Структура исчерпаемых групп автоморфизмов

Александр Перепечко

2 ноября 2022 г.

Инд-группы

Инд-многообразием X называется объединение $\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ относительно цепочки замкнутых вложений $X_i \hookrightarrow X_{i+1}$ алгебраических множеств X_i.

Морфизмом инд-многообразий $\phi\colon X \to Y$ называется набор согласованных морфизмов $\phi_i\colon X_i \to Y_{n(i)}$, где $n(i)$ зависит от i.

Фильтрация инд-многообразия $X = \bigcup X_i'$ называется допустимой или эквивалентной, если тождественное отображение $\bigcup X_i' \to \bigcup X_i$ является изоморфизмом.

Инд-группой G называется группа, снабжённая такой структурой инд-многообразия, что отображения умножения и взятия обратного элемента являются морфизмами.

Группа автоморфизмов

Группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X)$ аффинного многообразия $X \subset \mathbb{A}^N$ наделена естественной структурой инд-группы

$$\mathrm{Aut}(X)_i = \{\phi \mid \deg \phi, \deg \phi^{-1} \leq i\}.$$

Она не зависит от вложения (с точностью до тождественного морфизма).

Любая алгебраическая группа G, являющаяся абстрактной подгруппой $\mathrm{Aut}(X)$ и регулярно действующая на X, является алгебраической подгруппой в $\mathrm{Aut}(X)$ и замкнутым подмножеством в $\mathrm{Aut}(X)_i$ для некоторого i.

Исчерпаемые подгруппы. Разложение Леви

Инд-группа G называется исчерпаемой, если допускает фильтрацию $G = \bigcup G_i$ алгебраическими группами G_i.

Теорема (Зайденберг–Коваленко-П.'17)

Связная исчерпаемая подгруппа $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ допускает разложение Леви $G = R_u(G) \rtimes L$, где L — максимальная алгебраическая редуктивная подгруппа в G и $R_u(G)$ — унипотентный радикал G.

Доказательство.

Можем считать, что G_i связны. Пусть L_i — фактор Леви в разложении подгруппы G_i. Можем считать, что $L_i \subset L_{i+1}$. Поскольку в $\mathrm{Aut}(X)$ не может быть тора размерности $\geq \dim(X)$, $\mathrm{rk}(L_i) \leq \dim(X)$. Значит, размерности L_i также ограничены, и $L = \bigcup_i L_i$ — алгебраическая подгруппа.

Можем считать $G_i = L \ltimes \mathcal{R}_u(G_i)$ и проверить, что $\mathcal{R}_u(G_i) = \mathcal{R}_u(G_{i+1}) \cap G_i$. Тогда $\mathcal{R}_u(G) = \bigcup \mathcal{R}_u(G_i)$ — унипотентный радикал G. $\square$

Унипотентные группы

Пусть $U \subset \mathrm{Aut}(X)$ — (исчерпаемая) унипотентная подгруппа.
Группа де Жонкье $\mathrm{Jonq}(n) \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$ состоит из элементов ϕ, удовлетворяющих эквивалентным условиям:

- $\phi\colon x_j \mapsto c_j x_j + P(x_1, \ldots, x_{j-1})$ для всех $j = 1, \ldots, n$,
- ϕ^* стабилизирует флаг $\mathbb{K}[x_1] \subset \mathbb{K}[x_1, x_2] \subset \ldots \mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$,
- ϕ стабилизирует кофлаг $\mathcal{F}\colon \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{n-1} \to \ldots \to \mathbb{A}^1$, где $\mathbb{A}^k = \{(a_1, \ldots, a_k, 0, \ldots, 0)\}$.

Лемма (Зайденберг–Крафт'22)

Для $x \in X \setminus X^U$ нормализатор $\mathrm{Norm}_U(U_x)$ строго содержит U_x.

Теорема (Зайденберг–Крафт'22)

Если $X = \mathbb{A}^n$ и U обладает плотной орбитой в $\mathbb{A}^n$, то U сопряжена подгруппе в $\mathcal{J}_n = \mathcal{R}_u(\mathrm{Jonq}(n))$.

Доказательство.

Для $x \in \mathbb{A}^n$ пусть $a \in \mathrm{Norm}(U_x) \setminus U_x$, и $A = \overline{\langle a \rangle} \cong \mathbb{G}_a$. Тогда $U \times A$ действует на $\mathbb{A}^n \cong U/U_x$,

$$(u, n) \cdot gU_x = ugU_x n^{-1} = un^{-1} gU_x.$$

Действие A свободно, U-эквивариантно, и U действует на $\mathbb{A}^n // A = \mathrm{Spec}(\mathbb{K}[\mathbb{A}^n]^A)$.
Действие A на $\mathbb{A}^n$ допускает локальный слайс, тогда расслоение $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n // A$ локально тривиально, значит тривиально, и $\mathbb{A}^n // A \cong \mathbb{A}^{n-1}$. По индукции строим U-эквивариантный кофлаг $\mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^{n-1} \to \ldots$ □

Пример

Пусть $U_1 = \{(x, y) \to (x + t, y)\}$ и $U_2 = \{(x, y) \to (x, y + ax + b)\}$ в $\mathrm{Aut}(\mathbb{A}^2)$. Тогда $U_1 \ltimes U_2$ действует транзитивно на $\mathbb{A}^2$. Стабилизатор точки $(0, 0)$ равен $\{(x, y) \to (x, y + ax)\}$, пусть $a\colon (x, y) \to (x, y + x + 1)$. Действие $A = \overline{\langle a \rangle}$ на $\mathbb{A}^2$ несвободно, но действие справа — свободно.

Степень разрешимости

Теорема (Зайденберг–Крафт'22)

Степень разрешимости $U \subset \mathrm{Aut}(X)$ не превышает $\dim O$ для общей U-орбиты O на X.

Доказательство.

Пусть $k = \dim O$. Поскольку $\mathcal{J}_k^{(k)}$ тривиальна, образ $U^{(k)}$ в каждой общей орбите действует тривиально. $\square$

Замкнутость

Подмножество Y в инд-многообразии X называется замкнутым, если $Y \cap X_i$ замкнуто в X_i для каждого i.

Вопрос (Зайденберг–Крафт'22)

Всегда ли связная исчерпаемая подгруппа G в $\mathrm{Aut}(X)$ замкнута?

Почему для фиксированного элемента фильтрации $\mathrm{Aut}(X)_d$ цепочка (замкнутых) пересечений $G_i \cap \mathrm{Aut}(X)_d$ стабилизируется?

Пример

Пусть $\mu_n = \{c \mid c^n = 1\} \subset \mathbb{K}$. Тогда $\bigcup_i \mu_i$ — незамкнутая исчерпаемая подгруппа в $\mathbb{K}^\times$.