

О характеристике конечной группы ее арифметическими параметрами

Наталья Владимировна Маслова

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского
Уральский федеральный университет
Уральский математический центр
(Екатеринбург, Россия)
butterson@mail.ru

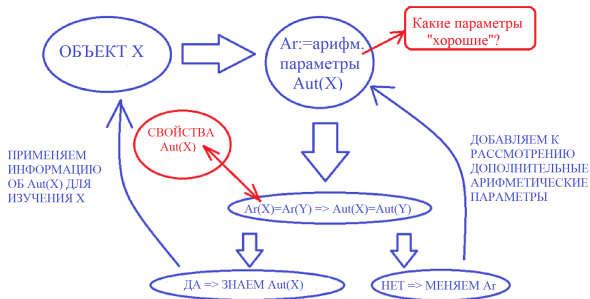
Вторая конференция Математических центров России

7–11 ноября 2022 г.

Термин "группа" используется в значении "конечная группа".

Термин "граф" используется в значении "обыкновенный граф" (т. е. неориентированный граф без петель и кратных ребер).

Постановка проблемы



Основной вопрос. Какие параметры группы являются "хорошими"?

Определения

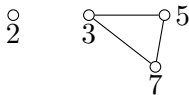
Пусть Ω — конечное множество, состоящее из целых положительных чисел.

Через $\pi(\Omega)$ обозначим множество всех простых делителей чисел из Ω .

Пример. Если $\Omega = \{2, 15, 21, 35\}$, то $\pi(\Omega) = \{2, 3, 5, 7\}$.

Граф $\Gamma(\Omega)$, вершинами которого являются числа из $\pi(\Omega)$ и в котором две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда pq делит некоторый элемент из Ω , называется **графом простых чисел** множества Ω .

Пример. Если $\Omega = \{2, 15, 21, 35\}$, то $\Gamma(\Omega)$ имеет следующий вид:



Пусть G — группа.

Спектр $\omega(G)$ — это множество всех порядков элементов из G .

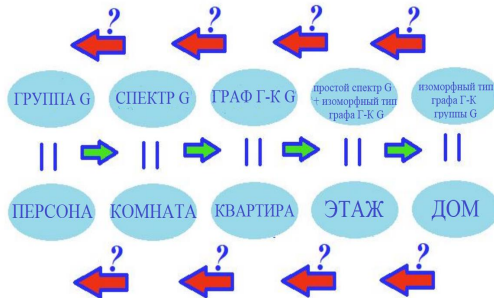
Простой спектр $\pi(G)$ — множество всех простых чисел из $\omega(G)$ (эквивалентно, множество всех простых делителей $|G|$).

Граф $\Gamma(G)$ со множеством вершин $\pi(G)$, в котором две различные вершины p и q смежны тогда и только тогда, когда $pq \in \omega(G)$, называется **графом Грюнберга–Кегеля** (коротко: **графом Г.-К.**) или **графом простых чисел** группы G .

Очевидно, что $\Gamma(G) = \Gamma(\omega(G))$.

Упражнение. Пусть G — группа, p и q — различные простые числа из $\pi(G)$. Тогда $pq \in \omega(G)$, если и только если существуют элементы $x, y \in G$ такие, что $|x| = p$, $|y| = q$ и $xy = yx$.

”Адресная книга” конечных групп



Проблема. Пусть G — конечная группа. В каких случаях G (однозначно) определена своими арифметическими параметрами?

Примеры

Пример 1. Неизоморфные группы, имеющие равные спектры (разные "персоны", "живущие" в одной "комнате"):

$$\omega(S_5) = \omega(S_6) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Пример 2. Группы, имеющие разные спектры, но равные графы Грюнберга–Кегеля ("персоны", "живущие" в разных "комнатах", но в одной "квартире"):

$$\omega(A_5) = \{1, 2, 3, 5\};$$

$$\omega(A_6) = \{1, 2, 3, 4, 5\};$$

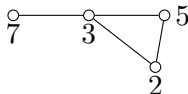
$$\Gamma(A_5) = \Gamma(A_6):$$

$$\begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ 2 & 3 & 5 \end{array}$$

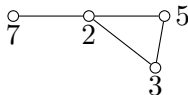
Более того, если $\omega(G) = \omega(A_5)$, то $G \cong A_5$ (W. Shi, 1985).

Пример 3. Группы, имеющие равные простые спектры, графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны, но не равны ("персоны", "живущие" в разных "квартирах", но на одном "этаже"):

$\Gamma(A_{10})$:



$\Gamma(\text{Aut}(J_2))$:



Примеры

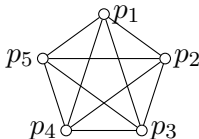
Пример 4. Группы, имеющие различные простые спектры, графы Грюнберга–Кегеля которых изоморфны (“персоны”, “живущие” на разных “этажах”, но в одном “доме”):

Пусть $n = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5$, где p_i — попарно различные простые числа, и $G = C_n$ — циклическая группа порядка n .

$$\pi(G) = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}.$$

G абелева $\Rightarrow p_i p_j \in \omega(G)$ для любых i и j .

