Основы теории открытых квантовых систем. Лекция 5. Многовременные корреляционные функции. Унитарная динамика 2-уровневой системы

Теретёнков Александр Евгеньевич

11 октября 2022 г.

В прошлой серии...

Классическая марковская цепь задаётся

$$\mathbb{P}(\xi_t = k|\xi_s = m) = (P_{t-s})_{km}, \qquad t \geqslant s$$
$$\mathbb{P}(\xi_0 = m) = (p_0)_m$$

Отсюда следует

$$p_t = P_t p_0$$

(где $\mathbb{P}(\xi_t = m) = (p_t)_m$) и полугпповое свойство

$$P_t P_s = P_{t+s}, \forall t \geqslant, s \geqslant 0 \qquad P_0 = I$$

Корреляционные функции в случае классических марковских цепей

$$\mathbb{E}x_{\xi(t_N)} \cdots x_{\xi(0)} =$$
$$= \sum_{k_N, \cdots, k_0} x_{k_N} (P_{t_N - t_{N-1}})_{k_N, k_{N-1}} \cdots x_{k_1} (P_{t_1})_{k_1, k_0} x_{k_0} (p_0)_{k_0}$$

Корреляционные функции в случае классических марковских цепей

$$
\mathbb{E}x_{\xi(t_N)} \cdots x_{\xi(0)} =
$$

$$
= \sum_{k_N, \cdots, k_0} x_{k_N} (P_{t_N - t_{N-1}})_{k_N, k_{N-1}} \cdots x_{k_1} (P_{t_1})_{k_1, k_0} x_{k_0} (p_0)_{k_0}
$$

$$
\mathbb{E}x_{\xi(t_1)} x_{\xi(0)} = \sum_{k_1, k_0} x_{k_1} (P_{t_1})_{k_1, k_0} x_{k_0} (p_0)_{k_0} = x^T P_{t_1} (x \circ p_0) =
$$

$$
= (x(t_1) \circ x(0))^T p_0 = \mathbb{E}(x(t_1) \circ x(0))_{\xi_0}
$$

Корреляционные функции в случае классических марковских цепей

$$\mathbb{E}x_{\xi(t_N)}\cdots x_{\xi(0)} = $$
$$= \sum_{k_N,\cdots,k_0} x_{k_N}(P_{t_N-t_{N-1}})_{k_N,k_{N-1}}\cdots x_{k_1}(P_{t_1})_{k_1,k_0}x_{k_0}(p_0)_{k_0}$$

$$\mathbb{E}x_{\xi(t_1)}x_{\xi(0)} = \sum_{k_1,k_0} x_{k_1}(P_{t_1})_{k_1,k_0}x_{k_0}(p_0)_{k_0} = x^T P_{t_1}(x\circ p_0) =$$
$$= (x(t_1)\circ x(0))^T p_0 = \mathbb{E}(x(t_1)\circ x(0))_{\xi_0}$$

$$\mathbb{E}x_{\xi(t_1)}y_{\xi(0)} = \mathbb{E}(x(t_1)\circ y(0))_{\xi_0}$$

Корреляционные функции в случае классических марковских цепей

$$\mathbb{E}x_{\xi(t_N)}\cdots x_{\xi(0)} = \\ = \sum_{k_N,\cdots,k_0} x_{k_N}(P_{t_N-t_{N-1}})_{k_N,k_{N-1}}\cdots x_{k_1}(P_{t_1})_{k_1,k_0}x_{k_0}(p_0)_{k_0}$$

$$\mathbb{E}x_{\xi(t_1)}x_{\xi(0)} = \sum_{k_1,k_0} x_{k_1}(P_{t_1})_{k_1,k_0}x_{k_0}(p_0)_{k_0} = x^T P_{t_1}(x\circ p_0) = \\ = (x(t_1)\circ x(0))^T p_0 = \mathbb{E}(x(t_1)\circ x(0))_{\xi_0}$$

$$\mathbb{E}x_{\xi(t_1)}y_{\xi(0)} = \mathbb{E}(x(t_1)\circ y(0))_{\xi_0}$$

$$\frac{d}{dt}x(t_1)\circ y(0) = (Lx(t_1))\circ y(0)$$

Двухвременные корреляционные функции в случае унитарной динамики

Пусть $U(t) = e^{-iHt}$, тогда

$$\begin{aligned}\langle X(t)Y(s)\rangle = \operatorname{Tr} X(t)Y(s)\rho &= \operatorname{Tr} U^\dagger(t)XU(t)U^\dagger(s)YU(s)\rho = \\ &= \operatorname{Tr} XU(t-s)YU(s)\rho U^\dagger(s)U^\dagger(t-s) = \\ &= \operatorname{Tr} YU(s-t)U(t)\rho U^\dagger(t)XU^\dagger(s-t)\end{aligned}$$

