либо n выражениями, либо $n+1$ выражениями, и существуют K не проходящие n выражениями.

Замечание. Это отличается от случая $k = \mathbb{R}$, в котором K всегда проходит n выражениями (см. ср. 43-44).

Замечание.

Из таблицы видно, что K является комплексификацией группы Вейля неприводимой системы корней $\Leftrightarrow$ кольцо $\mathbb{C}[1]$, порожденное над $\mathbb{Z}$ всеми циклическими произведениями, совпадает с $\mathbb{Z}$

Классификация чунг-образов:
случай $k = \mathbb{C}$, а G невырожденная и бесконечная

Она получена в 1980 г. (В.Л. Фоков)

Рассмотрим в V решетку

$$T := \{v \in V \mid \tau_v \in G\}$$

Ввиду $\text{Lin}(G)$ -инвариантности T , линейное
подпространство $\mathbb{C}T$ в V является $\text{Lin}(G)$ -инвариантным. Ввиду невырожденности $\text{Lin}(G)$, это

дает

$$\mathbb{C}T = \{0\} \text{ или } V.$$

Ключевой факт:

Лемма. $T \neq \{0\}$ (так как $\mathbb{C}T = V$).

Отсюда следует, что T "достаточно массивна",
ввиду общего утверждения:

Предложение

Пусть $k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и K — невырожденная
подгруппа в $GL(V)$. Если L — нетривиальная

K -инвариантная решетка в V , то

(i) $\text{rk}(L) = n$ или $k = \mathbb{R}$;

(ii) $\text{rk}(L) = n$ или $2n$ или $k = \mathbb{C}$

Доказательство

Буду невырожденной, $kL = V$. То доказывается (i)

Пусть $k = \mathbb{C}$. Тогда

$$\begin{aligned}
 2n &= \dim_{\mathbb{R}}(V) \\
 &= \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}L) \\
 &= \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}L + i\mathbb{R}L) \\
 &= \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}L)}_{\text{"rk } L} + \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(i\mathbb{R}L)}_{\text{"rk } L} - \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}L \cap i\mathbb{R}L) \quad (*) \\
 &= 2\text{rk}(L) - \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}L \cap i\mathbb{R}L)
 \end{aligned}$$

Т.к. $\mathbb{R}L \cap i\mathbb{R}L$ является K -инвариантным линейным подпространством в векорном пространстве V над $k = \mathbb{C}$, то невырожденность K даёт

$$\text{либо } (\mathbb{R}L \cap i\mathbb{R}L) = 0, \text{ и тогда } \text{rk}(L) = n$$

блуду (*),

$$\text{либо } (\mathbb{R}L \cap i\mathbb{R}L) = V, \text{ и тогда } \text{rk}(L) = 2n$$

блуду (*).

* * *

Следствие. $\text{rk}(T) = n$ или $2n$.

* * *

80)

Следствие. Группа $\text{Lin}(G)$ конечна.

Доказательство.

Поскольку $V_{\mathbb{R}} \cong V$, рассматриваемое как
вещное пространство над $\mathbb{R}$.

$V_{\mathbb{R}}$ евклидово пространство $\mathbb{R} \langle 1 \rangle$.

$\text{Lin}(G)$ лежит в компактной группе $O(V_{\mathbb{R}})$. (*)

В $V_{\mathbb{R}}$ есть $\text{Lin}(G)$ -инвариантная
решётка L ранга $2n$:

$$L = \begin{cases} T, & \text{если } \text{rk}(T) = 2n, \\ T + iT, & \text{если } \text{rk}(T) = n \end{cases}$$

Базис L является и базисом $V_{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}$
и в нем, ввиду $\text{Lin}(G)$ -инвариантности L ,
матрицы э-тов из $\text{Lin}(G)$ целые.

Значит,

$\text{Lin}(G)$ — дискретное подмножество в $GL(V_{\mathbb{R}})$ (**)

Из (*) и (**) следует конечность $\text{Lin}(G)$.

* * *

81)

Мы имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow T \rightarrow G \rightarrow \text{Lin } G \rightarrow 1$$

$$G \cap \text{Tran}(E) \quad \parallel \leftarrow \text{это действие } v \in T \text{ с } \tau_v$$

Значит,

$$E/G = (E/T) / (\text{Lin } G)$$

↑
конечная
группа

Изотопия

$$E/G \text{ компактно} \Leftrightarrow \text{rk } T = 2n.$$

Пример $n=1$ (ср. 23-26) показывает,
 что (в отличие от случая $k = \mathbb{R}$)
 E/G может быть как компактным
 (тогда G называется кристаллографической
группой), так и некомпактным (тогда G
 называется некристаллографической
группой). Это дает классификацию
 на два случая: кристаллографические
 и некристаллографические группы.

Классификация некристаллографических неприводимых комплексных бесконеч- ных групп отражений

Вот простой способ найти такие G .

Существование

Пусть $v_1, \dots, v_n$ — базис в V , то
 $\langle v_i | v_j \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall i, j$

Вещное n -мерное линейное u -во

$$L = \mathbb{R}v_1 + \dots + \mathbb{R}v_n$$

с заданным u -ведением $\langle \cdot | \cdot \rangle \Big|_{L \times L}$ называется
вещное u -во V , а V —

комплексификация u -ва L

Множество

$$S = a + L, \quad \text{где } a \in E$$

является вещным аффинным u -вом

с u -вом параллельным u -во L .

S называется вещным u -вом

u в E , а E — его комплексификация.

Задана

Любой $\gamma \in GL(L)$ (соответственно, $\gamma \in \text{Aff}(S)$)

однозначно продолжается до элемента

из $GL(V)$ (соответственно, из $\text{Aff}(E)$),

обозначаемого $\gamma_{\mathbb{C}}$ и называемого

комплексификацией γ . При этом

γ -изометрия $\Leftrightarrow \gamma_{\mathbb{C}}$ -изометрия.

* * *

Комментарий

Если $\gamma \in GL(L)$, то γ и $\gamma_{\mathbb{C}}$ одинаковые
матрицы в базисе $v_1, \dots, v_n$.

Если $\gamma = (P, t) \in \text{Aff}(V) = GL(V) \ltimes V$, то

$\gamma_{\mathbb{C}} = (P_{\mathbb{C}}, t)$.

* * *

Задача

Если H — неуниверсальная конечная (соответственно, бесконечная) группа выражений в L (соответственно, в S), то

$$H_{\mathbb{C}} := \{ \gamma_{\mathbb{C}} \mid \gamma \in H \}$$

— неуниверсальная конечная (соответственно, бесконечная) группа выражений в V (соответственно, E).

$H_{\mathbb{C}}$ называется компактификацией H

* * *

Если в той задаче H бесконечна, то из теории универсальных групп мы знаем, что

$$H = \underbrace{\text{Lin}(H)}_{\text{конечная группа}} \rtimes \underbrace{T}_{\text{решётка ранга } n}$$

Значит,

$$H_{\mathbb{C}} = \underbrace{\text{Lin}(H)_{\mathbb{C}}}_{\text{конечная группа}} \rtimes \underbrace{T_{\mathbb{C}}}_{\text{решётка ранга } n}$$

$$\text{Значит, } E/H_{\mathbb{C}} = \underbrace{(E/T_{\mathbb{C}})}_{\text{некомпактно, т.е. } \dim(T_{\mathbb{C}}) = n, \text{ а не } 2n} / \underbrace{(\text{Lin}(H)_{\mathbb{C}})}_{\text{конечная}} \text{ некомпактно.}$$

Т.е. $H_{\mathbb{C}}$ — некриволинейная группа

Говорится, это — общая классификация:

Теорема

(Классификация невырожденных комплексных некристаллографических групп выражений)

Пусть $k = \mathbb{C}$ и G — невырожденная комплексная группа выражений. Следующие свойства эквивалентны:

(1) G некристаллографическая,

(2) G является комплексификацией

бесконечной невырожденной вещественной

группы выражений, т.е. аффинная

группа Вейля невырожденной

системы корней.

Классификация кристаллографических неуководимых конечномерных бесконечных групп

Ингредиенты классификации:

Пусть G — такая группа. Тогда:

• $L_n(G)$ — конечная неуководимая группа в $U(V)$, т.е. одна из
групп полученных выше (ср. 69-76) классификации

• T — решётка в V ранга $2n$, инвариантная относительно $L_n(G)$.

• G — расширение T с помощью $L_n(G)$:

$$0 \rightarrow T \rightarrow G \rightarrow L_n(G) \rightarrow 1$$

Т.о., классификация сводится к
получению всех не содержащих
вещей:

① Какие конечные неприводимые
циклы образуют $K \subset U(V)$ и есть
в $Li_4(G)$ для кристаллографической
группы образов Γ $Is_0(E)$?

② Для каждого K из ① описаны все
 K -инвариантные решетки T в V ранга $2n$,
для которых $\{\tau_t \mid t \in T\} = G \cap Tra_n(E)$
для кристаллографической группы образов
 G в $Is_0(E)$.

③ Для каждого K из ① и T из ②
описаны все кристаллографические группы
образов G , для которых

$$Li_4(G) = K,$$

$$\{\tau_t \mid t \in T\} = G \cap Tra_n(E).$$

Ответ/решения даны ниже.

* * *

Ответ на вопрос (1): классификация
групп $\text{Lin}(G)$ для невырожденных кристал-
лографических комплексных групп отражений G

Теорема

Следующие свойства невырожденного
комплексного конечногруппового отражения
 $K \subset \text{Lin}(V)$ эквивалентны:

(a) в V существует ненулевая K -инвариан-
тная решетка.

(b) в V существует K -инвариантная
решетка ранга $2n$.

(c) $K = \text{Lin}(G)$ для кристаллографической
группы отражений $G \in \text{Iso}(E)$.

(d) $\text{Колл} K < 1$, порождённое над $\mathbb{Z}$
всеми циклическими произведениями

края группы K , заданного какой-либо

система сфайричных отображений
группы K , лежа в кольце целых
чисел минимального квадратного рас-
ширения поля $\mathbb{Q}$ (т.е. $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, $d \in \mathbb{Z}_{>0}$)

(*) K определяется над таким полем

(т.е. в некоторой базе матрицы элементов
 у K лежат в $\text{Mat}_n(\mathbb{Q}(\sqrt{-d}))$, $d \in \mathbb{Z}_{>0}$)

(†) K эквивалентна K_i (см. фр. 76), где i —
один из следующих номеров:

1, 2 ($m=2,3,4,6$), 3 ($m=2,3,4,6$),
 4, 5, 8, 12, 24, 25, 26, 28, 29, 31,
 32, 33, 34, 35, 36, 37.

* * *

Эти группы — это комплексные алгебры групп
Вейля невырожденных систем корней (т.к. эти группы
 Вейля — это в точности все вещественные невырожденные
 конечные кристаллографические группы отражений).

