

Многоженны Шуберта
для классических групп

Е. Ю. Смирнов (ВШЭ, НМУ)
совм. с А. А. Тутубаловой (ВШЭ)

arXiv: 2009.14120

Eur. J. Comb. 107 (January 2023)

19 окт 2022 2022

План:

- Напоминание о типе A: - многочлены Шуберта
- pipe dreams
- Типы B-C-D: - многочлены Шуберта
- эквивар. многочлены Шуберта
- конструкция pipe dreams
- Грассмановы перестановки

Многообразия флагов и многомерный Шуберта

- $G = GL(V)$, $B = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$, $B^- = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & * \end{pmatrix}$
- $G/B = \bigsqcup_{w \in W} B^- w B / B$, $W = N_G(T)/T \simeq S_n$
- $X_w = \overline{B^- w B / B}$ многообразия Шуберта
- $H^*(G/B, \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{w \in W} \mathbb{Z} \cdot \sigma_w$, $\sigma_w = [X_w] \in H^{2(N-d)}(G/B, \mathbb{Z})$,
как абелева группа $N = \frac{n(n-1)}{2}$, $d = \ell(w)$.

$$\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n] / I \xrightarrow{\sim} H^*(G/B, \mathbb{Z})$$

Представление Бореля
(обобщено Костантом)

$$x_i \longmapsto c_i(L_i),$$

$$L_i = \mathcal{V}_i / \mathcal{V}_{i-1}$$

Таблицы вект.
раскл-я

$$I = (x_1 + \dots + x_n, \dots, x_1 \dots x_n) = (\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]_+^{S_n})$$

Вопрос Найти "хорошие" представители $[X_w] \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$.

Ответ (Бернштейн, Гельфанд, Гельфанд '73)

Пусть $P(x_1, \dots, x_n)$ представляет $[pt] = [X_{w_0}]$

Операторы разделённых разностей:

Пусть $\partial_i f = \frac{f - s_i f}{x_i - x_{i+1}}$, где $s_i : x_i \leftrightarrow x_{i+1}$.

Тогда $[X_{w_0 w}]$ представляется многочленом

$\partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} P$, где $w = s_{i_k} \dots s_{i_1}$ привед. разл.-е
 $w_0 \in S_n$ самый длинный эл-т

Многочлены Шуберта (Lascoux, Schützenberger '82)

Самый лучший выбор: $P = x_1^{n-1} x_2^{n-2} \dots x_{n-1} = \zeta_{w_0}$

$$\zeta_{w_0 w} = \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} \zeta_{w_0}.$$

Чем хороши многочлены Шуберта?

Теор (Lascoux, Schützenberger) σ_w однок. определены условиями

- $\sigma_{id} = 1$;

$$\deg \sigma_w = \ell(w)$$

- $\partial_i \sigma_w = \begin{cases} \sigma_{ws_i}, & \ell(ws_i) < \ell(w), \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$;

- σ_w стабильны отн. вложения $S_n \hookrightarrow S_{n+1}$;

- σ_w образуют базис в $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$, $w \in S_\infty$.

Стабильность: $\sigma_w \in H^*(Fl(n), \mathbb{Z})$, $Fl(n) = GL_n/B_n$,

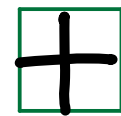
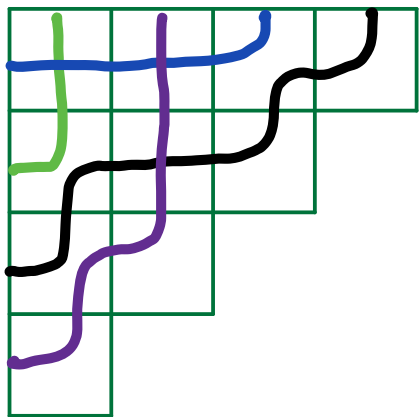
$$Fl(n) \hookrightarrow Fl(n+1)$$

$$H^*(Fl(n+1), \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow H^*(Fl(n), \mathbb{Z}).$$

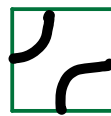
$$\sigma_w^{(\infty)} = \varprojlim \sigma_w \in \varprojlim H^*(Fl(n), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$$

! σ_w — полиномиальный представитель класса $\sigma_w^{(\infty)}$!