Двухвременные корреляционные функции в случае унитарной динамики

Пусть $U(t) = e^{-iHt}$, тогда

$$\begin{aligned}\langle X(t)Y(s)\rangle = \operatorname{Tr} X(t)Y(s)\rho = \operatorname{Tr} U^\dagger(t)XU(t)U^\dagger(s)YU(s)\rho = \\ = \operatorname{Tr} XU(t-s)YU(s)\rho U^\dagger(s)U^\dagger(t-s) = \\ = \operatorname{Tr} YU(s-t)U(t)\rho U^\dagger(t)XU^\dagger(s-t)\end{aligned}$$

$$\Phi_t = U(t) \cdot U^\dagger(t)$$

$$\langle X(t)Y(s)\rangle = \operatorname{Tr} \Phi_t^*(X)\Phi_s^*(Y)\rho$$
$$\langle X(t)Y(s)\rangle = \operatorname{Tr} X\Phi_{t-s}(Y\Phi_s(\rho))$$
$$\langle X(t)Y(s)\rangle = \operatorname{Tr} Y\Phi_{s-t}(\Phi_t(\rho)X)$$

Двухвременные корреляционные функции

Чем плох выбор $\langle X(t)Y(s)\rangle = \operatorname{Tr} \Phi_t^*(X)\Phi_s^*(Y)\rho$?

Двухвременные корреляционные функции

Чем плох выбор $\langle X(t)Y(s)\rangle = \operatorname{Tr} \Phi_t^*(X)\Phi_s^*(Y)\rho$?

Вообще говоря, $\langle X(t)Y(t)\rangle = \operatorname{Tr} \Phi_t^*(X)\Phi_t^*(Y)\rho \neq \langle (XY)(t)\rangle$.

Двухвременные корреляционные функции

Чем плох выбор $\langle X(t)Y(s)\rangle = \mathrm{Tr}\, \Phi_t^*(X)\Phi_s^*(Y)\rho$?

Вообще говоря, $\langle X(t)Y(t)\rangle = \mathrm{Tr}\, \Phi_t^*(X)\Phi_t^*(Y)\rho \neq \langle (XY)(t)\rangle$.

Более того, в классическом случае, при $t \geqslant s$

$$\mathbb{E} x_{\xi(t)} y_{\xi(s)} = \sum_{klm} x_k (P_{t-s})_{kl} y_l (P_s)_{lm} p_m$$

Двухвременные корреляционные функции

Чтобы согласовать с классической динамикой при $t \geqslant s$

$$\mathbb{E} x_{\xi(t)} y_{\xi(s)} = \sum_{klm} x_k (P_{t-s})_{kl} y_l (P_s)_{lm} p_m$$

нужно выбрать

$$\langle X(t) Y(s) \rangle = \operatorname{Tr} X \Phi_{t-s}(Y \Phi_s(\rho)), \qquad t \geqslant s$$

Двухвременные корреляционные функции

Чтобы согласовать с классической динамикой при $t \geqslant s$

$$\mathbb{E} x_{\xi(t)} y_{\xi(s)} = \sum_{klm} x_k (P_{t-s})_{kl} y_l (P_s)_{lm} p_m$$

нужно выбрать

$$\langle X(t) Y(s) \rangle = \operatorname{Tr} X \Phi_{t-s}(Y \Phi_s(\rho)), \qquad t \geqslant s$$

Аналогично, при $t \leqslant s$

$$\mathbb{E} x_{\xi(t)} y_{\xi(s)} = \sum_{klm} y_k (P_{s-t})_{kl} x_l (P_t)_{lm} p_m$$

поэтому

$$\langle X(t) Y(s) \rangle = \operatorname{Tr} Y \Phi_{s-t}(\Phi_t(\rho) X), \qquad t \leqslant s$$

Двухвременные корреляционные функции

Регрессионная формула

$$\langle X(t)Y(s)\rangle = \begin{cases} \operatorname{Tr} X\Phi_{t-s}(Y\Phi_s(\rho)), & t \geqslant s \\ \operatorname{Tr} Y\Phi_{s-t}(\Phi_t(\rho)X), & t \leqslant s \end{cases}$$

Многовременные корреляционные функции

Упорядоченная корреляционная функция: $t_N \geqslant \cdots \geqslant t_1 \geqslant 0$

$$\langle X^{(N)}(t_N) \cdot \ldots \cdot X^{(0)}(0) \rangle = \operatorname{Tr} X^{(N)} \Phi_{t_N - t_{N-1}}(\ldots X^{(1)} \Phi_{t_1}(X^{(0)} \rho))$$