* * *

Всё графы этих групп:

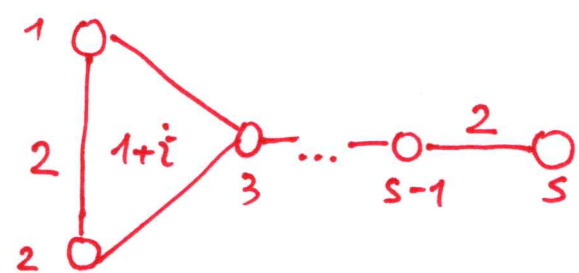
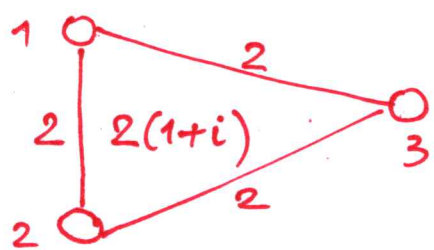
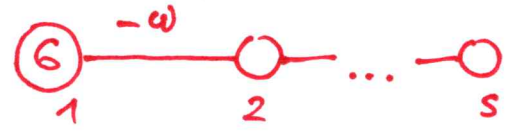
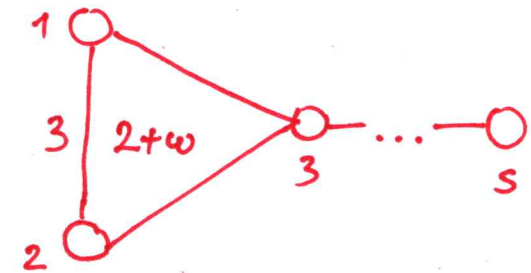
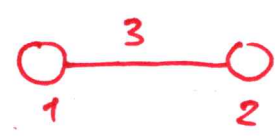
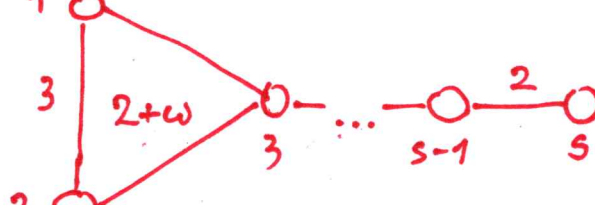
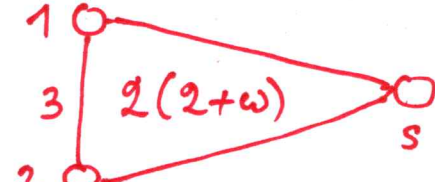
Графы конечных неприводимых
комплексных кристаллографических

групп отражений

Циклы
ориентированы
против часовой стрелки

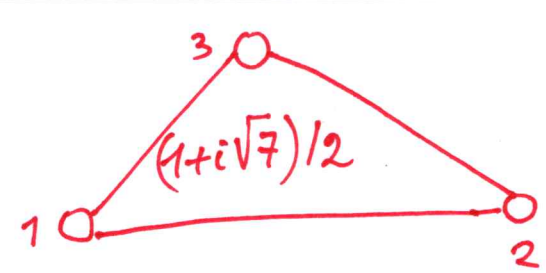
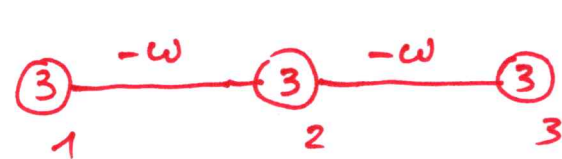
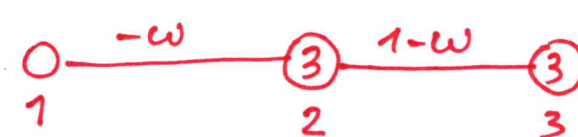
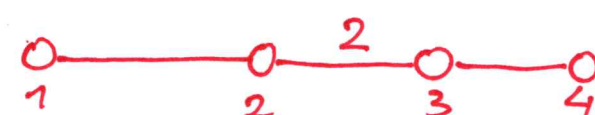
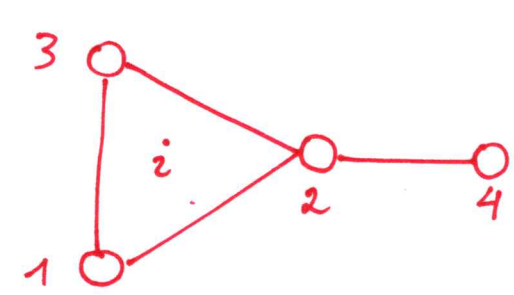
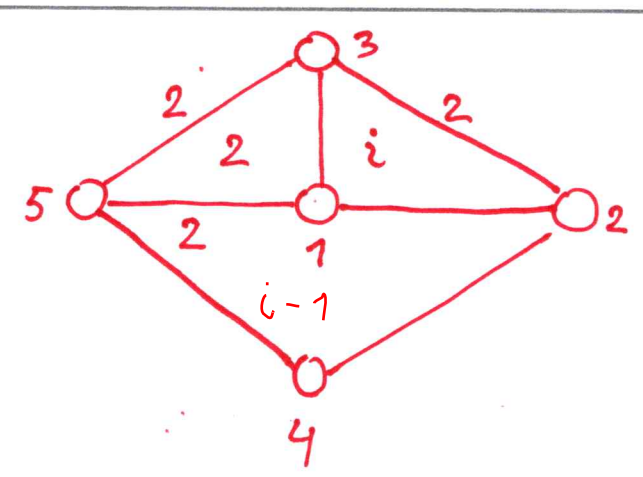
$$\omega = e^{2\pi i/3}$$

N_0	Обозначение	Граф	Кольцо, порождённое над $\mathbb{Z}$ циклическими и произведениями	$\dim(V)$
1	A_s $s \geq 1$		$\mathbb{Z}$	s
2	$B_s = C_s$ $s \geq 2$		$\mathbb{Z}$	s
2	D_s $s \geq 3$		$\mathbb{Z}$	s
2	$G(3, 1, s)$ $s \geq 2$		$\mathbb{Z}[\omega]$	s
2	$G(3, 3, s)$ $s \geq 3$		$\mathbb{Z}[\omega]$	s
2	$G(4, 1, s)$ $s \geq 2$		$\mathbb{Z}[i]$	s
2	$G(4, 4, s)$ $s \geq 3$		$\mathbb{Z}[i]$	s
2	$G(4, 4, 2)$ $= B_2 = C_2$		$\mathbb{Z}$	2

№	Обозначение	Граф	Кольцо, порождённое над $\mathbb{Z}$ циклически- ми произведениями	$\dim(V)$
2	$G(4, 2, s-1)$ $s \geq 4$		$\mathbb{Z}[i]$	$s-1$
2	$G(4, 2, 2)$		$\mathbb{Z}[2i]$	2
2	$G(6, 1, s)$ $s \geq 2$		$\mathbb{Z}[\omega]$	s
2	$G(6, 6, s)$ $s \geq 3$		$\mathbb{Z}[\omega]$	s
2	$G(6, 6, 2)$ $= G_2$		$\mathbb{Z}$	2
2	$G(6, 3, s-1)$ $s \geq 4$		$\mathbb{Z}[\omega]$	$s-1$
2	$G(6, 3, 2)$		$\mathbb{Z}[2\omega]$	2

92)

N^0	Обозначение	Граф	Кольцо, порожденное над $\mathbb{Z}$ циклическими произведениями	$\dim V$
2	$G(6, 2, s-1)$ $s \geq 4$		$\mathbb{Z}[\omega]$	$s-1$
2	$G(6, 2, 2)$		$\mathbb{Z}[\omega]$	2
3	$[]^3$		$\mathbb{Z}[\omega]$	1
3	$[]^4$		$\mathbb{Z}[i]$	1
3	$[]^6$		$\mathbb{Z}[\omega]$	1
4	$3[3]3$		$\mathbb{Z}[\omega]$	2
5	$3[4]3$		$\mathbb{Z}[\omega]$	2
8	$4[3]4$		$\mathbb{Z}[i]$	2
12	$GL(2, 3)$		$\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$	2

№	Обозначение	Граф	Кольцо, порождённое над $\mathbb{Z}$ циклически-ми произведениями	$\dim(V)$
24	$J_3(4)$		$\mathbb{Z}[(1+i\sqrt{7})/2]$	2
25	L_3		$\mathbb{Z}[\omega]$	3
26	M_3		$\mathbb{Z}[\omega]$	3
28	F_4		$\mathbb{Z}$	4
29	N_4		$\mathbb{Z}[i]$	4
31	EN_4		$\mathbb{Z}[i]$	4

№	Обозначение	Граф	Кольцо, порожденное над $\mathbb{Z}$ циклическими произведениями	$\dim(V)$
32	L_4		$\mathbb{Z}[\omega]$	4
33	$[21; 2]^3$		$\mathbb{Z}[\omega]$	5
34	$[21; 3]^3$		$\mathbb{Z}[\omega]$	6
35	E_6		$\mathbb{Z}$	6
36	E_7		$\mathbb{Z}$	7
37	E_8		$\mathbb{Z}$	8

Внутренний смысл кольца из $n(d)$
представляет теорема

Теорема

Пусть K — невырожденная комплексная
 группа отображений в $\mathbb{C}$ -ве V .

① Кольцо с 1, порождённое над $\mathbb{Z}$
 всеми циклическими представлениями
 графа группы K , определяемого какой-либо
 системой образующих отображений, не
 зависит от выбора этой системы и
 совпадает с кольцом с единицей
 $\mathbb{Z}[T_2(K)]$, порождённым над $\mathbb{Z}$ следами
 всех элементов $\gamma \in K$.

② $\mathbb{Z}[T_1(K)]$ является минимальным
 кольцом определения группы K (т.е.
 $\mathbb{Z}[T_2(K)]$ — это кольцо определения,
 лежащее в ядре группы кольца определения
 группы K)

③ Равенство $\mathbb{Z}[T_2(K)] = \mathbb{Z}$ эквива-
лентно тому, что K является комплексиро-
ванной группой Вейля невырожденной
системы корней, т.е. вещественной
невырожденной конечной группы
образованной одним из типов

$$A_n, B_n = C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$$

* * *

Известный вид кольца $\mathbb{Z}[T_2(K)]$
указан в таблице на стр. 70-76.

* * *

Ответ на вопрос (2): нахождение всех
 K -инвариантных решёток T в V ранга $2n$,
где $K \subset U(V)$ - конечная невырожденная
группа отражений.

План:

(1) Будут определяться так называемые
корневые решётки и устанавливается как
найти все T , если известны корневые T .

(2) Будет описано как найти все
корневые T .

(3) Будет указан итоговый результат
(список всех T).