Pipe dreams



к р е с т



КОЛЕНО

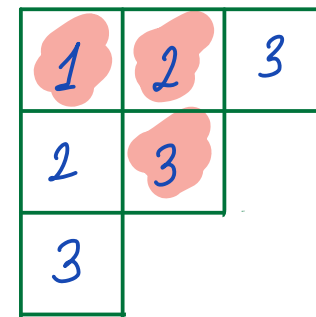


приведенность

Pipe dream P $\begin{cases} \text{форма } sh P \in S_n \\ \text{моном } x^P = \prod \end{cases}$

монотон $x^p = \prod x_i^{d_i}$

$d_i = \# \text{ крестов}$
в i -й строке



$$\text{sh } P = S_2 S_1 S_3 = \underline{3142}$$

$$x^p = x_1^2 x_2$$

Теор (Фомин-Курилов, Villey-Bergeron)

Следствие: $\zeta_w \in \mathbb{Z}_+[x_1, x_2, \dots]$.

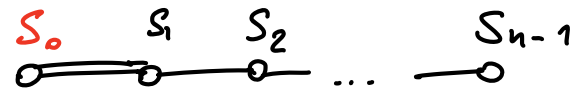
$$\zeta_w = \sum_{p: sh p = w} x^p.$$

Двойные м.ч-ны Шуберта

$$\zeta_\omega(x, t) = \sum \prod (x_i - t_j) \text{ предст. } \sigma_\omega^T \in H_T^*(G/B)$$

Типы B-C-D

Группа Вейля $B_n = C_n$:



Гипероктаэдральная группа:

$$SO(2n+1), \quad Sp(2n)$$

$$w: \{\pm 1, \dots, \pm n\} \rightarrow \{\pm 1, \dots, \pm n\},$$

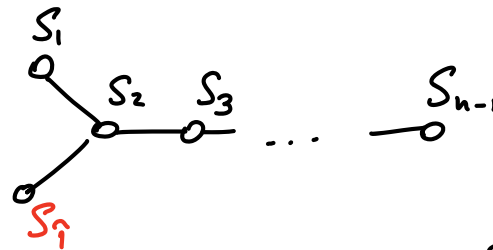
$$w(i) = j \Leftrightarrow w(-i) = -j.$$

образующие $s_i: i \leftrightarrow i+1, \quad i \geq 1$

$$(s_0 s_1)^4 = (s_i s_{i+1})^3 = Id.$$

$$s_0: 1 \leftrightarrow -1$$

D_n : подгр. индекса 2



чётное число смен знака

$$SO(2n)$$

$$s_1 s_{\hat{1}} = s_{\hat{1}} s_1$$

$$(s_1 s_2)^3 = (s_{\hat{1}} s_2)^3 = Id$$

$$s_{\hat{1}} = s_0 s_1 s_0$$

$$G/B = \bigsqcup_{w \in W} B^- w B / B,$$

$$X_w = \overline{B^- w B / B} \text{ — м-е Шуберта}$$

$$\sigma_w = [X_w] \in H^*(G/B)$$

$$H^*(G/B) \simeq \mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n] / (\mathbb{Z}[z_1, \dots, z_n]_+^W)$$

См. также : S. Fomin,
An. Kirillov '96

$$\sigma_w^{(\infty)} = \varprojlim \sigma_w \text{ представлено элементом из } \mathbb{Z}[[z_1, z_2, \dots]].$$

Вопрос Найти хорошие представители $\mathcal{F}_w$ для σ_w .

Ответ (Billey, Haiman '95): суц. ед. эл-ты вида

$$\mathcal{F}_w \in \mathbb{Q}[z_1, z_2, \dots, p_1(z), p_3(z), p_5(z), \dots]$$

$p_i(z) = z_1^i + z_2^i + \dots$
Ньютоновские суммы

НЗ: $p_2, p_4, p_6, \dots$ инвар. относительно B_n (и D_n тоже!)

Новые
разд.
операторы
разностей:

$$\partial_0 f = \frac{f - s_0 f}{-2z_1}; \quad \partial_0^B f = \frac{f - s_0 f}{-z_1}; \quad \partial_1 f = \frac{f - s_1 f}{-z_1 - z_2}.$$

Пополнительность

Заменяем $\mathbb{Q}[z_1, z_2, \dots, p_1(z), p_3(z), \dots]$ на

$$\mathbb{Q}[z_1, z_2, \dots, p_1(x), p_3(x), \dots]$$

15

$$\mathbb{Q}[z_1, z_2, \dots] \otimes \Lambda_{\mathbb{Q}}[x_1, x_2, \dots]$$

многотелы от z

симм функции от x

Изоморфизм: $p_i(x) = -p_i(z)/2$.