$\Gamma(G)$:



Будем говорить, что группа G

- **распознаваема** по спектру (по графу Г.–К.), если для любой группы H равенство $\omega(G) = \omega(H)$ ($\Gamma(G) = \Gamma(H)$, соответственно) выполняется тогда и только тогда, когда $G \cong H$;
- **k -распознаваема** по спектру (по графу Г.–К.), где k — целое положительное число, если существует в точности k попарно неизоморфных групп с тем же спектром (графом Г.–К., соответственно), что и G ;
- **почти распознаваема** по спектру (графу Г.–К.), если она k -распознаваема по спектру (графу Г.–К., соответственно) для некоторого целого положительного числа k ;
- **нераспознаваемой** по спектру (графу Г.–К.), если существует бесконечно много попарно неизоморфных групп с тем же спектром (графом Г.–К., соответственно), что и G .

Теорема (В. Д. Мазуров, W. Shi, 2012). Пусть G — конечная группа. Следующие условия эквивалентны:

- (1) существует бесконечно много попарно неизоморфных групп H таких, что $\omega(G) = \omega(H)$;
- (2) существует конечная группа H с нетривиальным разрешимым радикалом такая, что $\omega(G) = \omega(H)$.

О классификации конечных простых групп

Группа G **проста**, если она не содержит собственных нормальных подгрупп, **почти проста** с цоклем S , если

$$S \cong \operatorname{Inn}(S) \trianglelefteq G \leq \operatorname{Aut}(S),$$

где S — неабелева простая группа.

Классификация конечных простых групп (ККПГ) была анонсирована в 1980. В соответствии с этой классификацией, неабелевы простые группы содержатся в следующем списке:

Знакопеременные группы: A_n для $n \geq 5$;

Классические группы: $PSL_n(q) = A_{n-1}(q)$,
 $PSU_n(q) = {}^2A_{n-1}(q)$, $PSp_{2n}(q) = C_n(q)$, $P\Omega_{2n+1}(q) = B_n(q)$,
 $P\Omega_{2n}^+(q) = D_n(q)$, $P\Omega_{2n}^-(q) = {}^2D_n(q)$;

Исключительные группы лиева типа: $E_8(q)$, $E_7(q)$, $E_6(q)$,
 ${}^2E_6(q)$, ${}^3D_{2n}(q)$, $F_4(q)$, ${}^2F_4(q)'$ (q — степень числа 2), $G_2(q)$,
 ${}^2G_2(q)$ (q — степень числа 3), ${}^2B_2(q)$ (q — степень числа 2);

26 **спорадических** групп.

Распознаваемость по спектру

Теорема (Много авторов, в процессе...). Пусть L — одна из следующих неабелевых простых групп:

- (i) спорадическая группа, отличная от группы J_2 ;
- (ii) знакопеременная группы A_n , где $n \notin \{6, 10\}$;
- (iii) исключительная группа лиева типа, отличная от ${}^3D_4(2)$;
- (iv) классическая группа достаточно большой размерности.

Тогда если G — группа такая, что $\omega(G) = \omega(L)$, то, с точностью до изоморфизма, $L \trianglelefteq G \leq \text{Aut}(L)$. В частности, "почти все" неабелевы простые группы почти распознаваемы по спектру.

Теорема (Много авторов; финальный результат получен: А. В. Васильев, М. А. Гречкосеева, В. Д. Мазуров, 2009).

Пусть G — простая группа. Если H — группа такая, что $\omega(H) = \omega(G)$ и $|H| = |G|$, то $H \cong G$.

Распознаваемость по спектру

Теорема (Много авторов; финальный результат получен: И. Б. Горшков, А. Н. Гришков, 2016). Если $n \neq 10$, то проблема распознаваемости группы $G = \text{Sym}(n)$ по спектру решена. Более того, если $n > 45$, то группа G распознаваема по спектру.

Теорема (В. Д. Мазуров, 1997). Группа $Sz(2^7) \times Sz(2^7)$ распознаваема по спектру.

Теорема (И. Б. Горшков, Н. М., 2021). Группа $J_4 \times J_4$ распознаваема по спектру.

Теорема (И. Б. Горшков, 2020+). Если $m > 5$, то группа

$$G = PSL_{2^m}(2) \times PSL_{2^m}(2) \times PSL_{2^m}(2)$$

распознаваема по спектру.

Теорема 1 (Р. Cameron, Н.М., 2022).¹ Пусть G — конечная группа. Следующие условия эквивалентны:

- (1) существует бесконечно много попарно неизоморфных групп H таких, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$;
- (2) существует конечная группа H с нетривиальным разрешимым радикалом такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$.