* * *

Корневые решётки ($k = \mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$)

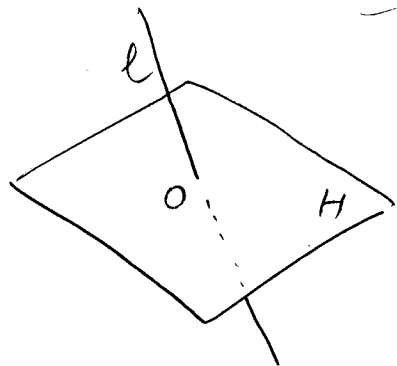
K - конечная невырожденная группа отражений
в V .

Зафиксируем систему ортогональных отражений
невырожденной конечной группы отражений $K \subset GL(V)$.

$R_1, \dots, R_d$, где $R_j = R_{e_j, \theta_j}$ и

$d = n$ при $k = \mathbb{R}$ и $d = n$ или $n+1$ при $k = \mathbb{C}$ (см стр. 77)

Напомним (ср. 10), что одномерное
векторное подпространство ℓ в V называется
лассе корней прямой ^{для K} если $\ell \perp H$,
где H — зеркало какого-либо отражения у K .



Линия $\mathcal{L}$ — совокупность всех
корневых прямых у группы K .

$$\ell_j = \mathbb{C} e_j \in \mathcal{L}, \quad j=1, \dots, d$$

Для любой (не обязательно K -инвариант-
 ной!) решётки Γ в V обозначим

$$\Gamma_\ell := \ell \cap \Gamma, \quad \ell \in \mathcal{L}$$

$$\Gamma_j := \Gamma_{\ell_j}$$

и положим

$$\Gamma^0 = \sum_{\ell \in \mathcal{L}} \Gamma_\ell$$

Γ^0 — содержащаяся в Γ решётка.

Предложение ($k = \mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$)

Пусть Γ — ненулевая K -инвариантная решётка в V (так что $\text{rk}(\Gamma) = n$ или $2n$, при $k = \mathbb{C}$, и $\text{rk}(\Gamma) = n$ при $k = \mathbb{R}$). Тогда:

- (a) Γ^0 является K -инвариантной решёткой.
- (b) $\text{rk}(\Gamma^0) = \text{rk}(\Gamma)$.
- (c) Если $\text{rk}(\Gamma) = 2n$, то $\text{rk}(\Gamma_\ell) = 2 \ \forall \ell \in \mathbb{Z}$.
- (d) Если $\text{rk}(\Gamma) = n$, то $\text{rk}(\Gamma_\ell) = 1 \ \forall \ell \in \mathbb{Z}$.
- (e) $\Gamma^0 = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_d$.

* * *

Будем доказывать.

Если $\Gamma = \Gamma^0$, то решётка Γ называется корневой.

Γ^0 называется ассоциированной с Γ корневой решёткой.

* * *

Роль корневых решёток объясняет следующее

Теорема

Следующие свойства эквивалентны:

(1) Полученное выражение K и Γ порождено выражением аффинного ч.-в. V .

(2) Решётка Γ является корневым

* * *

Из этой теоремы и задан на стр. 49 получается
Следствие.

Если K порождена $n = \dim_k V$ выражением,
то бесконечные группы выражений $G \in \text{Lin}(K) =$
то в точности всевозможные получаемые
выражения $K \rtimes \Gamma$, где Γ — корневая решётка

* * *

Как получить классификацию всех
 K -инвариантных решёток в V и класси-
фикацию корневых типов решёток ($k = \mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$)

Пусть Γ — K -инвариантная решётка в V .

Положим:

$$\Gamma^* := \{v \in V \mid (\text{Id}_V - \gamma)(v) \in \Gamma \ \forall \gamma \in K\}$$

Эквивалентное определение Γ^* таково:

Тогда

$$\pi: V \rightarrow V/\Gamma,$$

$$v \mapsto v + \Gamma$$

— канонический гомоморфизм

Так Γ инвариантна, а действие K на V спускается на V/Γ :

$$\gamma(v + \Gamma) := \gamma(v) + \Gamma$$

Тогда Γ^* описывается так:

$$\Gamma^* = \pi^{-1}((V/\Gamma)^K) \quad (*)$$

Предложения

(a) Γ^* является K -инвариантной решеткой в V .

(b) $rk(\Gamma^*) = rk(\Gamma)$.

* * *

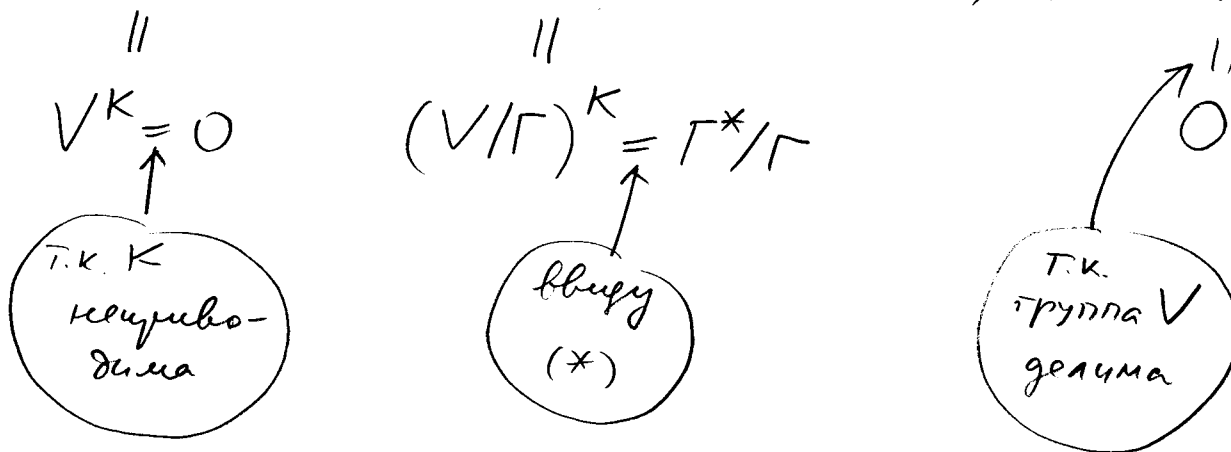
Котомологический смысл Γ^*

Точная последовательность групп

$$0 \rightarrow \Gamma \hookrightarrow V \rightarrow V/\Gamma \rightarrow 0$$

даёт точную последовательность

$$H^0(K, V) \rightarrow H^0(K, V/\Gamma) \rightarrow H^1(K, \Gamma) \rightarrow H^1(K, V)$$



Т.о.,

$$\Gamma^*/\Gamma = H^1(K, \Gamma)$$

* * *

Роль Γ^* в задаче классификации
 всех K -инвариантных решёток объясняет
 следующая теорема, сводящая эту задачу к
 задаче классификации K -инвариантных
 кривых решёток:

Теорема

Линия Λ — какая-либо K -инвариантная
корневая решётка.

K -инвариантные решётки, для которых Λ
является ассоциированной корневой — это
в точности все решётки Γ , обладающие
свойствами:

$$(i) \quad \Lambda \subseteq \Gamma \subseteq \Lambda^* ;$$

$$(ii) \quad \Gamma_j = \Lambda_j \quad \forall j=1, \dots, d.$$

* * *

Ввиду этой теоремы классификация
 K -инвариантных решёток в V сводится
к двум задачам:

(A) классифицировать все корневые
 K -инвариантные решётки;

(B) по ^{заданной} корневой K -инва-
риантной решётке Λ найти Λ^* .

Для заданной достаточной решетки для
тех случаев, когда K вырождена
 $n = \dim(V)$ о/хстислен

Действительно, при K вырождена
 $n+1$ о/хстислен

$$R_1, R_2, \dots, R_n, R_{n+1},$$

т.е., имеются радиусы на сг. 90-95, K - одна
из соседствующих точек K_i .

$$K_2 = G(m, p, n),$$

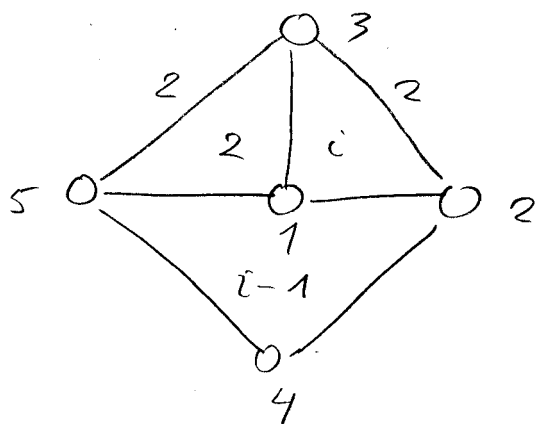
m	p
4	2
6	2
6	3

$$K_{12}, K_{24}, K_{31}$$

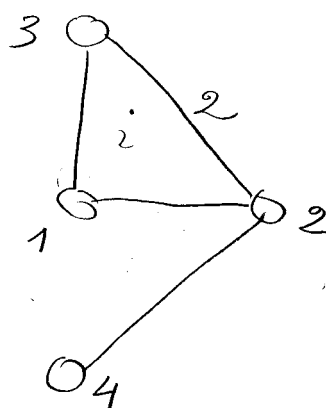
Пусть H - подгруппа в K - вырожденная
 $R_1, \dots, R_n$. Из каждой вершины H -
 тоже невырожденная коммутативная коммутативная
группа о/хстислен u в V : Ее граф получ-
ается из графа K возмущением. $(n+1)$ -й
вершина с прилегающими к ней ребрами.

Пример:

$$K = K_{31} :$$



$$H = K_{29}$$



Если все H -инвариантные решетчатые в V найдены, то те из них, которые инвариантны относительно оператора R_{n+1} — это в точности все K -инвариантные решетчатые в V .

Т.е. получение классификации K -инвариантных решетчатых сводится к не представляющему труда проверке инвариантности известных решетчатых относительно известной линейной оператора

* * *

По той причине остается обязательным как решать задачу. А — В для случая, когда K проходится и ображается

* * *

* * *

Решение задачи (B) для кривоуго-
лой конечной фигуры K , удовлетворя-
 $n = \dim_k V$ условиям ($k = \mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$)

Итак, пусть

$$R_1 = R_{e_1, \theta_1}, \dots, R_n = R_{e_n, \theta_n}$$

- система отображений фигуры K

Рассмотрим линейный оператор

$$S := (Id_V - R_1) + \dots + (Id_V - R_n)$$

Теорема S невырожден

Доказательство

Поскольку (см. стр. 12)

$$R_j(v) = v - (1 - \theta_j) \langle v | e_j \rangle e_j \quad \forall v \in V, \quad (*)$$

из $v \perp e_j \quad \forall j$ следует, что $v \in V^{R_j} \quad \forall j$, т.е.

$$v \in V^K \stackrel{\uparrow}{=} 0.$$

(в силу теоремы Шмидта K)

Значит, $e_1, \dots, e_n$ — базис в V .