Теор. (Billey, Haiman '95): коэф-ты $\mathcal{F}_w(z, x) \in \mathbb{Z}[z_1, z_2, \dots] \otimes \Lambda[x]$ —
целые неотриц. числа!

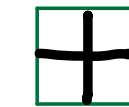
Эквивариантная версия: T. Ikeda, L. Mihalcea, H. Naruse '11

$\mathcal{F}_w(z, x, t)$ предст. $\sigma_w^T \in H_T^*(G/B)$.

формулы с использ. родств, разд. разностей.

А бывают ли pipe dreams?

Тун В :



крест



колено



кран

← отвечает
смене знака

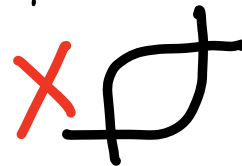


$i \geq 1$

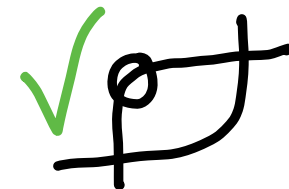
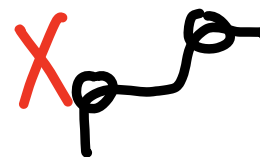
Только в



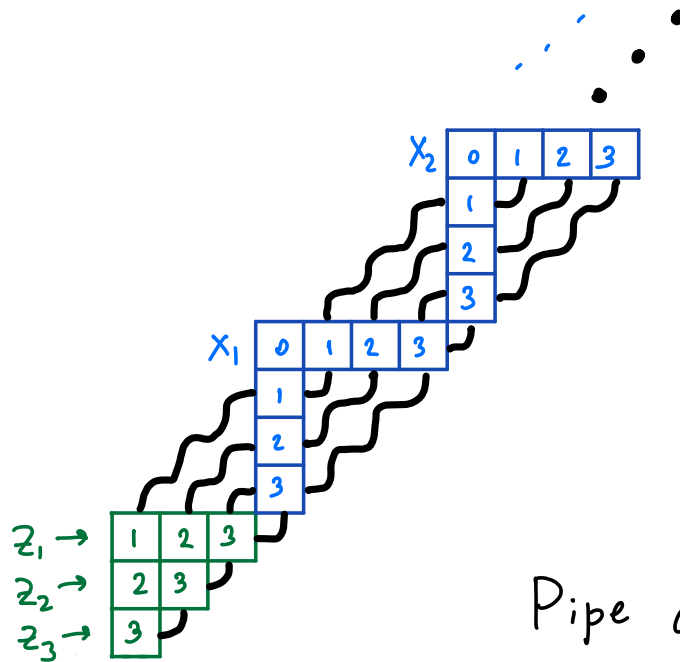
Приведённый pipe dream:



