

Оценки интегралов n -листных функций и геометрические свойства областей

А. Д. Баранов

Санкт-Петербургский государственный университет

(по совместной работе с И.Р. Каюмовым, КФУ)

Вторая конференция
Математических центров России
7–11 ноября 2022 г., МГУ, МИАН, Москва

Оценка производной однолистной функции

Пусть φ – конформное отображение односвязной области G на единичный круг $\mathbb{D}$.

Гипотеза (Дж. Бреннан). $\varphi' \in L^p(G)$ при $4/3 < p < 4$, т.е.

$$\int_G |\varphi'(z)|^p dA(z) < \infty.$$

К. Поммеренке (1985): $p < 3,399$; Д. Бертильссон (1999): $p < 3,422$;
Х. Хеденмальм, С. Шиморин (2005): $p < 3,752$.

Вопрос. Что будет, если рассмотреть не однолистные, а n -листные в области G функции?

Аналитическую функцию f в области G называют n -листной, если для любого $w \in \mathbb{C}$ уравнение $f(z) = w$ имеет в G не более n решений.

Частным случаем n -листных функция являются рациональные функции степени n .

Оценка производной однолистной функции

Пусть φ – конформное отображение односвязной области G на единичный круг $\mathbb{D}$.

Гипотеза (Дж. Бреннан). $\varphi' \in L^p(G)$ при $4/3 < p < 4$, т.е.

$$\int_G |\varphi'(z)|^p dA(z) < \infty.$$

К. Поммеренке (1985): $p < 3,399$; Д. Бертильссон (1999): $p < 3,422$;
Х. Хеденмалым, С. Шиморин (2005): $p < 3,752$.

Вопрос. Что будет, если рассмотреть не однолистные, а n -листные в области G функции?

Аналитическую функцию f в области G называют n -листной, если для любого $w \in \mathbb{C}$ уравнение $f(z) = w$ имеет в G не более n решений.

Частным случаем n -листных функция являются рациональные функции степени n .

Неравенства для производных рациональных функций

Пусть G – конечносвязная ограниченная область, компоненты границы которой – замкнутые жордановы кривые с непрерывной кривизной, удовлетворяющей условию Гельдера, а R – рациональная функции степени не выше n с полюсами вне $\overline{G}$.

$$\|f\|_{H^\infty(G)} = \sup_{w \in G} |f(w)|.$$

Теорема (Е. П. Долженко, 1966). Найдется константа C , зависящая от области G и от p , такая что

$$\int_G |R'(w)|^p dA(w) \leq Cn^{p-1} \|R\|_{H^\infty(G)}^p, \quad p \in (1, 2],$$

$$\int_G |R'(w)| dA(w) \leq C \log(n+1) \|R\|_{H^\infty(G)}.$$

Точность при $1 < p \leq 2$: $R(z) = z^n$ в $\mathbb{D}$. А при $p = 1$?

В.В. Пеллер, С. Семмс, А.А. Пекарский, В.И. Данченко, Е.М. Дынькин.



Неравенства для производных рациональных функций

Пусть G – конечносвязная ограниченная область, компоненты границы которой – замкнутые жордановы кривые с непрерывной кривизной, удовлетворяющей условию Гельдера, а R – рациональная функции степени не выше n с полюсами вне $\overline{G}$.

$$\|f\|_{H^\infty(G)} = \sup_{w \in G} |f(w)|.$$

Теорема (Е. П. Долженко, 1966). Найдется константа C , зависящая от области G и от p , такая что

$$\int_G |R'(w)|^p dA(w) \leq C n^{p-1} \|R\|_{H^\infty(G)}^p, \quad p \in (1, 2],$$

$$\int_G |R'(w)| dA(w) \leq C \log(n+1) \|R\|_{H^\infty(G)}.$$

Точность при $1 < p \leq 2$: $R(z) = z^n$ в $\mathbb{D}$. А при $p = 1$?

В.В. Пеллер, С. Семмс, А.А. Пекарский, В.И. Данченко, Е.М. Дынькин.