Из (*) и очевидного S следует, что

$$S(v) = \sum_{j=1}^n \widehat{(1 - \theta_j)}^{\neq 0} \langle v | e_j \rangle e_j.$$

$$\text{Значит, } v \in \text{Ker}(S) \Rightarrow v \perp e_j \quad \forall j \Rightarrow v = 0. \quad \square$$

* * *

Роль S в решении задачи В объявляет следующая

Лемма ($k = \mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$)

Пусть Λ — линейная относительно K решетка в V . Тогда

(i) $\Lambda^* \subseteq S^{-1}(\Lambda).$

(ii) Если Λ компактна, то $\Lambda^* \stackrel{\uparrow}{=} S^{-1}(\Lambda).$

(т.е., Λ^* находится по Λ с помощью S)

Замечание

Матрица S в базисе $e_1, \dots, e_n$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} (1-\theta_1)\langle e_1|e_1\rangle & \dots & (1-\theta_1)\langle e_n|e_1\rangle \\ \dots & \dots & \dots \\ (1-\theta_n)\langle e_1|e_n\rangle & \dots & (1-\theta_n)\langle e_n|e_n\rangle \end{pmatrix}$$

Если $k = \mathbb{R}$, K — комплексные корни — вешения системы корней R , а $\Lambda = i\mathbb{Z}R$, то Λ — корневая решётка как в смысле данного выше определения, так и в смысле термин системы корней, а Λ^* — решётка весов. Матрица оцара S в базисе α системы простых корней — это матрица Картер.

* * *

Вот несколько свойств оцара S , в частности, облегчающие конструктивное нахождение Λ^* из Λ .

Теорема (описания оператора S)

Пусть в V существует невырожденная
 K -инвариантная решетка Γ . Тогда

- ① $|\det(S)|$ и $\text{tr}(S) \in \mathbb{Z}$, если $\text{rk}(\Gamma) = n$,
 $|\det(S)|^2$ и $2 \text{Re}(\text{tr}(S)) \in \mathbb{Z}$, если $\text{rk}(\Gamma) = 2n$.
- ② $|\det(S)|$ зависит только от K , а
не от базиса $R_1, \dots, R_n$
- ③ $[\Gamma : \Gamma^0]$ генер. $\begin{cases} |\det(S)|, & \text{если } \text{rk}(\Gamma) = n, \\ |\det(S)|^2, & \text{если } \text{rk}(\Gamma) = 2n. \end{cases}$
- ④ Если $\Gamma = \Gamma^0$, то
 $[\Gamma^* : \Gamma] = \begin{cases} |\det(S)|, & \text{если } \text{rk}(\Gamma) = n, \\ |\det(S)|^2, & \text{если } \text{rk}(\Gamma) = 2n, \end{cases}$
- ⑤ Если $\Gamma = \Gamma^0$ и $m_1, \dots, m_r$ — инвариантные
похожие эндоморфизмы $\Gamma \xrightarrow{S} \Gamma$,
 $m_1 \mid m_2 \mid \dots \mid m_r$,

то

$$H^1(K, \Gamma) \cong \Gamma^* / \Gamma \cong \mathbb{Z}/m_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}/m_r$$

В частности, m_i не зависит от базиса $R_1, \dots, R_n$

(6) Если $\Gamma = \Gamma^0$, то

$$|H^1(K, \Gamma)| = \begin{cases} |\det(S)|, & \text{если } \text{rk}(\Gamma) = n, \\ |\det(S)|^2, & \text{если } \text{rk}(\Gamma) = 2n \end{cases}$$

* * *

Следствие

(1) Если $|\det(S)| = 1$, то векная K -инвариантная решётка корневой.

(2) Если $k = \mathbb{C}$ и $|\det(S)|^2$ - целое число, то любой Γ является корневой, либо $\Gamma = (\Gamma^0)^*$.

* * *

Замечание. Если $k = \mathbb{R}$ и K - целая

Векная невырожденная система корней R , и $\Gamma = \mathbb{Z}R$, то $m_1, \dots, m_r$ - инвариантные

множители матрицы Картан, а $H^1(K, \Gamma)$

изоморфно генеру отклоняющей прямой

симметрической функции с аффинной функцией

Векная $K \rtimes \Gamma$. В случае $k = \mathbb{C}$ и

K -инвариантная корневая решётка Γ

ранга 2 и интересующие $H^1(K, \Gamma)$ как
"центра" какого-то сопоставленного
 кристаллографического узла отражений
 $K \rtimes \Gamma$ "глобального объекта" не известна.

* * *

Задано. Число $\det(S)$ можно вычислить
 по графу узла K по формуле:

$$\det(S) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{\sigma}, \quad (*)$$

где $a_{\sigma} = c_{\alpha} c_{\beta} \dots c_{\gamma}$, а $\sigma = \alpha \beta \dots \gamma$ —
 разложение подстановки в произведение циклов,
 а $c_{\alpha}, c_{\beta}, \dots, c_{\gamma}$ — соответствующие циклические
 произведения

Пример. $K = A_n$, $S = S(K)$

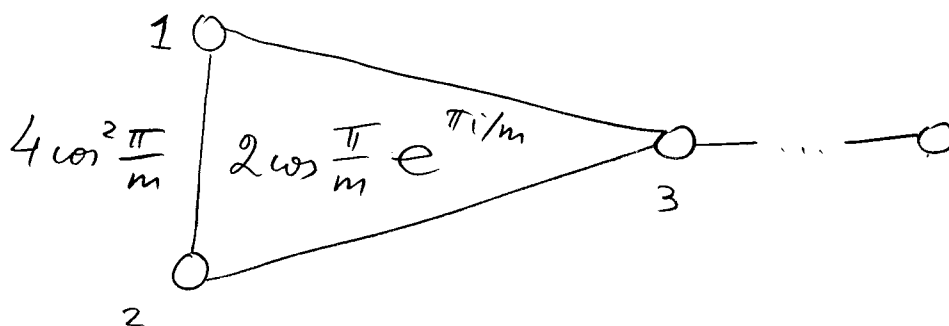
A_n : $\underset{1}{\circ} - \underset{2}{\circ} - \dots - \underset{n}{\circ}$

Индукцией по n покажем, что $\det(S(A_n)) = n+1$.

Имеем: $\det(S(A_n)) \stackrel{(*)}{=} c_1^2 \det(S(A_{n-1})) -$
 $- \underbrace{c_{12}}_1 \det(S(A_{n-2})) = 2n - (n-1) = n+1.$

Π genus

$$K = K_2 = G(m, m, n)$$



$$\det(S) = \underset{2}{c_{11}} \det(S(A_{n-1})) -$$

$$- c_{12} \det(S(A_{n-2})) -$$

$$- c_{13} c_2 \det(S(A_{n-3})) +$$

$$+ c_{123} \det(S(A_{n-3})) -$$

$$- c_{132} \det(S(A_{n-3})) =$$

$$= 2n - 4 \cos^2 \frac{\pi}{m} (n-1) - 1 \cdot 2 \cdot (n-2) + 2 \cos \frac{\pi}{m} e^{\pi i/m} (n-2) +$$

$$+ 2 \cos \frac{\pi}{m} e^{-\pi i/m} (n-2) = 4 - 4 \cos^2 \frac{\pi}{m} (n-1) +$$

$$+ 4 \cos^2 \frac{\pi}{m} (n-2) = 4 \sin^2 \frac{\pi}{m}.$$

* * *

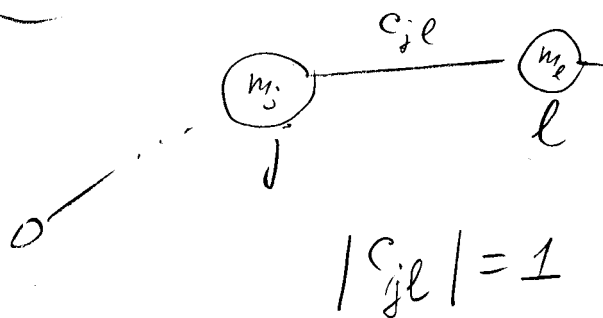
Решение задачи (A): алгоритм построения

Куртовых инвариантных решеток для криво-
линей конечной группы порядка K ,

известной $n = \dim_k V$ образующих $R_j = R_{e_j, \theta_j}$
 $j=1, \dots, n$

из таблиц на стр. 90-94 видно,
что все такие K делятся на два типа:

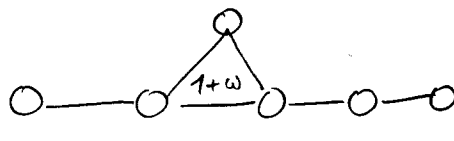
Тип 1. Это такие K , что в ее графе
любым две вершины можно соединить путем
из таких ребер, что модуль скалярного
из ребра циклической проективности
равен 1:



Это — группы K_j , где j входит в
следующий список: 1, 2 (тип $A_s, B_s = C_s, D_s$,
 $2 \leq s \leq 3$ in $G(3,3,s), G(4,4,s), G(6,1,s), G(6,6,s)$),
3 ($m=3,4,6$), 4, 8, 25, 29, 32, 33, 34, 35, 36, 37
 $s \geq 3$

Примеры:

$$K_4: \quad \textcircled{3} \xrightarrow{\omega} \textcircled{3}$$

$$K_{34}: \quad \textcircled{} \text{---} \textcircled{} \text{---} \textcircled{} \xrightarrow{1+\omega} \textcircled{} \text{---} \textcircled{} \text{---} \textcircled{}$$


Тип 2: Циклы не типа 1.

Это - циклы K_j , где j входит в следующий

список:

$$2 \text{ (тип } B_s = C_s, G(3, 1, s), G(4, 1, s), G(4, 4, 2), \\ G(6, 6, 2)),$$

$$5, 26, 28$$

Из таблиц графов на стр. 90-94 видно,
что для всех таких K граф является

целью

* * *

Алгоритмы построения всех K -инвариантных кривых решётки в V в случае,
когда K -кривая типа 1 ($k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)

По теореме на стр. 88-89 и 95-96,
 кольцо $\mathbb{Z}[T_2(K)]$ является подкольцом в кольце
 целых чисел вида $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, $d \in \mathbb{N}$. Так как
кольцо целых является решёткой в $\mathbb{C}$, то и
любая его подкольцо — тоже решётка в $\mathbb{C}$, в
частности, $\mathbb{Z}[T_2(K)]$.

• Пусть Δ — какая-либо решётка в $\mathbb{C}$,
являющаяся подкольцом элементов $\mathbb{Z}[T_2(K)]$, т.е.

$$\lambda \cdot \Delta \subseteq \Delta \quad \forall \lambda \in \mathbb{Z}[T_2(K)]$$

(такие существуют, например, $\Delta = \mathbb{Z}[T_2(K)]$).

