Основы теории открытых квантовых систем. Лекция 8. Обобщённые уравнения Блоха. Вполне положительные отображения

Теретёнков Александр Евгеньевич

1 ноября 2022 г.

В прошлой серии...

Эрмитов базис, ортогональный единице

$$F_j = F_j^\dagger, \qquad \operatorname{Tr} F_j = 0, \qquad \operatorname{Tr}(F_j F_k) = \delta_{jk}$$

В общем случае

$$F_k F_j = \frac{\delta_{kj}}{n} I + \frac{i}{2} \sum_{l=1}^{n^2-1} z_{kjl}^* F_l$$

Коэффициенты:

$$z_{kjl} = f_{kjl} + i d_{kjl},$$

f_{kjl} — структурные константы $su(n)$. Кроме того, в выбранном базисе f_{kjl} — полностью антисимметричны, а d_{kjl} — полностью симметричны.

Обобщённые уравнения Блоха

Обобщённые вектора Блоха

$$\rho = \frac{1}{n} I + \sum_{k=1}^{n^2-1} v_k F_k$$

Обобщённые уравнения Блоха

Обобщённые вектора Блоха

$$\rho = \frac{1}{n} I + \sum_{k=1}^{n^2-1} v_k F_k$$

Уравнение ГКСЛ в форме Коссаковского (в самосопряжённом базисе)

$$\frac{d}{dt}\rho_t = -i[H, \rho_t] + \sum_{i=1,k=1}^{n^2-1} a_{ik} \left([F_i, \rho_t F_k] + [F_i \rho_t, F_k] \right),$$

где матрица $a = a^\dagger \geqslant 0$.

$$H = \sum_{k=1}^{n^2-1} h_k F_k$$

Обобщённые уравнения Блоха

Обобщённые уравнения Блоха

$$\dot{v} = Gv + b$$

(вещественные v)

$$G = Q + R$$

Обобщённые уравнения Блоха

$$Q_{sm} = \sum_{j=1}^{n^2-1} h_j f_{jms}$$

$$R_{sm} = -\frac{1}{4}\sum_{j,k,l=1}^{n^2-1} a_{jk}(z_{jlm}f_{kls} + \overline{z}_{klm}f_{jls}) =$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{j\leqslant k,l=1}^{n^2-1} (2-\delta_{jk})\operatorname{Re} a_{jk}(f_{jlm}f_{kls} + f_{klm}f_{jls}) +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j\leqslant k,l=1}^{n^2-1} \operatorname{Im} a_{jk}(-d_{jlm}f_{kls} + d_{klm}f_{jls})$$

$$b_s = \frac{i}{n}\sum_{j=1}^{n^2-1} a_{jk}f_{jks} = -\frac{2}{n}\sum_{j<k=1}^{n^2-1} \operatorname{Im} a_{jk}f_{jks}$$

Обобщённые уравнения Блоха

$$Q_{sm} = \sum_{j=1}^{n^2-1} h_j f_{jms}$$

— зависит только от структурных констант алгебр Ли.

$$Q = -Q^T$$

В случае обратимой эволюции это единственный ненулевой член.
Поэтому, в случае обратимой эволюции

$$\frac{d}{dt}(v, v) = (v, (Q + Q^T)v) = 0$$

Обобщённые уравнения Блоха

$$R_{sm} = -\frac{1}{4}\sum_{j\leqslant k,l=1}^{n^2-1}(2-\delta_{jk})\,\mathrm{Re}\,a_{jk}(f_{jlm}f_{kls}+f_{klm}f_{jls})+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j\leqslant k,l=1}^{n^2-1}\mathrm{Im}\,a_{jk}(-d_{jlm}f_{kls}+d_{klm}f_{jls})$$

При $\mathrm{Im}\,a_{jk}=0$ уравнение зависит только от структурных констант алгебры Ли.

$$b_s = -\frac{2}{n}\sum_{j<k=1}^{n^2-1}\mathrm{Im}\,a_{jk}f_{jks}$$

При $\mathrm{Im}\,a_{jk}=0$ получим $b_s=0$.