Многовременные корреляционные функции

Обобщённая регрессионная формула: $t_N \geqslant \cdots \geqslant t_1 \geqslant 0$

$$\langle Y^{(0)}(0) \cdot \ldots \cdot Y^{(N)}(t_N) X^{(N)}(t_N) \cdot \ldots \cdot X^{(0)}(0) \rangle =$$
$$= \mathrm{Tr}\, X^{(N)} \Phi_{t_N - t_{N-1}}(\ldots X^{(1)} \Phi_{t_1}(X^{(0)} \rho Y^{(0)}) Y^{(1)} \ldots) Y^{(N)}$$

Многовременные корреляционные функции

Обобщённая регрессионная формула: $t_N \geqslant \dots \geqslant t_1 \geqslant 0$

$$\langle Y^{(0)}(0) \cdot \dots \cdot Y^{(N)}(t_N) X^{(N)}(t_N) \cdot \dots \cdot X^{(0)}(0) \rangle =$$
$$= \operatorname{Tr} X^{(N)} \Phi_{t_N - t_{N-1}}(\dots X^{(1)} \Phi_{t_1}(X^{(0)} \rho Y^{(0)}) Y^{(1)} \dots) Y^{(N)}$$

Вообще говоря обобщённая регрессионная формула определяет не все корреляционные функции.

Упражнение. Для каких $t \geqslant 0, s \geqslant 0, r \geqslant 0$ обобщённая регрессионная формула не позволяет определить $\langle X(t) Y(s) Z(r) \rangle$? (В ответе предполагается неравенство или набор неравенств для t, s, r.)

Базовый пример: 2-х уровневая система (q-бит, TLS)

Матрицы Паули

$$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Базовый пример: 2-х уровневая система (q-бит, TLS)

$$\sigma_k \sigma_l = \delta_{kl} I + i \varepsilon_{klm} \sigma_m$$

$$\operatorname{Tr} \sigma_k = 0, \qquad \operatorname{Tr} \sigma_k \sigma_l = 2\delta_{kl}$$

Матрицы Паули вместе с единичной матрицей образуют ортогональный базис относительно следового скалярного произведения.

Базовый пример: 2-х уровневая система (q-бит, TLS)

$$
\begin{aligned}
(\vec{a},\vec{\sigma})(\vec{b},\vec{\sigma}) &= (\vec{a},\vec{b})I + i([\vec{a}\times\vec{b}],\vec{\sigma}) \\
[(\vec{a},\vec{\sigma}),(\vec{b},\vec{\sigma})] &= 2i([\vec{a}\times\vec{b}],\vec{\sigma})
\end{aligned}
$$

Упражнение.

$$
(\vec{a},\vec{\sigma})(\vec{b},\vec{\sigma})(\vec{c},\vec{\sigma}) = (\vec{d},\vec{\sigma}) + id_0 I \qquad \vec{d}-? \quad d_0-?
$$

Базовый пример: 2-х уровневая система (q-бит, TLS)

Вектор Блоха (coherence vector)

$$\rho = \frac{1}{2}(I + (\vec{v}, \vec{\sigma})), \qquad |\vec{v}| \leqslant 1$$

Состояния $|\vec{v}| = 1$ соответствуют чистым состояниям.

Базовый пример: 2-х уровневая система (q-бит, TLS)

Вектор Блоха (coherence vector)

$$\rho = \frac{1}{2}(I + (\vec{v}, \vec{\sigma})), \qquad |\vec{v}| \leqslant 1$$

Состояния $|\vec{v}| = 1$ соответствуют чистым состояниям.
Упражнение. Докажите

$$\vec{v} = \operatorname{Tr} \rho \vec{\sigma}$$

Унитарная динамика TLS

Гамильтониан общего вида $H = \frac{1}{2}(\vec{\omega}, \vec{\sigma})$ (в частности $H = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z$).

$$\frac{d}{dt}\rho = -i[H, \rho]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(I + (\vec{v}, \vec{\sigma}))\right) = -i\left[\frac{1}{2}(\vec{\omega}, \vec{\sigma}), \frac{1}{2}(I + (\vec{v}, \vec{\sigma}))\right]$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d}{dt}\vec{v}, \vec{\sigma}\right) = -i\frac{1}{4} \cdot 2i([\vec{\omega} \times \vec{v}], \vec{\sigma})$$

Унитарная динамика TLS

Уравнение Блоха

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{v}]$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \Omega_{\mathrm{Re}} \\ \Omega_{\mathrm{Im}} \\ \omega_0 \end{pmatrix}$$

или в матричном виде

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & \Omega_{\mathrm{Im}} \\ \omega_0 & 0 & -\Omega_{\mathrm{Re}} \\ -\Omega_{\mathrm{Im}} & \Omega_{\mathrm{Re}} & 0 \end{pmatrix} \vec{v}$$