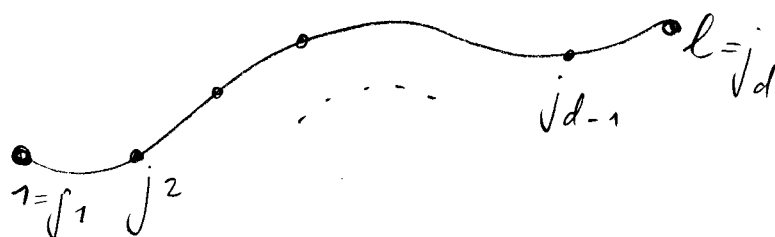
Положим

$$\Lambda_1 := \Delta e_1.$$

• Описание Λ_l при $l \geq 2$:

Рассмотрим в графе K какой-либо путь,

соединяющий вершину $N \equiv 1$ с вершиной N' , такой что максимальное по модулю среди всех путей циклическое умножение C_{st} равно по модулю 1, — такой существует, т.к. K — типа 1:



Полагая:

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_l &:= (Id_V - R_{j_d})(Id_V - R_{j_{d-1}}) \dots (Id_V - R_{j_2}) \Lambda_1 \\ &= \Delta \left(\prod_{t=2}^d (1 - \theta_{j_t}) \langle e_{j_{t-1}} | e_{j_t} \rangle \right) e_{j_d} \end{aligned} \right\} (*)$$

Теорема

(а) $\Gamma := \Lambda_1 + \dots + \Lambda_n$ является корневой K -инвариантной решеткой с

$$\Gamma \cap \mathbb{C} e_j = \Lambda_j \quad \forall j,$$

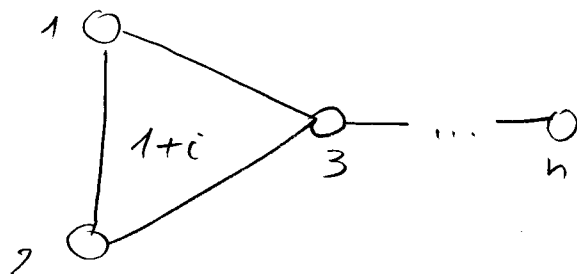
где конструкция не зависит от выбора используемых путей.

(б) Всякая корневая K -инвариантная решетка так получается.

Пример

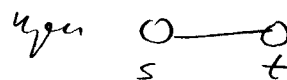
$$V = \mathbb{C}^n, \quad \varepsilon_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_i$$

$$K = K_2, \text{ или } G(4, 4, n), n \geq 3$$



$$e_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) / \sqrt{2}$$

$$e_j = (\varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j) / \sqrt{2}, j \geq 2, \quad \langle e_j | e_t \rangle = -1/2$$



$$\mathbb{Z}[\Gamma_2(K)] = \mathbb{Z}[i] = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z} = [1, i]$$

одноразмерный

Задача. Решётки Δ в $\mathbb{C}$, для которых
 $\alpha \Delta \subseteq \Delta \quad \forall \alpha \in [1, i]$, — это в точности решётки
 вида $\lambda [1, i]$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

* * *

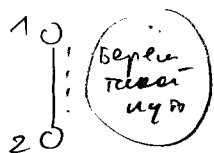
Возьмем $\Delta = [1, i]$. Тогда



$$\Lambda_1 = [1, i] e_1$$

$$\Lambda_d \stackrel{(*)}{=} [1, i] (1 - (-1)^{d-2}) \left(-\frac{1}{2}\right)^{d-2} e_d = [1, i] e_d$$

$d \geq 3$



$$\Lambda_2 \stackrel{(*)}{=} [1, i] (1 - (-1))^2 \left(-\frac{1}{2}\right) = [1, i] e_2$$

Вывод

$\gamma K = G(4, 4, n)$, $n \geq 3$, с точностью до
перобит линейно единственная K -инвари-
антная кривая решётка, а именно

$$[1, i]e_1 + \dots + [1, i]e_n$$

* * *

Алгоритм построения всех K -инвари-
антных кривых решёток в сегме,
 когда K - группа типа 2 ($k = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$)

- Пусть Δ_1 - какая-либо решётка в $\mathbb{C}$
 с колыцом множителей $\mathbb{Z}[T_2(K)]$, т.е.

$$\alpha \Delta_1 \subseteq \Delta_1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}[T_2(K)] \quad (*)$$

- Из (*) следует, что $c_{12} \Delta_1 \subseteq \Delta_1$, т.е.

$$\Delta_1 \subseteq c_{12}^{-1} \Delta_1$$

- Пусть Δ_2 - любая решётка в $\mathbb{C}$ с
 колыцом множителей $\mathbb{Z}[T_2(K)]$, зажатая между этими:

$$\Delta_1 \subseteq \Delta_2 \subseteq \Delta_1.$$

и т.д.:

$$\Delta_2 \subseteq \Delta_3 \subseteq c_{23}^{-1} \Delta_2$$

$$\vdots$$

$$\Delta_{n-1} \subseteq \Delta_n \subseteq c_{n-1,n}^{-1} \Delta_{n-1}$$

• Покажем:

$$\Lambda_1 = \Delta_1 e_1,$$

$$\Lambda_d = \Delta_d (Id_V - R_d)(Id_V - R_{d-1}) \dots (Id_V - R_2)(e_1)$$

$$= \Delta_d \left(\prod_{t=2}^d (1 - \theta_t) \langle e_{t-1}, e_t \rangle \right) e_d$$

где $d \geq 2$

Теорема

(a) $\Gamma := \Lambda_1 + \dots + \Lambda_n$ является корневой

K -инвариантной решёткой с

$$\Gamma \cap \mathbb{C} e_j = \Lambda_j \quad \forall j$$

(b) Всякая корневая K -инвариантная

решётка так извлекается

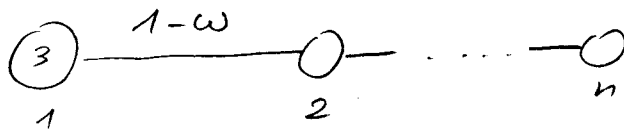
120/

Пример

$$K = G(3, 1, n), \quad n \geq 2$$

$$V = \mathbb{C}^n$$

$$\varepsilon_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ for } i=1, \dots, n$$



$$\omega = e^{2\pi i/3}$$

$$e_1 = \varepsilon_1$$

$$e_j = (\varepsilon_{j-1} - \varepsilon_j) / \sqrt{2}, \quad j \geq 2$$

$$\langle e_1 | e_2 \rangle = 1/\sqrt{2}, \quad \langle e_2 | e_3 \rangle = \dots = \langle e_{n-1} | e_n \rangle = -1/2$$

$$c_{12} = 1 - \omega, \quad c_{23} = \dots = c_{n-1, n} = 1$$

$$\mathbb{Z}[T_2(K)] = \mathbb{Z}[\omega]$$

Пусть $d \geq 2$:

$$(Id_V - R_d)(Id_V - R_{d-1}) \dots (Id_V - R_2)(e_1) =$$

$$= (1 - (-1))^{d-1} (-1/2)^{d-2} \frac{1}{\sqrt{2}} e_d =$$

$$= (-1)^d \sqrt{2} e_d$$

Безусловно

$$\Delta_1 = [1, \omega] = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega,$$

$$\Delta_2 = \dots = \Delta_n,$$

$$[1, \omega] \leq \Delta_d \leq (1 - \omega)^{-1} [1, \omega]$$

$$d \geq 2$$

Т.1 $|1-\omega|^2=3$, то для Δ_d при $d \geq 2$

есть только две возможности

$$\text{либо } \Delta_d = [1, \omega],$$

$$\text{либо } \Delta_d = (1-\omega)^{-1} [1, \omega] = \frac{i}{\sqrt{3}} [1, \omega]$$

Вывод.

У $K = G(3, 1, n)$, $n \geq 2$, с плоскостью до пододна

имеет ровно две K -инвариантные

критические решётки, а именно:

$$[1, \omega] e_1 + [1, \omega] \sqrt{2} e_2 + \dots + [1, \omega] \sqrt{2} e_n$$

и

$$[1, \omega] e_1 + [1, \omega] i \sqrt{\frac{2}{3}} e_2 + \dots + [1, \omega] i \sqrt{\frac{2}{3}} e_n$$

*

*

*

Как классифицируются бесконечные неприводимые комплексные группы отражений G , у которых $K = \text{Lin}(G)$ порядка $n+1$ отражений $R_j = R_{e_j, \theta_j}$, $j = 1, \dots, n+1$, $n = \dim V$.

Таких K мало: это только

$$G(4, 2, n), G(6, 2, n), G(6, 3, n), K_{12} \text{ и } K_{37}$$

Далее мы с помощью векторизации E каждого $\alpha \in \pi$ считаем

$$E = V,$$

$$K \subset \mathcal{U}(V) \ltimes V,$$

$T = V \cap K$ — решетка в V ранга $2n$, инвариантная относительно K

G является расширением T с помощью K и потому описывается некоторыми средствами.

А именно, пусть, более того, H — любой подгруппа в $GL(V) \ltimes V$, являющаяся расширением K с помощью T , т.е.

$$0 \rightarrow T \hookrightarrow H \xrightarrow{\text{Lin}} K \rightarrow 1$$

— точная последовательность

Если $P \in K$ и $(P, v), P(u) \in H$, то $v-u \in T$.

Задача

Докажите это.

Поэтому возникает корректно определенное отображение

$$c: K \rightarrow V/T$$

$$P \mapsto v+T, \text{ если } (P, v) \in H$$

Задача

c является 1-коциклом, т.е.

$$c(PQ) = c(P) + P(c(Q)) \quad (\text{откуда следует, что } c(P^{-1}) = -P^{-1}(c(P)))$$

*

Лемма 1-коцикла

$$\tau: K \rightarrow V/T$$

конструируя этот способ из некоторого расширения S группы T с помощью K

А именно, рассмотрим модель отображения $\tau: K \rightarrow V$, являющееся коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} & V & \\ \nearrow \tau & \downarrow & \leftarrow \text{расширение из } T \\ K & \xrightarrow{\tau} & V/T \end{array}$$

тогда

$$S = \{ (P, \tilde{\pi}(P) + t) \mid P \in K, t \in T \}$$

* * *

Задача

Для сопряжения H не элемент $v \in V$
 к коцккк с придается 1-кофракция
 $P \rightarrow P(\tilde{v}) - \tilde{v}$, где $\tilde{v} = v + T$

* * *

То, что $H^1(K, V/T)$ описывает
 соотношения до сопряжения не элемент $u \in V$
 подгрунт в $GL(V) \ltimes V$, ефнеронная расщеп-
 решина K с помощью T .

Т.к. при смене начала векторизации
 грунт заменяется на сопряженную с
 помощью элемента $u \in V$. Т.о., элемент
 из $H^1(K, V/T)$, сопоставляется грунту
 образом с помощью векторизации, а
 введе векторизации не зависит.

* * *

Внимание с точностью до сопряженности
 на элемент из $GL(V) \ltimes V$ тех подгрупп
 в $GL(V) \ltimes V$, которые являются расшире-
 ниями K с помощью T , означает
 тотальное описание некоторого разбиения
 $H^1(K, V/T)$ на класс эквивалентности.