Обобщённые уравнения Блоха

То есть, если a — вещественная матрица, то получаем однородное уравнение

$$\dot{v} = Gv,$$

причём G выражается через a только через структурные константы алгебры Ли $su(n)$.
На самом деле, случай вещественного a, это просто случай генератора типа классической диффузии.

Обобщённые уравнения Блоха

При $n = 2$ в общем случае $R = R^T$ (и так было в наших примерах). В случае произвольного n это неверно, однако если a — вещественная матрица, то $R = R^T$.

Свойства спектра

- Из того, что уравнения Блоха (в самосопряжённом базисе) вещественные следует, что если собственное значение комплексное, то и сопряжённое является собственным значением.

Свойства спектра

- Из того, что уравнения Блоха (в самосопряжённом базисе) вещественные следует, что если собственное значение комплексное, то и сопряжённое является собственным значением.
- Вещественные части собственных чисел генератора ГКСЛ не положительны.

Свойства спектра

- Из того, что уравнения Блоха (в самосопряжённом базисе) вещественные следует, что если собственное значение комплексное, то и сопряжённое является собственным значением.
- Вещественные части собственных чисел генератора ГКСЛ не положительны.
- Даже если нулевое собственное значение вырождено для него не возникает жордановых блоков.

Свойства спектра

- Из того, что уравнения Блоха (в самосопряжённом базисе) вещественные следует, что если собственное значение комплексное, то и сопряжённое является собственным значением.
- Вещественные части собственных чисел генератора ГКСЛ не положительны.
- Даже если нулевое собственное значение вырождено для него не возникает жордановых блоков.
- Но случай жордановых блоков можно получить уже для двухуровневой системы, положив

$$a = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 16 & 4i & 3 \\ -4i & 16 & 1+4i \\ 3 & 1-4i & 18 \end{pmatrix}$$

Вполне положительные отображения

Линейное отображение $\Phi : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ называется **положительным**, если

$$\Phi(X) \geqslant 0 \qquad \forall X \geqslant 0$$

Вполне положительные отображения

Линейное отображение $\Phi : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ называется **положительным**, если

$$\Phi(X) \geqslant 0 \qquad \forall X \geqslant 0$$

Линейное отображение $\Phi : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ называется **вполне положительным**, если отображение

$$\Phi \otimes \mathcal{I}_{n^2} : \mathbb{C}^{n^2\times n^2} \to \mathbb{C}^{n^2\times n^2}$$

положительно. $(\Phi \otimes \mathcal{I}_{n^2})(X \otimes Y) = \Phi(X) \otimes Y$.

Вполне положительные отображения

Вполне положительность в более явном виде:

$$\Phi \otimes \mathcal{I}_{n^2} \underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}}_{\forall \geqslant 0} = \begin{pmatrix} \Phi(A_{11}) & \cdots & \Phi(A_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi(A_{n1}) & \cdots & \Phi(A_{nn}) \end{pmatrix} \geqslant 0$$

Вполне положительные отображения

Иногда также вводят k-положительное отображения:

Отображение называется k-**положительным**, если отображение

$$\Phi \otimes \mathcal{I}_{k^2} : \mathbb{C}^{nk \times nk} \to \mathbb{C}^{nk \times nk}$$

положительно.

Вполне положительные отображения

Отображение сохраняет след, если

$$\operatorname{Tr}\Phi(X) = \operatorname{Tr} X, \qquad \forall X \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

Сохраняющее след вполне положительное отображение называется **квантовым каналом** (в представлении Шредингера). Отметим, что если Φ сохраняет след, то и $\Phi \otimes \mathcal{I}_{k^2}$ сохраняет след.

Вполне положительные отображения

Положительные отображения являются аналогом матриц с неотрицательными коэффициентами. Очевидно, что если A — матрица с неотрицательными коэффициентами, то $A \otimes \mathcal{I}_{k^2}$ тоже такова, поэтому в классическом случае условие вполне положительности является излишним.

Вполне положительные отображения

Положительные отображения являются аналогом матриц с неотрицательными коэффициентами. Очевидно, что если A — матрица с неотрицательными коэффициентами, то $A \otimes \mathcal{I}_{k^2}$ тоже такова, поэтому в классическом случае условие вполне положительности является излишним.
Условие нормировки выделяющее стохастической матрицы $e^T Pp = e^T p$ аналогично условию сохранению следа. Поэтому квантовые каналы являются аналогами стохастических матриц (классических каналов).

