О сильной и слабой ассоциированности некоторых функциональных классов [1]

В.Д. Степанов[2]

Санкт-Петербургский семинар по теории операторов и теории функций
г. Санкт-Петербург 2022-10-03

Обозначим $\mathfrak{M}(I)$ класс всех функций на $I := (0,\infty)$, измеримых по Лебегу, Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ (квази)нормированное пространство, $X \subset \mathfrak{M}(I)$. Наряду с понятием двойственного (сопряженного) пространства всех линейных непрерывных функционалов X^* имеет место понятие ассоциированного пространства, которое раздваивается на два случая. Пусть

$$\mathfrak{D}_X := \left\{ g \in \mathfrak{M}(I) : \int_I |fg| < \infty, \forall\, f \in X \right\}. \tag{1}$$

$\forall\ g \in \mathfrak{D}_X$ определим функционалы

$$\mathbf{J}_X(g) := \sup_{f \in X} \frac{\int_I |fg|}{\|f\|_X} \text{ и } J_X(g) := \sup_{f\in X} \frac{|\int_I fg|}{\|f\|_X}$$

и ассоциированные пространства

$$X'_s := \{g \in \mathfrak{M}(I) : \|g\|_{X'_s} := \mathbf{J}_X(g) < \infty\},$$

$$X'_w := \{g \in \mathfrak{M}(I) : \|g\|_{X'_w} := J_X(g) < \infty\},$$

которые мы называем “сильными” и “слабыми” ассоциированными пространствами, соответственно. Классической проблемой является доказательство (характеризация) рефлексивности, когда $X = X^{**}$. В указанном контексте мы имеем три повторных ассоциированных пространств: $[X'_s]'_s = [X'_s]'_w, [X'_w]'_s, [X'_w]'_w$, и проблему ассоциированной рефлексивности, которая рассматривается на примере весовых пространств Соболева $W^1_p(I), 1 < p < \infty$ первого порядка с нормой

$$\|u\|_{W^1_p(I)} := \|v_0 u\|_{L^p(I)} + \|v_1 Du\|_{L^p(I)}$$

и весовых пространств Чезаро и Копсона с нормами

$$\mathscr{C}es_{p,\beta}(I) := \{g : \|g\|_{\mathscr{C}es_{p,\beta}(I)} := \left(\int_0^\infty \left| \frac{1}{x^\beta} \int_0^x g \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty\},\ \beta > 1 - \frac{1}{p}$$

и

$$\mathscr{C}op_{p,\gamma}(I) := \{g : \|g\|_{\mathscr{C}op_{p,\gamma}(I)} := \left(\int_0^\infty \left| \frac{1}{x^\gamma} \int_x^\infty g \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty\},\ \gamma < 1 - \frac{1}{p}.$$

Пространства $\mathscr{C}es_{p,\beta}(I)$ и $\mathscr{C}op_{p,\gamma}(I)$ являются неполными нормированными пространствами.

---

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда, проект 19-01-00087.
[2]Математический институт РАН им. В.А. Стеклова, Москва, Россия. E-mail: stepanov@mi-ras.ru

Список литературы

[1] Д. В. Прохоров, В. Д. Степанов, Е. П. Ушакова, *Характеризация функциональных пространств, ассоциированных с весовыми пространствами Соболева первого порядка на действительной оси*, *УМН*, **74**:6 (2019), 119–158.

[2] V.D. Stepanov, E.P. Ushakova, *On weak associated reflexivity of weighted Sobolev spaces of the first order on real line*, arXiv:2206.02189v2 [math.FA] 7 Jun 2022.

[3] V.D. Stepanov, *On Cesàro and Copson type function spaces. Reflexivity*, *J. Math. Anal. Appl.*, **507**:1 (2022), Paper No. 125764, 18 pp.