Эти классы эквивалентности являются
орбитами групп

$N(K, T) := \{ P \in GL(V) \mid PKP^{-1} = K, P(T) = T \},$
 действующей на $H^1(K, V/T)$ поправкой:

если $P \in N(K, T)$, $c \in H^1(K, V/T)$

и $\tilde{c} : K \rightarrow V/T$ — коцикл, представляющий
 c , то $P(c)$ — представляется коциклом

$$Q \mapsto P(\tilde{c}(P^{-1}QP)).$$

* * *

Задающий сопряженное преобразование $K \rightsquigarrow T$
класс циклов $H^1(K, V/T)$ — это нулевой класс

* * *

Косинус $K \rightarrow V/T$ практически удобно
задавать так:

Пусть $\tilde{K}$ - свободная группа со

свободной системой образующих

$$z_1, \dots, z_{n+1}$$

Рассмотрим эпиморфизм

$$\pi: \tilde{K} \rightarrow K, \quad \pi(z_j) = K_j \quad \forall j$$

Он определяет действие $\tilde{K}$ на V по ф-ле

$$\chi(v) := \pi(g)(v) \quad \forall g \in \tilde{K}.$$

Простому можно рассматривать 1-косинус

$\tilde{\epsilon}: \tilde{K} \rightarrow V$. Поскольку, но определяется
1-косинус,

$$\tilde{\epsilon}(gh) = \tilde{\epsilon}(g) + g\tilde{\epsilon}(h), \quad \forall g, h \in \tilde{K}, \quad (*)$$

из (*) следует, что $\tilde{\epsilon}$ полностью определяется

векторами $\tilde{\epsilon}(z_1), \dots, \tilde{\epsilon}(z_{n+1})$, и эти

векторы можно выбрать свободными, т.к. $\tilde{K}$

свободна.

* * *

Более того, если

$$\tilde{c}(f) \in T \quad \forall f \in \text{Ker}(\pi),$$

то $\tilde{c}$ спускается до 1-коцикла

$$c: K \rightarrow V/T$$

или формуле

$$c(g) := \tilde{c}(g) + T,$$

и любой 1-коцикл $K \rightarrow V/T$ так

получается.

* * *

На языке потоплю модост

коцикл $c: K \rightarrow V/T$ задается указанием векторов

$$\tilde{c}(z_1), \dots, \tilde{c}(z_{n+1})$$

Потому задана описанная группа
образов G с $\text{Lin}(G) = K$ и $G \cap \text{Trans}(V) = T$

сводится к такому:

(1) указать такие векторы

$$v_1, \dots, v_{n+1} \in V,$$

таких, для коцикла $\tilde{c}: K \rightarrow V$,

определено равенствам

$$\tilde{c}(z_j) = v_j \quad \forall j,$$

128)

и любой слова $w \in R_1, \dots, R_{n+1}$,
 лежащего в $\text{Ker } \pi$ (т.е. w - но слово -
иные слова $R_1, \dots, R_{n+1}$) было выписано
 $\tilde{c}(w) \in T$

(вектор $\tilde{c}(w)$ выписывает веру $v_1, \dots, v_{n+1}$
 по формуле (*) на стр. 126).

Каким же достаточно, чтобы это
 было выписано только для образующих
группы $\text{Ker}(\pi)$ — т.е. образующих слова -
иных слова $R_1, \dots, R_{n+1}$ (все они
 известны для всех групп K).

2). Вспомогательная процедура и
образующие группы

$$\{(P, \tilde{c}(g)+t) \mid \pi(g)=P, t \in T\} \quad (*)$$

преобразований аффинных кр-ых V . Если

порождена, то она будет неприводимой

группой аффинных $G \in \text{Lin}(G)=K$ и

$G \cap T_1 = T$, и эти способы поиска
все также группы.

Можно доказать, что, интереснее
только случается, когда группа (X) на
стр. 128 уроджена отображением,
достаточно рассмотреть только образы
векторов вида

$$v_1 = v_2 = \dots = v_n = 0,$$

$$v_{n+1} = \lambda e_{n+1}, \lambda \in \mathbb{C}.$$

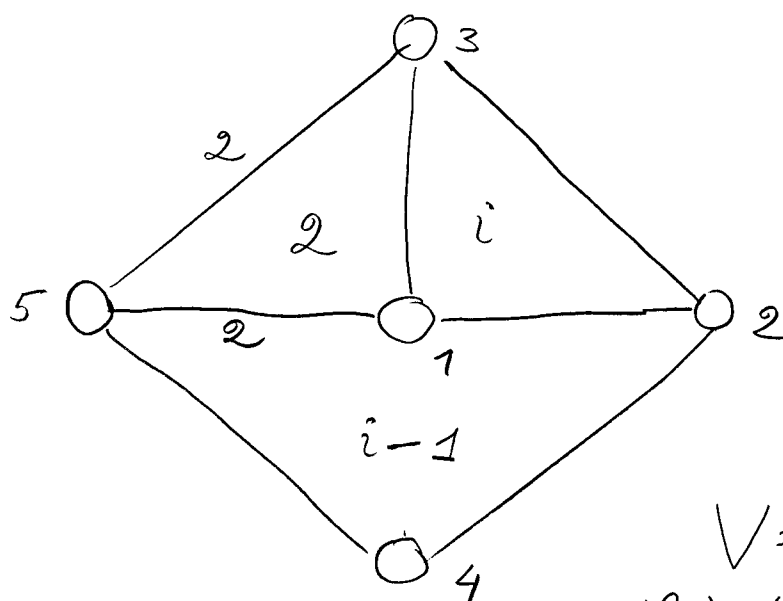
Т.о., дело сводится только к нахожде-
нию одного числа $\lambda \in \mathbb{C}$.

Более того, если для некоторого λ
коцикл $\tilde{c}$ спускается до коцикла $c: K \rightarrow V/T$,
а решетка T является для K кружевом,
 то определяющие коциклы с расширением
 K с помощью T автоматически
уродятся отображением,

130)

Пример

$K = K_{31}$: $E\bar{e}$ граф:



$$\mathbb{Z}[T_2(K)] = [1, i]$$

$$V = \mathbb{C}^4$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_4 \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{j=1}^4 a_j \overline{b_j}$$

$$\varepsilon_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$$

$$R_j = R_{e_j, -1}, \quad j=1, 2, 3, 4, 5.$$

$$e_1 = (\varepsilon_2 - \varepsilon_4) / \sqrt{2}, \quad e_2 = (-i\varepsilon_2 + \varepsilon_3) / \sqrt{2}, \quad e_3 = (-\varepsilon_3 + \varepsilon_4) / \sqrt{2}$$

$$e_4 = (-1+i)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4) / 2\sqrt{2}$$

$$e_5 = (1-i)\varepsilon_4 / \sqrt{2}$$

Алгоритм нахождения всех ^{ненулевых} K -инвариантных решеток сразу даёт:

С точностью до подобия такая решетка только одна — это

$$T = [1, i]e_1 + \dots + [1, i]e_4.$$

Подсчёт показывает, что

$$|\det(S)| = 1.$$

Вывод (см. сф. 110):

С точностью до умножения на ненулевое число из $\mathbb{C}$ существует единственная ненулевая K -инвариантная решетка в V — это решетка T .

Образующие соотношения узлы K_{31}

(т.е. образующие узлы $\text{Ker}(\pi)$, где

$$\pi: \widetilde{K}_{31} \rightarrow K_{31}, \quad \pi(z_j) = R_j \quad \forall j)$$

известны и таковы:

$$\begin{aligned}
 & r_1^2, r_2^2, r_3^2, r_4^2, r_5^2, \\
 & (r_2 r_3)^3, (r_3 r_1)^3, (r_1 r_2)^3, \\
 & (r_4 r_5)^3, (r_4 r_3)^3, (r_4 r_2)^3, \\
 & (r_5 r_2)^2, (r_5 r_3)^4, (r_4 r_1)^2, \\
 & (r_2 r_1 r_3 r_1)^4, \\
 & (r_5 r_1 r_3 r_1)^2, \\
 & r_1 (r_5 r_3 r_2 r_3) r_1 (r_5 r_3 r_2 r_3)^{-1}
 \end{aligned}
 \quad (*)$$

* * *

Имеем: $\tilde{c}: K \rightarrow V$,

$$\tilde{c}(r_1) = \tilde{c}(r_2) = \tilde{c}(r_3) = \tilde{c}(r_4) = 0,$$

$$\tilde{c}(r_5) = \lambda e_5.$$

Из соотношений (*) следует, что

$$R_5 R_1 R_5$$

выражается через R_1, R_2, R_3, R_4 . Отсюда

выводится, что

$$T \ni \lambda(1 - R_5 R_1 R_5) e_5 = \lambda((1+i)e_1 + 2e_2 + 2e_3),$$

откуда

$$\lambda = \frac{a+bi}{2}, \quad a, b \in \mathbb{Z}, \quad a \equiv b \pmod{2}.$$

Поскольку $[1, i]e_5 \in T$, то означает,

что можно считать

$$\lambda = \frac{1+i}{2}.$$

Остатки уравнения сводятся к τ до
коэффициента $c: K \rightarrow V/T$, т.е. верно и,
что $\tau(\text{любой элемент } y(x)) \in T$.

Вот пример, соответствующий

уравнения:

$$\begin{aligned} \tau(r_5^2) &= \tau(r_5) + r_5 \tau(r_5) = \\ &= \frac{1+i}{2} (Id_v + r_5) e_5 = 0 \in T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \tilde{c}((r_4 r_5)^3) &= (Id_V + r_4 r_5 + (r_4 r_5)^2)(\tilde{c}(r_4) + r_4 \tilde{c}(r_5)) \\ &= \frac{1+i}{2} (Id_V + (r_4 r_5) + (r_4 r_5)^2)(r_4(e_5)) = 0 \in T \end{aligned}$$

и т.д.

Итак для вычисления: да, $\tilde{c}$
списывает до коучки $c: K \rightarrow V/T$.

Поскольку T - кривая решётка,

то даёт:

определённая коучкой с кривой

$$\{(P, \tilde{c}(\gamma) + t) \mid \pi(\gamma) = P, t \in T\}$$

есть многообразие $G \subset \text{Lie}(G) = K$,

$G \cap V = T$, не является погруппой

произведений K и T .

В следующей таблице приведен
итог классификации —

полный список неуводимых бесконечных
комплексных кристаллографических
групп симметрии G

Спостерядов оказывается, что
верно следующее утверждение

Теорема. Рядётка всех изометрических
группов, содержащихся в любой кри-
сталлической бесконечной группе симме-
трии, является корневой.