Вполне положительные отображения

Отображение называется унитальным (сохраняющим единицу), если

$$\Phi(I) = I$$

Вполне положительные отображения

Отображение называется унитальным (сохраняющим единицу), если

$$\Phi(I) = I$$

Утверждение. $\operatorname{Tr}\Phi(X) = \operatorname{Tr} X, \quad \forall X \in \mathbb{C}^{n\times n} \Leftrightarrow \Phi^*(I) = I.$

Вполне положительные отображения

Отображение называется унитальным (сохраняющим единицу), если

$$\Phi(I) = I$$

Утверждение. $\operatorname{Tr}\Phi(X) = \operatorname{Tr} X, \quad \forall X \in \mathbb{C}^{n\times n} \Leftrightarrow \Phi^*(I) = I.$
Доказательство:

$$\operatorname{Tr} X = \operatorname{Tr}\Phi(X) = \operatorname{Tr} I^\dagger \Phi(X) = \operatorname{Tr}(\Phi^*(I))^\dagger X$$

Выбирая в качестве $X = |i\rangle\langle j|$, получим $\Phi^*(I) = I$. $\square$

Вполне положительные отображения

Отображение называется унитальным (сохраняющим единицу), если

$$\Phi(I) = I$$

Утверждение. $\operatorname{Tr}\Phi(X) = \operatorname{Tr} X, \quad \forall X \in \mathbb{C}^{n\times n} \Leftrightarrow \Phi^*(I) = I.$
Доказательство:

$$\operatorname{Tr} X = \operatorname{Tr}\Phi(X) = \operatorname{Tr} I^\dagger \Phi(X) = \operatorname{Tr}(\Phi^*(I))^\dagger X$$

Выбирая в качестве $X = |i\rangle\langle j|$, получим $\Phi^*(I) = I$. $\square$
Поэтому можно говорить, что унитальное вполне положительное отображение задаёт квантовый канал в представлении Гейзенберга.

Вполне положительные отображения

Отображение называется унитальным (сохраняющим единицу), если

$$\Phi(I) = I$$

Утверждение. $\mathrm{Tr}\,\Phi(X) = \mathrm{Tr}\,X, \quad \forall X \in \mathbb{C}^{n\times n} \Leftrightarrow \Phi^*(I) = I.$
Доказательство:

$$\mathrm{Tr}\,X = \mathrm{Tr}\,\Phi(X) = \mathrm{Tr}\,I^\dagger\Phi(X) = \mathrm{Tr}(\Phi^*(I))^\dagger X$$

Выбирая в качестве $X = |i\rangle\langle j|$, получим $\Phi^*(I) = I$. $\square$
Поэтому можно говорить, что унитальное вполне положительное отображение задаёт квантовый канал в представлении Гейзенберга.
В классике, аналогом этого утверждения была возможность переписать условие нормировки как $P^T e = e$.

Вполне положительные отображения

Вполне положительное отображение, которое одновременно сохраняет след и унитально, часто называют **бистохастическим** каналом (иногда унитальным), так как оно аналогично бистохастическим матрицам $Pe = e, P^T e = e$.

Соответствие Чоя-Ямилковского

Максимально сцепленное состояние в $\mathbb{C}^n \otimes \mathbb{C}^n$

$$|\Omega\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} |j\rangle \otimes |j\rangle$$

$$|\Omega\rangle\langle\Omega| = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^{n} |i\rangle\langle j| \otimes |i\rangle\langle j|$$

Соответствие Чоя-Ямилковского

Соответствие (иногда говорят изоморфизм) Чоя-Ямилковского: Каждому линейному отображению $\Phi : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ сопоставим $n^2 \times n^2$-матрицу

$$\rho_\Phi = \Phi \otimes \mathcal{I}_{n^2}(|\Omega\rangle\langle\Omega|).$$

Соответствие Чоя-Ямилковского

Упражнение. Соответствие Чоя-Ямилковского является обратимым. Обратное соответствие задаётся формулой

$$\Phi(X) = n \operatorname{Tr}_R \rho_\Phi (I_n \otimes X^T)$$

X^T — транспонирование в базисе $|j\rangle$.