нельзя



можно



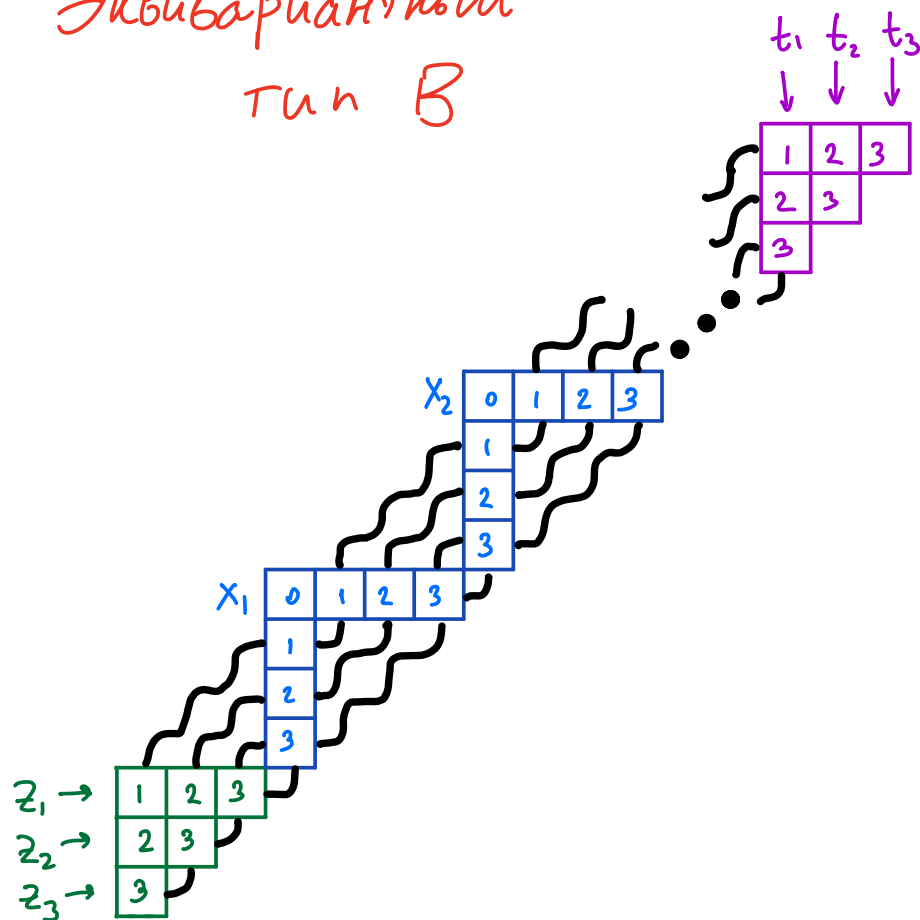
Pipe dream

$P \rightarrow$ Форма $sh P \in B_n$
 $\rightarrow$ Моном $x^{\alpha(P)} z^{\beta(P)}$

Теор. (Е.С., А.Тусубалина).