Неприводимые комплексные кристаллографические группы отражений G

Обозначения: $V = \mathbb{C}^n$, $\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \rangle = \sum_{j=1}^n \alpha_j \bar{\beta}_j$, $\varepsilon_j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + j$, Ω - модулярная фигура в $\mathbb{C}$ (см. стр. 30),

$$\omega = e^{2\pi i/3}$$

Обозначение группы G	$n = \dim(V)$	$K = \text{Lin}(G)$	$T = \text{Tran}(G)$	$e_1, \dots, e_s$	Кочикл. $\tilde{\sigma}: \tilde{K} \rightarrow V$
$[A_s]^\alpha$ $s \geq 1$	s	K_1 , type A_s $s \geq 1$	$[1, \alpha]e_1 + \dots + [1, \alpha]e_s$, $\alpha \in \Omega$	$e_j = (\epsilon_j - \epsilon_{j+1})/\sqrt{2}$ $j = 1, \dots, s$	$\tilde{\sigma} = 0$
$[G(2,1,s)]_1^\alpha$ $s \geq 3$	s	K_2 type $G(2,1,s)$ $s \geq 3$	$[1, \alpha]e_1 + [1, \alpha]\sqrt{2}e_2 + \dots + [1, \alpha]\sqrt{2}e_s$, $\alpha \in \Omega$	$e_1 = \epsilon_1$, $e_j = (\epsilon_{j-1} - \epsilon_j)/\sqrt{2}$ $j = 2, \dots, s$	
$[G(2,1,s)]_2^\beta$ $s \geq 3$			$[1, \beta]e_1 + [1, \frac{1+\beta}{2}]\sqrt{2}e_2 + \dots + [1, \frac{1+\beta}{2}]\sqrt{2}e_s$, $\beta \in \Omega$		
$[G(2,1,s)]_3^\gamma$ $s \geq 3$			$[1, \gamma]e_1 + [\frac{1}{2}, \gamma]\sqrt{2}e_2 + \dots + [\frac{1}{2}, \gamma]\sqrt{2}e_s$, $\gamma \in \Omega$		
$[G(2,1,s)]_4^\delta$ $s \geq 3$			$[1, \delta]e_1 + [1, \frac{\delta}{2}]\sqrt{2}e_2 + \dots + [1, \frac{\delta}{2}]\sqrt{2}e_s$, $\delta \in \Omega$		
$[G(2,1,s)]_5^\lambda$ $s \geq 3$			$[1, \lambda]e_1 + [\frac{1}{2}, \frac{\lambda}{2}]\sqrt{2}e_2 + \dots + [\frac{1}{2}, \frac{\lambda}{2}]\sqrt{2}e_s$, $\lambda \in \Omega$		
$[G(3,1,s)]_1$ $s \geq 2$	s	K_2 type $G(3,1,s)$ $s \geq 2$	$[1, \omega]e_1 + [1, \omega]\sqrt{2}e_2 + \dots + [1, \omega]\sqrt{2}e_s$		
$[G(3,1,s)]_2$ $s \geq 2$			$[1, \omega]e_1 + [1, \omega]i\sqrt{\frac{2}{3}}e_2 + \dots + [1, \omega]i\sqrt{\frac{2}{3}}e_s$		

Обозначение группы G	$n = \dim(V)$	$K = \text{Lin}(G)$	$T = \text{Tran}(G)$	$e_1, \dots, e_s$	Кочник $\tilde{c}: \tilde{K} \rightarrow V$
$[G(4,1,s)]_1$ $s \geq 2$	s	K_2 type $G(4,1,s)$ $s \geq 2$	$[1,i]e_1 + [1,i]\sqrt{2}e_2 + \dots + [1,i]\sqrt{2}e_s$	$e_1 = \epsilon_1,$ $e_j = (\epsilon_{j-1} - \epsilon_j)/\sqrt{2},$ $j=2, \dots, s$	$\tilde{c} = 0$
$[G(4,1,s)]_2$ $s \geq 2$			$[1,i]e_1 + [1,i]\epsilon e_2 + \dots + [1,i]\epsilon e_s$		
$[G(6,1,s)]$ $s \geq 2$	s	K_2 type $G(6,1,s)$ $s \geq 2$	$[1,\omega]e_1 + [1,\omega]\sqrt{2}e_2 + \dots + [1,\omega]\sqrt{2}e_s$		
$[G(2,2,s)]^\alpha$ $s \geq 3$	s	K_2 $G(2,2,s)$ $s \geq 3$	$[1,\alpha]e_1 + \dots + [1,\alpha]e_s,$ $\alpha \in \Omega$	$e_1 = -(\epsilon_1 + \epsilon_2)/\sqrt{2},$ $e_j = (\epsilon_{j-1} - \epsilon_j)/\sqrt{2},$ $j=2, \dots, s$	
$[G(3,3,s)]$ $s \geq 3$	s	$K_2,$ type $G(3,3,s)$ $s \geq 3$	$[1,\omega]e_1 + \dots + [1,\omega]e_s$	$e_1 = (\omega\epsilon_1 - \epsilon_2)/\sqrt{2},$ $e_j = (\epsilon_{j-1} - \epsilon_j)/\sqrt{2},$ $j=2, \dots, s$	
$[G(4,4,s)]$ $s \geq 3$	s	K_2 type $G(4,4,s)$ $s \geq 3$	$[1,i]e_1 + \dots + [1,i]e_s$	$e_1 = (i\epsilon_1 - \epsilon_2)/\sqrt{2},$ $e_j = (\epsilon_{j-1} - \epsilon_j)/\sqrt{2},$ $j=2, \dots, s$	

128

Обозначение группы G	$n = \dim(V)$	$K = \text{Lin}(G)$	$\text{Tran}(G)$	$e_1, \dots, e_s$	Кольца $\tilde{c}: \tilde{K} \rightarrow V$	
$[G(6,6,s)]$ $s \geq 3$	s	K_2 , type $G(\frac{6}{4}, \frac{6}{4}, s)$ $s \geq 3$	$[1, \omega]e_1 + \dots + [1, \omega]e_s$	$e_1 = ((1+\omega)\epsilon_1 - \epsilon_2)/\sqrt{2}$ $e_j = (\epsilon_{j-1} - \epsilon_j)/\sqrt{2}$ $j=2, \dots, s$	$\tilde{c} = 0$	
$[G(2,1,2)]_1^\alpha$	2	K_2 , type $G(2,1,2)$ $= \text{type}$ $G(4,4,2)$	$[1, \alpha]e_1 + [1, \alpha]\sqrt{2}e_2$, $\alpha \in \Omega$	$e_1 = \epsilon_1$ $e_2 = (\epsilon_1 - \epsilon_2)/\sqrt{2}$		
$[G(2,1,2)]_2^\beta$		$[1, \beta]e_1 + [1, \frac{\beta}{2}]\sqrt{2}e_2$, $\beta \in \Omega$				
$[G(2,1,2)]_3^\gamma$		$[1, \gamma]e_1 + [1, \frac{1+\gamma}{2}]\sqrt{2}e_2$, $\gamma \in \Omega$				
$[G(6,6,2)]_1^\alpha$	2	K_2 , type $G(6,6,2)$	$[1, \alpha]e_1 + [1, \alpha](2+\omega)e_2$, $\alpha \in \Omega$	$e_1 = ((1+\omega)\epsilon_1 - \epsilon_2)/\sqrt{2}$ $e_2 = (\epsilon_1 - \epsilon_2)/\sqrt{2}$		
$[G(6,6,2)]_2^\beta$			$[1, \beta]e_1 + [1, \frac{\beta}{3}](2+\omega)e_2$, $\beta \in \Omega$			
$[G(6,6,2)]_3^\gamma$			$[1, \gamma]e_1 + [1, \frac{1+\gamma}{3}](2+\omega)e_2$, $\gamma \in \Omega$			
$[G(6,6,2)]_4^\delta$			$[1, \delta]e_1 + [1, \frac{2+\delta}{3}](2+\omega)e_2$, $\delta \in \Omega$			

139)

Обозначение группы G	$n = \dim(V)$	$K = \text{Lin}(G)$	$T = \text{Tran}(G)$	$e_1, \dots, e_s$	Коды $\tilde{c}: \tilde{K} \rightarrow V$
$[G(4,2,s-1)]_1$ $s \geq 3$	$s-1$	K_2 , type $G(4,2,s-1)$ $s \geq 3$	$T = [1, i]e_1 + \dots + [1, i]e_{s-1}$	$e_1 = (i\epsilon_1 - \epsilon_2)/\sqrt{2}$ $e_j = (\epsilon_{j-1} - \epsilon_j)/\sqrt{2}$ $j=2, \dots, s-1$ $e_s = \epsilon_{s-1}$	$\tilde{c} = 0$
$[G(4,2,s-1)]_1^*$ $s \geq 3$					$\tilde{c}(r_j) = 0,$ $j=1, \dots, s-1$ $\tilde{c}(r_s) = e_s/\sqrt{2}$
$[G(4,2,s-1)]_2$ $s \geq 3$			$T \cup (T + \frac{1+i}{2}(e_1 + e_2)) =$ $= [1, i]e_1 + \dots + [1, i]e_{s-1} + \frac{1}{\sqrt{2}}[1, i]e_s$		
$[G(4,2,2)]_3$	2	K_2 , type $G(4,2,2)$	$[1, i]e_1 + [1, i](1+i)e_2$	$e_1 = ((1+\omega)\epsilon_1 - \epsilon_2)/\sqrt{2},$ $e_j = (\epsilon_{j-1} - \epsilon_j)/\sqrt{2},$ $j=2, \dots, s-1$ $e_s = \epsilon_{s-1}.$	$\tilde{c} = 0$
$[G(6,2,s-1)]_1$ $s \geq 3$	$s-1$	K_2 type $G(6,2,s-1)$ $s \geq 3$	$[1, \omega]e_1 + \dots + [1, \omega]e_{s-1}$		
$[G(6,2,2)]_2$	2	K_2 , type $G(6,2,2)$	$[1, \omega]e_1 + [1, \omega](2+\omega)e_2$		

ОБОЗНАЧЕНИЕ группы G	$n = \dim(V)$	$K = \text{Lin}(G)$	$T = \text{Tran}(G)$	$e_1, \dots, e_s$	КОУЧКА $\tilde{c}: \tilde{K} \rightarrow V$
$[G(6, 3, s-1)]_1$ $s \geq 3$	$s-1$	K_2 , type $G(6, 3, s-1)$ $s \geq 3$	$[1, \omega]e_1 + \dots + [1, \omega]e_{s-1}$	$e_1 = ((1+\omega)\epsilon_1 - \epsilon_2)/\sqrt{2}$, $e_j = (\epsilon_{j-1} - \epsilon_j)/\sqrt{2}$, $j=2, \dots, s-1$, $e_s = \epsilon_{s-1}$	$\tilde{c}=0$
$[G(6, 3, 2)]_2$	2	K_2 , type $G(6, 3, 2)$	$[1, 2\omega]e_1 + [2, \omega]e_2$		
$[K_3(3)]$	1	K_3 $m=3$	$[1, \omega]e_1$	$e_1 = \epsilon_1$	
$[K_3(4)]$		K_3 $m=4$	$[1, i]e_1$		
$[K_3(6)]$		K_3 , $m=6$	$[1, \omega]e_1$		
$[K_4]$	2	K_4	$[1, \omega]e_1 + [1, \omega]e_2$	$e_1 = \epsilon_1$, $e_2 = \frac{1-\omega}{3}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3)$	
$[K_5]$		K_5	$[1, \omega]e_1 + [1, \omega]\sqrt{2}e_2$	$e_1 = \epsilon_1$, $e_2 = \frac{1-\omega}{3}(\sqrt{2}\epsilon_1 + \epsilon_2)$	