Теорема (Е. П. Долженко, 1966). Найдется константа C , зависящая от области G и от p , такая что

$$\int_G |R'(w)|^p dA(w) \leq C n^{p-1} \|R\|_{H^\infty(G)}^p, \quad p \in (1, 2],$$

$$\int_G |R'(w)| dA(w) \leq C \log(n+1) \|R\|_{H^\infty(G)}.$$

- ❶ Неравенства Долженко справедливы для произвольной n -листной функции.
- ❷ Условия регулярности границы не нужны. Неравенства справедливы для областей со спрямляемой границей и допускают обобщения на случай областей с фрактальными границами.
- ❸ При $p = 1$ неравенство Долженко может быть существенно улучшено. Правильный (и точный) порядок роста – $\sqrt{\log n}$, а не $\log n$.

Основные результаты

Теорема 1. Пусть $p \in (1, 2]$, G – ограниченная односвязная область со спрямляемой границей γ , и $L = \ell(\gamma)$ – ее длина. Тогда найдется такая константа $C_p > 0$, что для всякой n -листной функции R степени n

$$\int_G |R'(w)|^p dA(w) \leq C_p L^{2-p} n^{p-1} \|R\|_{H^\infty(G)}^p.$$

При этом $C_p \leq \frac{K}{p-1}$, где K – некоторая абсолютная числовая константа.

Теорема 2. Существует такая абсолютная числовая константа $C > 0$, что для всякой n -листной функции R степени n

$$\int_G |R'(w)| dA(w) \leq CL \sqrt{\log \left(2 + \frac{\text{diam}(G)}{L} n \right)} \|R\|_{H^\infty(G)}.$$

Точность оценки при $p = 1$

С. Н. Мергелян (1951): существует ограниченная в круге $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ функция f такая, что

$$I(f) := \int_{\mathbb{D}} |f'(z)| dA(z) = \infty,$$

где $dA(z) = \frac{1}{\pi} dx dy$, $z = x + iy$.

У. Рудин (1955): существует бесконечное произведение Бляшке B такое, что $I(B) = \infty$ и, более того, $\int_0^1 |B'(re^{i\theta})| dr = \infty$ для почти всех $\theta \in [0, 2\pi]$.

Дж. Пирамян (1968): конкретный пример.

Вопрос. Как ведет себя $I(B)$, если B – конечное произведение Бляшке порядка n ?

Конечное произведение Бляшке: $B(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}$, $a_j \in \mathbb{D}$.

Точность оценки при $p = 1$

С. Н. Мергелян (1951): существует ограниченная в круге $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ функция f такая, что

$$I(f) := \int_{\mathbb{D}} |f'(z)| dA(z) = \infty,$$

где $dA(z) = \frac{1}{\pi} dx dy$, $z = x + iy$.

У. Рудин (1955): существует бесконечное произведения Бляшке B такое, что $I(B) = \infty$ и, более того, $\int_0^1 |B'(re^{i\theta})| dr = \infty$ для почти всех $\theta \in [0, 2\pi]$.

Дж. Пирамян (1968): конкретный пример.

Вопрос. Как ведет себя $I(B)$, если B – конечное произведение Бляшке порядка n ?

Конечное произведение Бляшке: $B(z) = \prod_{j=1}^n \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z}$, $a_j \in \mathbb{D}$.

Точность оценки при $p = 1$

Теорема 3. Существует абсолютная постоянная $c > 0$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют многочлен p и произведение Бляшке B степени n , для которых

$$\int_{\mathbb{D}} |p'(z)| dA(z) \geq c\sqrt{\log n}, \quad \int_{\mathbb{D}} |B'(z)| dA(z) \geq c\sqrt{\log n}.$$

Е.П. Долженко (1966):

$$\int_{\mathbb{D}} |B'(z)|^p dA(z) \lesssim n^{p-1}, \quad 1 < p \leq 2.$$

В.В. Пеллер (1982) и Дж. Арази, С. Фишер, Я. Петре (1988):

$$\int_{\mathbb{D}} |B'(z)|^p (1 - |z|^2)^{p-2} dA(z) \asymp n, \quad 1 < p < \infty.$$

Принадлежность производных произведений Бляшке различным функциональным пространствам, например, пространствам Бергмана в круге, в терминах их нулей: Ахерн, Кларк, Протас, Гирела, Пелаэс, Алеман, Вукотич ...

