Картина Шредингера

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \supset S(\mathbb{R})$$

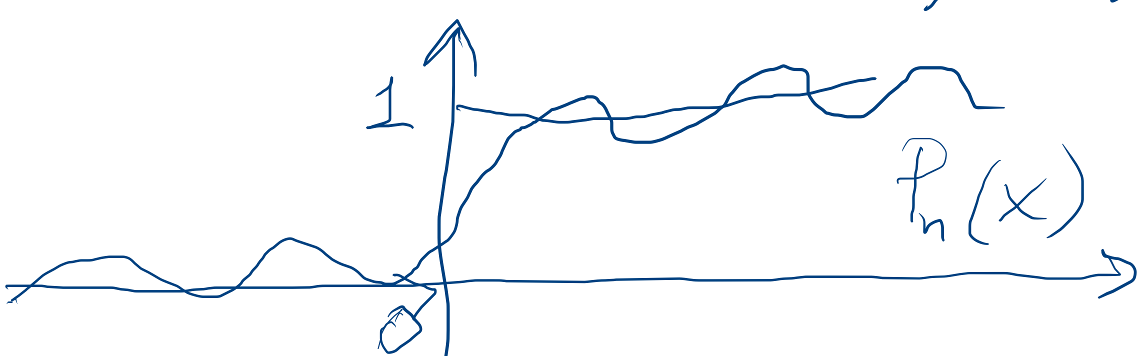
волновая ф-ция в коорд. предст.

$$(\hat{q}\psi)(x) = x\psi(x), \quad \psi \in D(\hat{q})$$

$$(f(\hat{q})\psi)(x) = f(x)\psi(x), \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$f(\hat{q}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \hat{q}^n$$

$$f(x) = \chi_B(x) = \begin{cases} 1, & x \in B \\ 0, & x \notin B \end{cases}$$



$$\chi_B(\hat{q})\psi \overset{def}{=} \chi_B(x)\psi(x)$$

$$\chi_B^+ = \chi_B^2 = \chi_B$$

$$\rho = \sum_n \pi_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|$$

$$\pi_n \geq 0, \quad \sum_n \pi_n = 1$$

$$\mu_\rho^{\hat q}(B) = \operatorname{Tr} \rho \chi_B(\hat q) = \sum_n \pi_n \int_B |\psi_n(x)|^2 dx$$

Аксиома полнота

$$\mu_\rho \xmapsto{?} \rho$$

$$(\hat p \psi)(x) = -i\psi'(x)$$

$$(\mathcal{F}\psi)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixy} \psi(y)\, dy$$

$$\boxed{\hat{p} = \mathcal{F}^{-1} \hat{q} \mathcal{F}}$$

$$\hat{\psi}(x) \overset{def}{=} (\mathcal{F}\psi)(x) \quad \Rightarrow \quad \psi = \mathcal{F}^{-1} \hat{\psi}$$

$$\|\psi\| = 1 \quad \Rightarrow \|\hat{\psi}\| = 1$$

$\hat{\psi}$ – волновая ф-ия в импульсном предст.

$$\mathcal{F}|n\rangle = (-i)^n |n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\langle x | n \rangle = \frac{1}{2^n n!} \frac{1}{\pi^{1/4}} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d}{dx} e^{-x^2}$$

$$\langle n, m \rangle = \delta_{nm} \qquad \psi = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle n | \psi \rangle |n\rangle$$

$$(f,g) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx$$

$$\mu_{\hat{p}}^{\hat{p}}(x) = \sum_n \pi_n \int_B |\hat{\psi}_n(x)|^2\,dx$$

$$\psi(x) \longrightarrow \mathcal{F}\psi = \hat{\psi}$$

$$|\psi_p(x)|^2 \qquad\qquad |\hat{\psi}_p(x)|^2$$

$$\hat{a} = \frac{\hat{q} + i\hat{p}}{\sqrt{2}}, \quad \hat{a}^+ = \frac{\hat{q} - i\hat{p}}{\sqrt{2}}$$

$$[\hat{q}, \hat{p}] = iI \Rightarrow [\hat{a}^+, \hat{a}] = I$$

$$-i\frac{d}{dx}$$

$$\mathcal{F}a^+ = -ia^+\mathcal{F}$$

$$\hat{a}\psi_0 = 0 \Rightarrow a\mathcal{F}\psi_0 = 0$$

$$|0\rangle \equiv \psi_0 \quad \hat{a} = \frac{x + \frac{d}{dx}}{\sqrt{2}}$$

$$\sim e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\langle x|0\rangle = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\mathcal{F}|0\rangle = |0\rangle$$

$$\mathcal{F}\underbrace{(a^+)^n|0\rangle}_{\sim |n\rangle} = (-i)^n (a^+)^n \underbrace{\mathcal{F}|0\rangle}_{\parallel \atop |0\rangle}$$

$$\mathcal{F}|n\rangle = (-i)^n |n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Проблема Паули

$$|\psi(x)|^2, \quad |\psi^1(x)|^2 \to \psi(x)$$

$$\psi(x) = |\psi(x)| e^{i\alpha(x)}$$

$$\hat{a}^{+}|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\hat{a}\,|0\rangle = 0$$

$$\hat{a}^{+}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^{+} = I$$ – канонические коммутационные соотношения

$$\parallel$$

$$[\hat{a}^{+}, \hat{a}]$$

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2 + \hat{q}^2}{2} = \frac{1}{2} I + \hat{a}^{+}\hat{a},$$