Обозначение группы G	$n = \dim(V)$	$K = \text{Lin}(G)$	$T = \text{Tran}(G)$	$e_1, \dots, e_s$	Коды и $\tilde{c}: \tilde{K} \rightarrow V$
$[K_8]$	2	K_8	$[1, i]e_1 + [1, i]e_2$	$e_1 = \epsilon_1,$ $e_2 = \frac{1-i}{2}(\epsilon_1 - \epsilon_2)$	$\tilde{c} = 0$
$[K_{12}]$	2	K_{12}	$[1, i\sqrt{2}]e_1 + [1, i\sqrt{2}]e_2$	$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon_1 + \frac{1+i}{2}\epsilon_2,$ $e_2 = \frac{\sqrt{2} + (\sqrt{2}-2)i}{4}\epsilon_1 + \frac{2 + \sqrt{2} - \sqrt{2}i}{4}\epsilon_2,$ $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon_1 + \frac{1-i}{2}\epsilon_2$	$\tilde{c} = 0$ $\tilde{c}(r_1) = \tilde{c}(r_2) = 0$ $\tilde{c}(r_3) = \frac{1+i}{2}\epsilon_3$
$[K_{12}]^*$					
$[K_{24}]$	3	K_{24}	$[1, \frac{1+i\sqrt{7}}{2}]e_1 + [1, \frac{1+i\sqrt{7}}{2}]e_2 +$ $+ [1, \frac{1+i\sqrt{7}}{2}]e_3$	$e_1 = \epsilon_2,$ $e_2 = (1-i\sqrt{7})(\epsilon_2 + \epsilon_3)/4,$ $e_3 = (-\epsilon_1 - \epsilon_2 + \frac{1+i\sqrt{7}}{2}\epsilon_3)/2$	$\tilde{c} = 0$
$[K_{25}]$		K_{25}	$[1, \omega]e_1 + [1, \omega]e_2 + [1, \omega]e_3$	$e_1 = \epsilon_3,$ $e_2 = \frac{1-\omega}{3}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3),$ $e_3 = -\omega\epsilon_2$	
$[K_{26}]_1$		K_{26}	$[1, \omega]e_1 + [1, \omega]e_2 + [1, \omega]\sqrt{2}e_3$	$e_1 = \frac{1-\omega}{3}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3),$ $e_2 = \epsilon_3,$ $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_2 - \epsilon_3)$	
$[K_{26}]_2$			$[1, \omega]e_1 + [1, \omega]e_2 + [1, \omega]i\sqrt{\frac{2}{3}}e_3$		

Обозначение группы G	$n = \dim(V)$	$K = \text{Lin}(G_T)$	$T = \text{Tran}(G)$	$e_1, \dots, e_s$	Коды $\tilde{c}: \tilde{K} \rightarrow V$
$[F_4]_1^\alpha$	4	K_{28}	$[1, \alpha]e_1 + [1, \alpha]e_2 + [1, \alpha]\sqrt{2}e_3 + [1, \alpha]\sqrt{2}e_4,$ $\alpha \in \Omega$	$e_j = (\epsilon_{j+1} - \epsilon_{j+2})/\sqrt{2},$ $j=1, 2,$ $e_3 = \epsilon_4,$ $e_4 = (\epsilon_1 - \epsilon_2 - \epsilon_3 - \epsilon_4)/2$	$\tilde{c} = 0$
$[F_4]_2^\beta$		F_4	$[1, \beta]e_1 + [1, \frac{\beta}{2}]e_2 + [1, \beta]\sqrt{2}e_3 + [1, \frac{\beta}{2}]\sqrt{2}e_4,$ $\beta \in \Omega$		
$[F_4]_3^\gamma$			$[1, \gamma]e_1 + [1, \gamma]e_2 + [1, \frac{1+\gamma}{2}]\sqrt{2}e_3 +$ $+ [1, \frac{1+\gamma}{2}]\sqrt{2}e_4, \gamma \in \Omega$		
$[K_{29}]$		K_{29}	$[1, i]e_1 + [1, i]e_2 + [1, i]e_3 + [1, i]e_4$	$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_2 - \epsilon_4)$ $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i\epsilon_2 + \epsilon_3)$ $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\epsilon_3 + \epsilon_4)$ $e_4 = \frac{-1+i}{2\sqrt{2}}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)$	
$[K_{31}]$		K_{31}	$[1, i]e_1 + [1, i]e_2 + [1, i]e_3 + [1, i]e_4$	$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_2 - \epsilon_4)$ $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i\epsilon_2 + \epsilon_3)$ $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\epsilon_3 + \epsilon_4)$ $e_4 = \frac{-1+i}{2\sqrt{2}}(\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4)$ $e_5 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\epsilon_4$	
$[K_{31}]^K$					$\tilde{c}(r_j) = 0$ $j=1, 2, 3, 4,$ $\tilde{c}(r_5) =$ $= \frac{1+i}{2}e_5$

ОБОЗНАЧЕНИЕ ГРУППЫ G	$n = \dim(V)$	$K = \text{Lin}(G)$	$T = \text{Tran}(G)$	$e_1, \dots, e_s$	КОМУКА. $\tilde{c}: \tilde{K} \rightarrow V$
$[K_{32}]$	4	K_{32}	$[1, \omega]e_1 + [1, \omega]e_2 + [1, \omega]e_3 + [1, \omega]e_4$	$e_1 = \varepsilon_3,$ $e_2 = \frac{1-\omega}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3),$ $e_3 = -\omega\varepsilon_2,$ $e_4 = \frac{\omega^2 - \omega}{3}(-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$	$\tilde{c} = 0$
$[K_{33}]$	5	K_{33}	$[1, \omega]e_1 + \dots + [1, \omega]e_n$	$e_1 = \frac{\omega}{\sqrt{2}}(\varepsilon_5 + \varepsilon_6),$ $e_2 = -\frac{\omega}{2\sqrt{2}}(-\varepsilon_1 + (1+2\omega)\varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 + \varepsilon_6),$	
$[K_{34}]$	6	K_{34}		$e_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_{j-2} - \varepsilon_{j-1}),$ $j = 3, 4, \dots, n$	
$[E_6]^\alpha$	7	$K_{35},$ E_6	$[1, \alpha]e_1 + \dots + [1, \alpha]e_n,$ $\alpha \in \Omega$	$e_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8) / 2\sqrt{2},$	
$[E_7]^\alpha$		$K_{36},$ E_7		$e_2 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) / \sqrt{2},$	
$[E_8]^\alpha$		$K_{37},$ E_8		$e_j = (-\varepsilon_{j-2} + \varepsilon_{j-1}) / \sqrt{2},$ $j = 3, \dots, n.$	

114

Полный список пар (G_1, G_2) эквивалентных бесконечных комплексных кристаллографических групп отражений из таблицы на стр. 136-143

G_1	G_2	условие
$[G(2,1,s)]_2^{1+\omega}, s \geq 3$	$[G(2,1,s)]_3^{1+\omega}, s \geq 3$	--
$[G(2,1,s)]_2^{1+\omega}, s \geq 3$	$[G(2,1,s)]_4^{1+\omega}, s \geq 3$	--
$[G(2,1,s)]_3^i, s \geq 3$	$[G(2,1,s)]_4^i, s \geq 3$	--
$[G(2,1,2)]_2^\beta$	$[G(2,1,2)]_2^{-2/\beta}$	$-2/\beta \in \Omega$
$[G(2,1,2)]_2^{1+\omega}$	$[G(2,1,2)]_3^{1+\omega}$	--
$[G(2,1,2)]_2^\beta$	$[G(2,1,2)]_3^{1-2/\beta}$	$1-2/\beta \in \Omega$
$[G(2,1,2)]_2^\gamma$	$[G(2,1,2)]_3^{(\gamma-1)/(\gamma+1)}$	$(\gamma-1)/(\gamma+1) \in \Omega$
$[G(2,1,2)]_2^\beta$	$[G(2,1,2)]_3^{-1-2/\beta}$	$-1-2/\beta \in \Omega$
$[G(6,6,2)]_2^\beta$	$[G(6,6,2)]_2^{-3/\beta}$	$-3/\beta \in \Omega$
$[G(6,6,2)]_3^\gamma$	$[G(6,6,2)]^{(2\gamma-1)/(\gamma+1)}$	$(2\gamma-1)/(\gamma+1) \in \Omega$
$[G(6,6,2)]_2^\beta$	$[G(6,6,2)]^{-1+3/\beta}$	$-1+3/\beta \in \Omega$
$[G(6,6,2)]_2^\beta$	$[G(6,6,2)]_3^{2-3/\beta}$	$2-3/\beta \in \Omega$
$[F_4]_2^\beta$	$[F_4]_2^{-2/\beta}$	$-2/\beta \in \Omega$
$[F_4]_2^{1+\omega}$	$[F_4]_3^{1+\omega}$	--
$[F_4]_2^\beta$	$[F_4]_3^{1-2/\beta}$	$1-2/\beta \in \Omega$
$[F_4]_3^\gamma$	$[F_4]_3^{(\gamma-1)/(\gamma+1)}$	$(\gamma-1)/(\gamma+1) \in \Omega$
$[F_4]_2^\beta$	$[F_4]_3^{-1-2/\beta}$	$-1-2/\beta \in \Omega$

Литература

Структура вещественных групп отражений:

Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли*, главы IV, V, VI, Мир, Москва, 1972

Структура конечных комплексных групп отражений:

G. C. Shephard, J. A. Todd, *Finite unitary reflection groups*, Canad. J. Math. **6** (1954), 274—304

A. M. Cohen, *Finite complex reflection groups*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **9** (1976), 379–436.

G. I. Lehrer, D. E. Taylor, *Unitary Reflection Groups*, Australian Mathematical Society Lecture Series, Vol. 20, Cambridge Univ. Press, 2009

M. Broué, *Introduction to Complex Reflection Groups and Their Braid Groups*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1988, Springer-Verlag, Berlin, 2010

Структура бесконечных комплексных групп отражений:

V. L. Popov, *Discrete Complex Reflection Groups*, Lectures delivered at the Math. Institute Rijksuniversiteit Utrecht in October 1980, Commun. Math. Inst. Rijksuniv. Utrecht, Vol. 15, Rijksuniversiteit Utrecht Mathematical Institute, Utrecht, 1982 , 89 pp.

Available at

https://www.researchgate.net/publication/261552178_Discrete_complex_reflection_groups