Точность оценки при $p = 1$

Теорема 3. Существует абсолютная постоянная $c > 0$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют многочлен p и произведение Бляшке B степени n , для которых

$$\int_{\mathbb{D}} |p'(z)| dA(z) \geq c\sqrt{\log n}, \quad \int_{\mathbb{D}} |B'(z)| dA(z) \geq c\sqrt{\log n}.$$

Е.П. Долженко (1966):

$$\int_{\mathbb{D}} |B'(z)|^p dA(z) \lesssim n^{p-1}, \quad 1 < p \leq 2.$$

В.В. Пеллер (1982) и Дж. Арази, С. Фишер, Я. Петре (1988):

$$\int_{\mathbb{D}} |B'(z)|^p (1 - |z|^2)^{p-2} dA(z) \asymp n, \quad 1 < p < \infty.$$

Принадлежность производных произведений Бляшке различным функциональным пространствам, например, пространствам Бергмана в круге, в терминах их нулей: Ахерн, Кларк, Протас, Гирела, Пелаэс, Алеман, Вукотич ...

Точность оценки при $p = 1$

Класс Блоха $\mathcal{B}$ состоит из аналитических функций в $\mathbb{D}$ для которых $\sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2) |f'(z)| < \infty$.

Закон повторного логарифма (Н.Г. Макаров, 1985): для $f \in \mathcal{B}$

$$\limsup_{r \rightarrow 1-} \frac{|f(r\zeta)|}{\sqrt{\log \frac{1}{1-r} \log \log \log \frac{1}{1-r}}} < \infty, \quad \text{п.в. } \zeta \in \mathbb{T}.$$

Р. Бануэлос, Ч. Мур (1991): существует $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \in \mathcal{B}$ такая, что для всех $\zeta \in \mathbb{T}$

$$\limsup_{r \rightarrow 1-} \frac{|f(r\zeta)|}{\sqrt{\log \frac{1}{1-r}}} < \infty, \quad \liminf_{r \rightarrow 1-} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k}}{\log \frac{1}{1-r}} > 0.$$

Частичные суммы ряда Тейлора для f – многочлены p_n степени n , для которых $\int_{\mathbb{D}} |p'_n(z)| dA(z) \geq c \sqrt{\log n}$.

Точность оценки при $p = 1$

Класс Блоха $\mathcal{B}$ состоит из аналитических функций в $\mathbb{D}$ для которых $\sup_{z \in \mathbb{D}} (1 - |z|^2) |f'(z)| < \infty$.

Закон повторного логарифма (Н.Г. Макаров, 1985): для $f \in \mathcal{B}$

$$\limsup_{r \rightarrow 1-} \frac{|f(r\zeta)|}{\sqrt{\log \frac{1}{1-r} \log \log \log \frac{1}{1-r}}} < \infty, \quad \text{п.в. } \zeta \in \mathbb{T}.$$

Р. Бануэлос, Ч. Мур (1991): существует $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k \in \mathcal{B}$ такая, что для всех $\zeta \in \mathbb{T}$

$$\limsup_{r \rightarrow 1-} \frac{|f(r\zeta)|}{\sqrt{\log \frac{1}{1-r}}} < \infty, \quad \liminf_{r \rightarrow 1-} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k}}{\log \frac{1}{1-r}} > 0.$$

Частичные суммы ряда Тейлора для f – многочлены p_n степени n , для которых $\int_{\mathbb{D}} |p'_n(z)| dA(z) \geq c \sqrt{\log n}$.

