Илья Злотников (University of Stavanger)
Санкт-Петербургский семинар по теории операторов и теории функций
31 Октября 2022

О полноте некоторых экспоненциальных семейств

(по совместной работе с А. Куликовым и А. Улановским)

Мы изучали, при каких условиях система

$$E(\Lambda,\Gamma) := \{t^k e^{2\pi i\lambda t} : \lambda\in\Lambda, k\in\Gamma\}, \quad \Gamma\subset\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\dots\},\ \Lambda\subset\mathbb{R}$$

полна или образует фрейм.

Пусть $X(I)$ — пространство функций с носителем на симметричном отрезке I, например $X=C(I)$ или $X=L^p(I)$, где $I=[-\sigma,\sigma]$. Обозначим радиус полноты семейства $E(\mathbb{Z},\Gamma)$ в пространстве X через

$$r_X(E(\mathbb{Z},\Gamma)) = \sup\{a\ge 0 : E(\mathbb{Z},\Gamma) \text{ полна в } X(-a,a)\}.$$

Хорошо известно, что

- $$r_{L^2}(E(\mathbb{Z},\{0\})) = r_{L^2}(\{e^{2\pi int}\}_{n\in\mathbb{Z}}) = r_C(\{e^{2\pi int}\}_{n\in\mathbb{Z}}) = \frac{1}{2};$$
- если $\Gamma=\{0,1,2,\dots,N\}$, то
$$r_C(E(\mathbb{Z},\Gamma)) = r_{L^2}(E(\mathbb{Z},\Gamma)) = \frac{\#\Gamma}{2} = \frac{N+1}{2}.$$

Возникает естественный

Вопрос: Верно ли что для любого множества Γ, $\Gamma\subset\mathbb{N}_0$, справедливо равенство

$$r_C(E(\mathbb{Z},\Gamma)) = r_{L^2}(E(\mathbb{Z},\Gamma))?$$

Оказывается, что в общем случае ответ отрицательный. Точнее, ответ зависит от количества четных и нечетных чисел во множестве Γ, то есть от величин $\#\Gamma_{odd}$ и $\#\Gamma_{even}$, где

$$\Gamma_{odd} = \Gamma\cap(2\mathbb{Z}+1) \quad \text{и} \quad \Gamma_{even} = \Gamma\cap 2\mathbb{Z}.$$

Мы доказали следующее утверждение.

Теорема (A. Kulikov, A. Ulanovskii, I. Z., 2022)**.** *Пусть Γ — конечное подмножество $\mathbb{N}_0$ и $0\in\Gamma$. Тогда*

$$r_{L^2}(E(\mathbb{Z},\Gamma)) = \frac{\#\Gamma}{2} \qquad r_C(E(\mathbb{Z},\Gamma)) = \begin{cases} \#\Gamma_{odd}+\frac{1}{2}, & \text{если } \#\Gamma_{odd} < \#\Gamma_{even}, \\ \#\Gamma_{even}, & \text{если } \#\Gamma_{odd} \ge \#\Gamma_{even}. \end{cases}$$

Наше рассуждение основано на новом наблюдении о множествах единственности для лакунарных полиномов.

Список литературы

[1] Aleksei Kulikov, Alexander Ulanovskii, Ilya Zlotnikov, *Completeness of Certain Exponential Systems and Zeros of Lacunary Polynomials*,(2022) arxiv.org/abs/2210.00504