$$\mathcal{B}_w = \sum_{sh P = w} x^{\alpha(P)} z^{\beta(P)}.$$

Эквивариантный
тип В



$$P \leadsto x^{\alpha(P)} z^{\beta(P)} t^{\gamma(P)},$$

$\alpha(P)$: #крестов и крапов в

$\beta(P)$: #крестов в строках

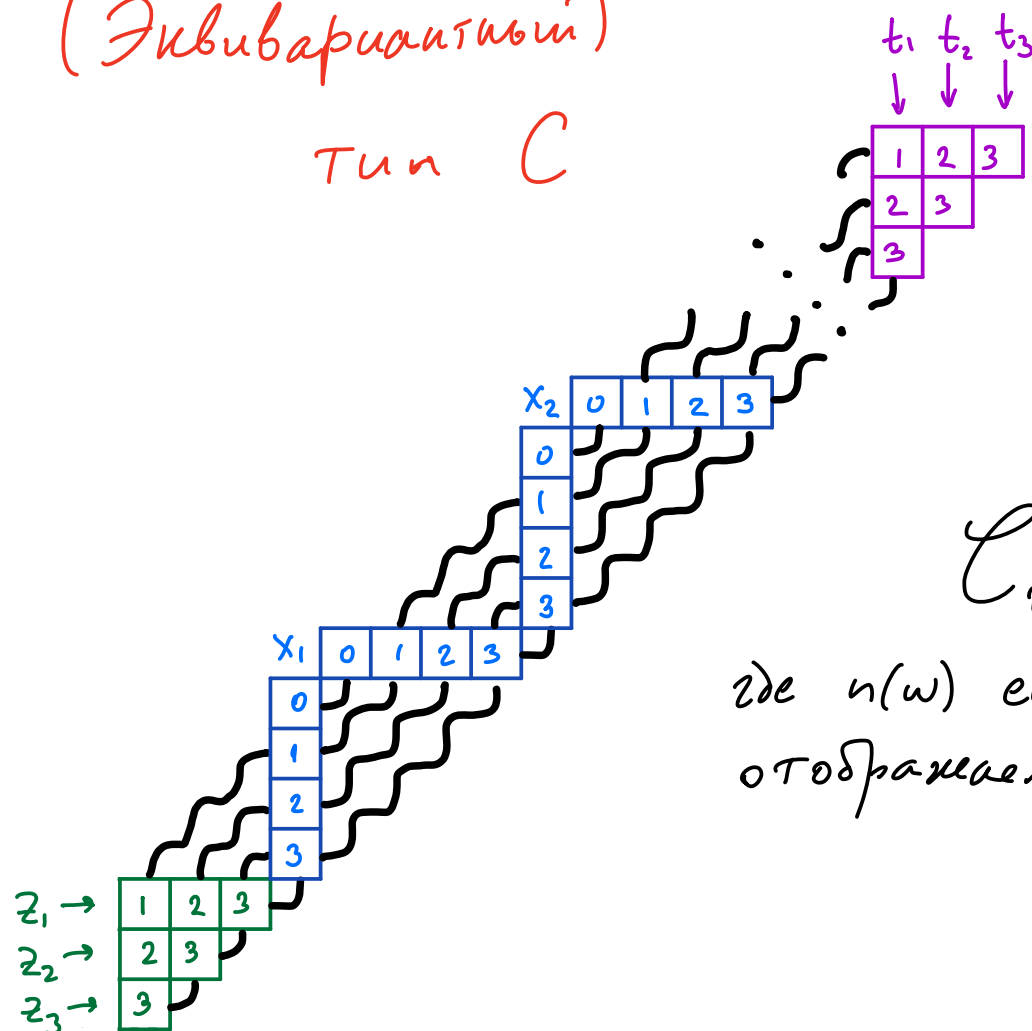
$\gamma(P)$: #крестов в столбцах

Теор $\mathcal{B}_w(x, z, t) =$

$$= \sum_{sh P = w} x^{\alpha(P)} z^{\beta(P)} (-t)^{\gamma(P)}.$$

(Эквивариантный)

Тип C

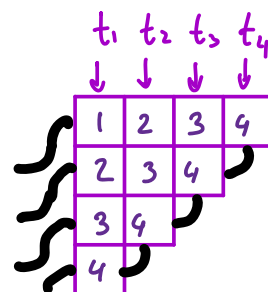
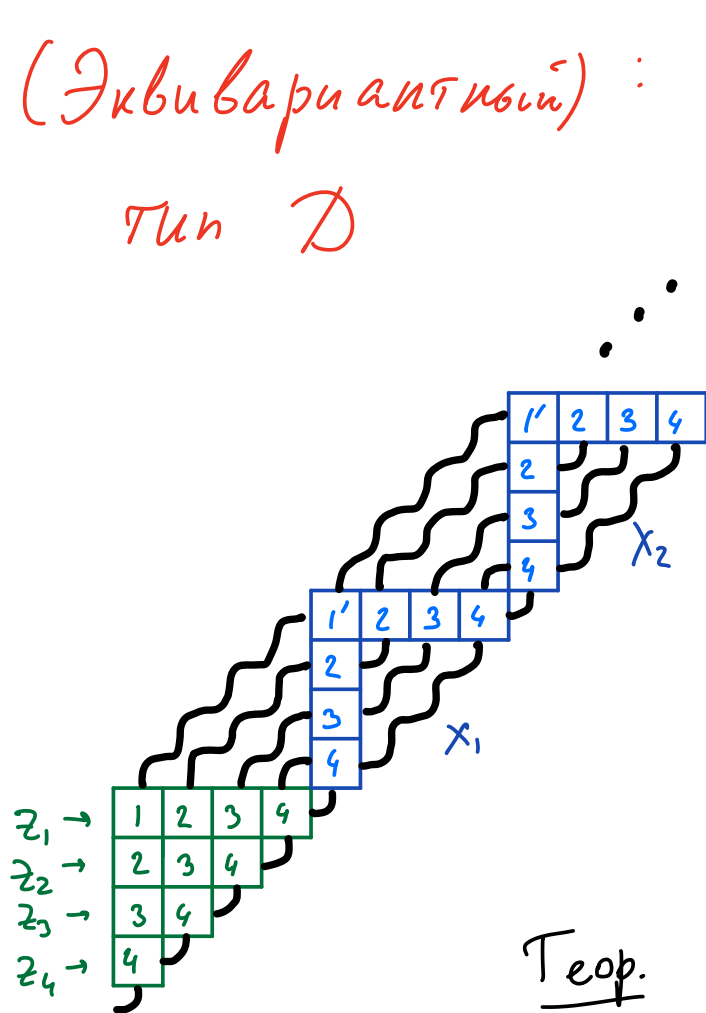


$$\mathcal{C}_w = \sum x^{\alpha(P)} z^{\beta(P)} (-t)^{\delta(P)},$$

$$\mathcal{C}_w = 2^{n(w)} \mathcal{B}_w,$$

где $n(w)$ есть число полож. элементов,
отображаемых в отрицательные

(Эквивариантный):
тип D



крест



кольцо



крест
с крапом



кольцо
с двумя
крапами

S_1

Id

S_1'