Доказательство для случая $p = 1$

Для $\varepsilon > 0$ положим

$$G_\varepsilon = \{w \in G : \text{dist}(w, \gamma) > \varepsilon\},$$

$$H_\varepsilon = \{w \in G : \text{dist}(w, \gamma) \leq \varepsilon\},$$

$$d_G(w) = \text{dist}(w, \gamma).$$

Лемма 1. $S(H_\varepsilon) \leq C\varepsilon\ell(\gamma)$ и

$$\int_{G_\varepsilon} d_G^{-1}(w) dA(w) \leq CL \log \frac{\text{diam}(G)}{\varepsilon}.$$

Доказательство для случая $p = 1$

Лемма 2. Для любой функции $f \in H^\infty(G)$ справедливо неравенство

$$\int_G |f'(w)|^2 d_G(w) dA(w) \leq CL \|f\|_{H^\infty(G)}^2,$$

где C – некоторая абсолютная константа.

Пусть φ – конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на G . Тогда неравенство будет эквивалентно следующему:

$$\int_{\mathbb{D}} |g'(z)|^2 |\varphi'(z)|(1 - |z|^2) dA(z) \leq C \|\varphi'\|_{H^1} \|g\|_{H^\infty(\mathbb{D})}^2,$$

где $g = f \circ \varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$. Положим $h = g \cdot (\varphi')^{1/2}$.

Теорема Литтлвуда–Пэли:

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (1-r) |h'(re^{it})|^2 dr \right)^{1/2} dt \leq C \|h\|_{H^1}.$$

Доказательство для случая $p = 1$

Лемма 2. Для любой функции $f \in H^\infty(G)$ справедливо неравенство

$$\int_G |f'(w)|^2 d_G(w) dA(w) \leq CL \|f\|_{H^\infty(G)}^2,$$

где C – некоторая абсолютная константа.

Пусть φ – конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на G . Тогда неравенство будет эквивалентно следующему:

$$\int_{\mathbb{D}} |g'(z)|^2 |\varphi'(z)| (1 - |z|^2) dA(z) \leq C \|\varphi'\|_{H^1} \|g\|_{H^\infty(\mathbb{D})}^2,$$

где $g = f \circ \varphi \in H^\infty(\mathbb{D})$. Положим $h = g \cdot (\varphi')^{1/2}$.

Теорема Литтлвуда–Пэли:

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (1-r) |h'(re^{it})|^2 dr \right)^{1/2} dt \leq C \|h\|_{H^1}.$$

Доказательство для случая $p = 1$

Пусть $\varepsilon = \frac{L}{n}$ и $G = G_\varepsilon \cup H_\varepsilon$. Поскольку $S(H_\varepsilon) \lesssim L\varepsilon = L^2/n$, имеем

$$\begin{aligned} \int_{H_\varepsilon} |R'(w)| dA(w) &\leq \left(\int_{H_\varepsilon} |R'(w)|^2 dA(w) \right)^{1/2} (S(H_\varepsilon))^{1/2} \\ &\lesssim n^{1/2} \|R\|_{H^\infty(G)} \cdot L n^{-1/2} = L \|R\|_{H^\infty(G)}. \end{aligned}$$

В то же время

$$\begin{aligned} \int_{G_\varepsilon} |R'(w)| dA(w) &\leq \left(\int_G |R'(w)|^2 d_G(w) dA(w) \right)^{1/2} \left(\int_{G_\varepsilon} \frac{dA(w)}{d_G(w)} \right)^{1/2} \\ &\leq L^{1/2} \|R\|_{H^\infty(G)} \left(\int_{G_\varepsilon} d_G^{-1}(w) dA(w) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Осталось воспользоваться тем, что

$$\int_{G_\varepsilon} d_G^{-1}(w) dA(w) \leq CL \log \left(\frac{\text{diam}(G)}{L} n \right).$$

Оценка в терминах размерности Минковского границы

Для $\varepsilon > 0$ обозначим через $N(\varepsilon)$ наименьшее количество кругов радиуса ε с центрами на γ , необходимое для того, чтобы покрыть γ , и положим

$$\alpha = \text{Mdim}(\gamma) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log \frac{1}{\varepsilon}}.$$

α называют размерностью Минковского множества γ .