гамильтониан квантового гармонического осциллятора

$$\hat{a}^+\hat{a}\,|n\rangle = n\,|n\rangle, \quad n=0,1,2,\ldots$$

Предложение. $\hat{F} = e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{a}^+\hat{a}}$

$$\hat{a}^+\hat{a}\,\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}_n$$

$$f(x) = e^{-i\frac{\pi}{2}x}$$

$$\mathcal{H}_n = \{\mathbb{C}\,|n\rangle\}$$

$$f(\hat{a}^+\hat{a}) = \bigoplus_n f(\hat{a}^+\hat{a})\big|_{\mathcal{H}_n}$$

$$f(\hat{a}^+\hat{a})|n\rangle \overset{def}{=} f(n)\,|n\rangle$$

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$$

$$e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{a}^+\hat{a}}\,|n\rangle = e^{-i\frac{\pi}{2}n}\,|n\rangle = (-i)^n\,|n\rangle$$

$$U_\varphi = e^{-i\varphi \hat{a}^+ \hat{a}}, \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$\mathcal{H} = \bigoplus_n \mathcal{H}_n \qquad T_n : \mathcal{H}_n \to \mathcal{H}_n$$

$$\psi = \bigoplus_n \psi_n \qquad \|T_n\|$$

$$T\psi \overset{def}{=} \bigoplus_n T_n \psi_n$$

$$\psi \in \mathcal{D}(T) = \left\{ \psi : \sum_n \|T_n \psi_n\|^2 < +\infty \right\}$$

$$\left\| e^{-i\frac{\pi}{2} n k} \psi_n \right\|^2 = \|\psi_n\|^2$$

Задача. Найти интегральное представление для $U_\varphi = e^{-i\varphi \hat{a}^+ \hat{a}}$,

генератор

$$U_{\varphi_1} \cdot U_{\varphi_2} = U_{\varphi_1+\varphi_2} \quad \forall \varphi_1, \varphi_2$$

$$U_0 = I$$

$(U_\varphi)_{\varphi \in \mathbb{R}}$ — однопараметрическая группа

$$U_\varphi |n\rangle = e^{-in\varphi} |n\rangle$$

$$\boxed{U_{\frac{\pi m}{2n}} = \mathcal{F}^{\frac{m}{n}}}$$

$$\left(U_{\frac{\pi}{2n}}\right)^n = U_{\frac{\pi}{2}} = \mathcal{F} \Rightarrow (U_\varphi)$$ — дробное преобразование Фурье

$$\hat{x}_\varphi = U_\varphi^+ \hat{q}\, U_\varphi$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \hat{x}_{\frac{\pi}{2}} = \hat{p}$$

$$U_\varphi = e^{-i\varphi \hat{a}^+ \hat{a}}$$

$$\frac{d}{d\varphi}\hat{x}_\varphi = i[\hat{a}^+\hat{a}, \hat{x}_\varphi]$$

$$\hat{x}_0 = \hat{q}$$

$$\hat{x}_\varphi = \alpha(\varphi)\hat{q} + \beta(\varphi)\hat{p}$$

$$\left.\frac{d}{d\varphi}\hat{x}_\varphi\right|_{\varphi=0} = i[\hat{a}^+a, \hat{q}] = \frac{i}{2}[\hat{p}^2, \hat{q}] = \hat{p}$$

$$\hat{a}^+a = \frac{\hat{q}^2+\hat{p}^2}{2} - \frac{1}{2}\mathbb{1}$$

$$\hat{x}_0 = \hat{q}$$

$$U_\varphi^+ \hat{q} U_\varphi = \cos\varphi\, \hat{q} + \sin\varphi\, \hat{p}$$

$$U_\varphi^+ \hat{p} U_\varphi = -\sin\varphi\, \hat{q} + \cos\varphi\, \hat{p}$$

$\Rightarrow$ вращение в фазовой плоскости

$$\psi \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \hat{\psi} = \mathcal{F}\psi = e^{-i\frac{\pi}{2}\hat{a}^+\hat{a}}\psi$$

в коорд предст — в импульсном предст

$$\psi_\varphi \stackrel{def}{=} U_\varphi \psi$$ — волновая функция в представлении, связанном с

$\hat{x}_\varphi = \cos\varphi\, \hat{q} + \sin\varphi\, \hat{p}$ — "гомодинное измерение"

$$\mu_\varphi(B) = \sum_n \pi_n \int_B |\psi_\varphi(x)|^2 dx$$

$$\uparrow$$

$$-x$$

— оптическая квантовая томограмма

$$\cos(\varphi+\pi)\hat{q} + \sin(\varphi+\pi)\hat{p} =$$

$$= -\cos\varphi\,\hat{q} - \sin(\varphi)\,\hat{p}$$

$$|\psi_{\varphi+\pi}(x)|^2 = |\psi_\varphi(-x)|^2$$

Достаточно знать $\varphi \in [0, \pi]$