$S_1 S_1' = S_1' S_1$

Приведённые p.d. определить сложнее
(8 запрещённых паттернов)

Теор.
$$\mathcal{D}_w(x, z, t) = \sum_{sh P = w} x^{\alpha(P)} z^{\beta(P)} (-t)^{\gamma(P)}.$$

Грассмановы перестановки

Тип A: $w \in S_n$ грассманова $\Leftrightarrow w(1) < w(2) < \dots < w(k) > w(k+1) < \dots$
спуск единственный

$w \rightsquigarrow \lambda = (w(k) - k, \dots, w(1) - 1)$. диагр Юнга

$\mathcal{G}_w = S_\lambda$ Шуберт = Шур!

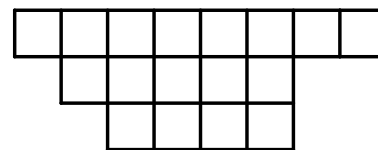
Биекция: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pipe dreams} \\ \text{формы } w \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{полустанд.} \\ \text{таблицы формы } \lambda \end{array} \right\}$
(Фольклор?)

Типы BCD: P- и Q-функции Шура

Комб. определение использует сдвинутые диагр Юнга

Теор. (Pragacz '91, Billey-Haiman '95)

$\mathcal{B}_w = P_\mu$; $\mathcal{G}_w = Q_\mu$, $\mathcal{Z}_w = P_{\mu'}$

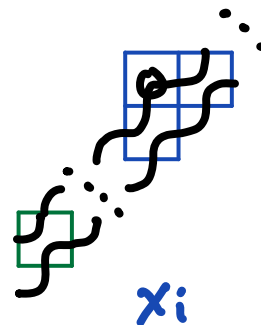


Наши pipe dreams позволяют получить биект. док-во.

Примеры.

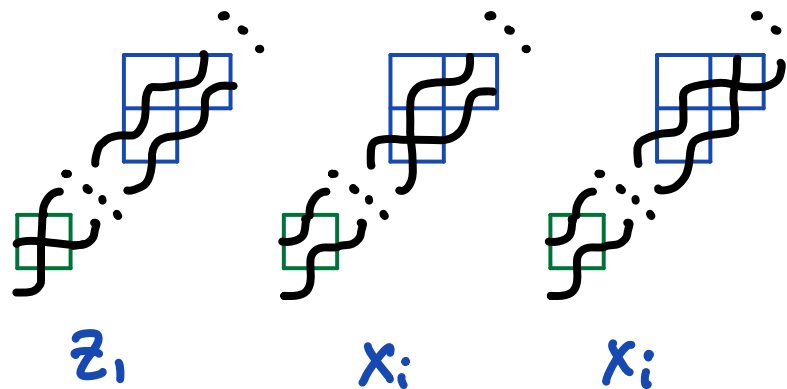
$$\textcircled{1} \quad w = \overline{1} 2 = s_0 \in B_2$$