Теорема 4. Пусть $p \in (1, 2]$, G – ограниченная односвязная область, $\gamma = \partial G$ и $\alpha = \text{Mdim}(\gamma) \in [1, 2]$. Тогда для любого $\delta > 0$ найдется такая константа $C = C(p, \delta) > 0$, что для всякой n -листной ограниченной в G функции R выполнено неравенство

$$\int_G |R'(w)|^p dA(w) \leq C n^{\frac{p-2}{\alpha} + 1 + \delta} \|R\|_{H^\infty(G)}^p.$$

Спектр интегральных средних и оценки снизу

Для функции φ , однолистной в $\mathbb{D}$, положим

$$\beta_{\varphi}(s) := \limsup_{r \rightarrow 1} \frac{\log \int_0^{2\pi} |\varphi'(re^{it})|^s dt}{|\log(1-r)|}.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует бесконечная последовательность чисел n , таких что

$$\int_0^{2\pi} |\varphi'(re^{it})|^{2-p} dt \geq n^{\beta_{\varphi}(2-p)-\varepsilon}, \quad r = 1 - \frac{1}{n}.$$

Пусть $R(w) = (\varphi^{-1}(w))^n$, где φ – конформное отображение круга $\mathbb{D}$ на односвязную область G . Тогда

$$\begin{aligned} \int_G |R'(w)|^p dA(w) &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 n^p r^{p(n-1)} |\varphi'(z)|^{2-p} r dr dt \\ &\geq \int_0^{2\pi} \int_{1-1/n}^{1-1/(2n)} n^p r^{p(n-1)} |\varphi'(z)|^{2-p} r dr dt \geq cn^{\beta_{\varphi}(2-p)+p-1-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Спектр интегральных средних и оценки снизу

$$\beta_{\varphi}(s) := \limsup_{r \rightarrow 1} \frac{\log \int_0^{2\pi} |\varphi'(re^{it})|^s dt}{|\log(1-r)|}.$$

Универсальный спектр интегральных средних в классе ограниченных однолистных функций:

$$B_b(s) := \sup\{\beta_{\varphi}(s) : \varphi \text{ ограничена}\}.$$

Гипотеза Кратцера: $B_b(s) = \frac{s^2}{4}$, $|s| \leq 2$. Утверждение, что $B_b(-2) = 1$ равносильно гипотезе Бреннана.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует ограниченная односвязная область G и бесконечная последовательность чисел n , таких что

$$\int_G |R'(w)|^p dA(w) \geq cn^{B_b(2-p)+p-1-\varepsilon}.$$

для некоторой n -листной функции R , $\|R\|_{H^\infty(G)} = 1$.

Спектр интегральных средних и оценки снизу

Макаров, Поммеренке, 1997:

$$B_\alpha(t) := \sup\{\beta_\varphi(t) : \text{Mdim}(\partial\varphi(\mathbb{D})) = \alpha\}.$$

Пусть $G = \varphi(\mathbb{D})$, где φ дает значения спектра, близкие к максимальному, т.е.

$$\int_G |R'(w)|^p dA(w) \geq cn^{B_\alpha(2-p)+p-1-\varepsilon}$$

для некоторой бесконечной последовательности натуральных n .

Макаров (1998): $B_\alpha(1) = \alpha - 1 - (\alpha - 1)^2 + O((\alpha - 1)^3)$, $\alpha \rightarrow 1$.
Следовательно, существуют односвязная область G и n -листная функция R такие, что

$$\int_G |R'(w)| dA(w) \geq cn^{\alpha-1-(\alpha-1)^2+O((\alpha-1)^3)-\varepsilon}.$$

Положим $\varepsilon = \delta = (\alpha - 1)^3$. Нижняя оценка совпадает с верхней оценкой теоремы 4 при $p = 1$ с точностью до $(\alpha - 1)^3$.