$$\mathcal{B}_{s_0} = \sum x_i = p_1(x)$$

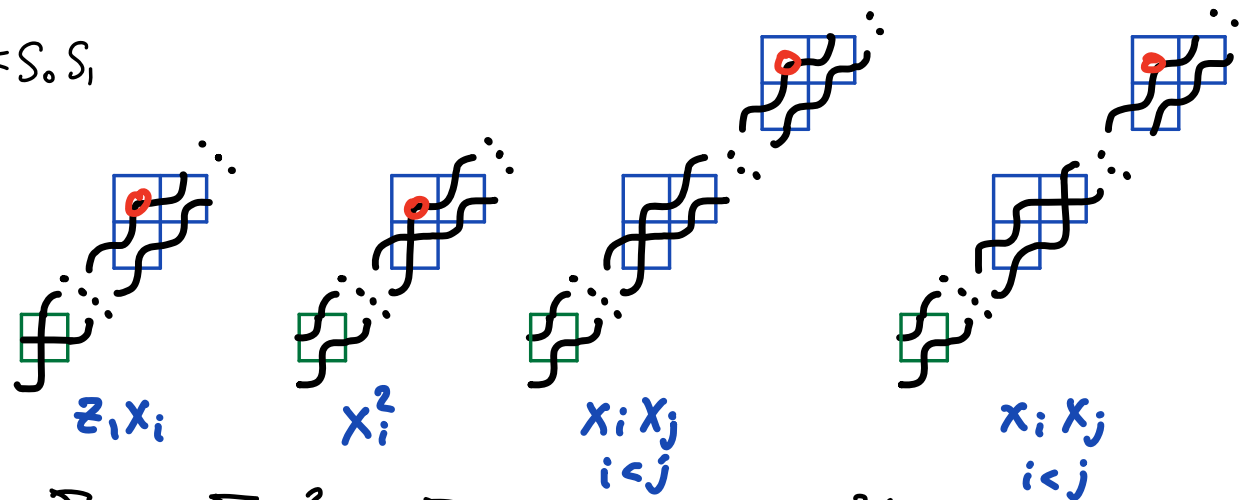


$$\textcircled{2} \quad w = 2 1 = s_1 \in B_2$$

$$\mathcal{B}_{s_1} = z_1 + 2p_1(x)$$

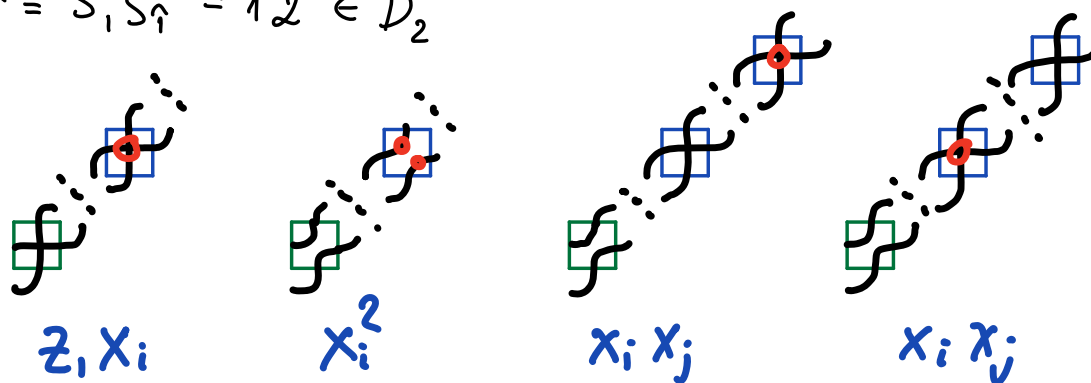


(3) $w = 2\bar{1} = S_0 S_1$



$$\mathcal{B}_w = z, \sum_i x_i + \sum_i x_i^2 + 2 \sum_{i < j} x_i x_j = z, p_1(x) + p_1^2(x)$$

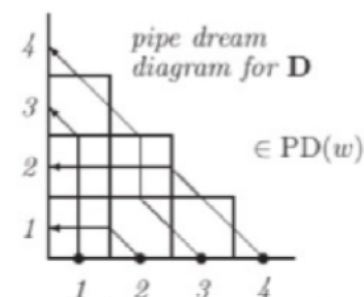
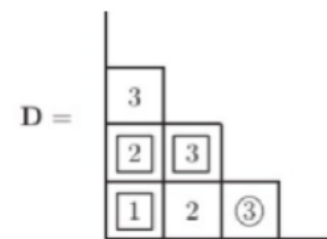
(4) $w = S_1 S_1 = \bar{1}\bar{2} \in \mathcal{D}_2$



$$\mathcal{D}_w = \sum_i z, x_i + \sum_i x_i^2 + 2 \sum_{i < j} x_i x_j = z, p_1(x) + p_1^2(x).$$

А.Н. Кириллов, Н. Naruse (2017)

- Используют другое опр-е $\mathcal{F}_w$ (у них - многочлены);
- Более грубое комб. описание:
диаграмма = 2^k мономов!
- У нас: диаграмма = моном!
- Явное комб. соответствие.



Вопросы:

- Описание K-теории и мюльменов Гротендика?
- Геом. смысл pipe dreams?
(в духе Knutson . Miller '05)
- Связь с м-ками Ньютона - Окупькова
в типе C (Куризенко, Fujita...)?