¹ Работа выполнена за счет Российского научного фонда (проект 19-71-10067). 

Схема доказательства теоремы 1

(2) $\Rightarrow$ (1) следует из [теоремы Мазурова-Shi](#).

(1) $\Rightarrow$ (2). Пусть G — группа такая, что существует бесконечно много групп H с тривиальным разрешимым радикалом, для которых выполняется равенство графов $\Gamma(G) = \Gamma(H)$.

Показываем, что любая группа H со свойством $\Gamma(G) = \Gamma(H)$ почти проста.

[Предложение 1](#). Пусть π — конечное множество, состоящее из простых чисел. Тогда число неабелевых простых групп S со свойством $\pi(S) \subseteq \pi$ конечно и имеет мощность не более $O(|\pi|^3)$.

Распознаваемость по графу Грюнберга–Кегеля

Теорема 2 (Р. Cameron, Н.М., 2022).² Пусть G — группа, почти распознаваемая по графу Грюнберга–Кегеля. Тогда выполняются следующие утверждения:

- (1) G почти проста, и любая группа H со свойством $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ почти проста;
- (2) вершина 2 не смежна хотя бы с одной нечетной вершиной в $\Gamma(G)$;
- (3) $\Gamma(G)$ содержит хотя бы 3 попарно несмежные вершины.

Следствие 1. Группа G почти распознаваема по графу Грюнберга–Кегеля тогда и только тогда, когда любая группа H такая, что $\Gamma(H) = \Gamma(G)$, почти проста.

Проблема 1. Пусть G — почти простая группа. Определить, является ли G распознаваемой, почти распознаваемой или нераспознаваемой по графу Грюнберга–Кегеля?

² Работа выполнена за счет Российского научного фонда (проект 19-71-10067).   

Чем интересен класс почти простых групп?

Любая группа может быть представлена как группа подстановок (теорема Кэли).

Пусть $G \leq \text{Sym}(\Omega)$.

$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_k$, где Ω_i — i -я орбита группы G , т. е. G транзитивна на каждой Ω_i и $G \leq \prod_{i=1}^k \text{Sym}(\Omega_i)$.

Пусть G транзитивна на Ω .

Если G импримитивна на Ω , то выберем максимальную по включению систему импримитивности Δ . Тогда группа G действует примитивно на множестве блоков Δ .

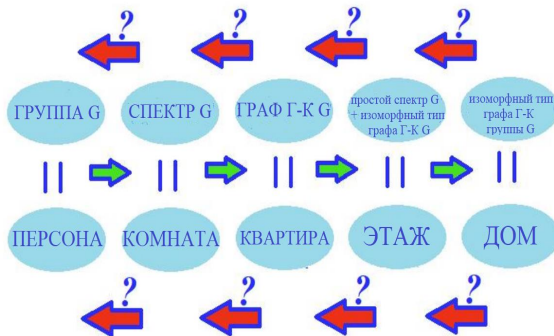
Чем интересен класс почти простых групп?

Теорема О'Нэна – Скотта для примитивных групп подстановок (M. Liebeck, Ch. E. Praeger, J. Saxl, 1988).

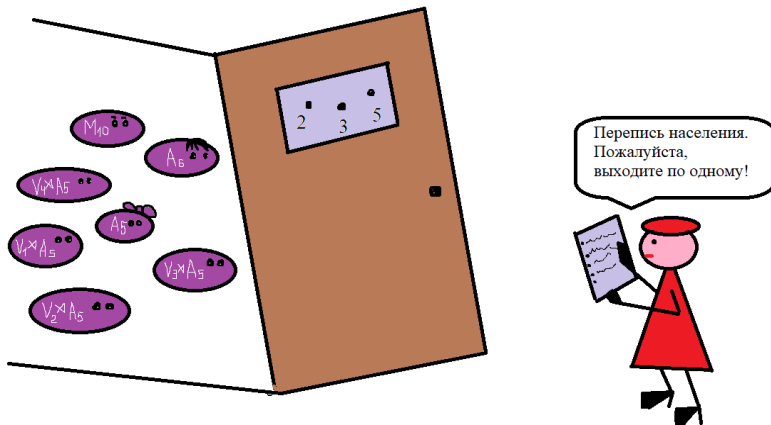
Каждая примитивная группа подстановок почти проста или подстановочно эквивалентна группе подстановок одного из следующих типов:

- HA (голоморф абелевой группы);
- HS (голоморф простой группы);
- HC (голоморф составной группы);
- TW (скрещённое сплетение);
- SD (простая диагональная);
- CD (составная диагональная);
- PA (действие на произведения).

”Адресная книга” конечных групп



”Перепись населения” конечных групп



Пусть Γ — граф, вершины которого помечены попарно различными простыми числами. Будем говорить, что Γ — **помеченный граф**.

Теорема 3 (Р. Cameron, Н.М., 2022).³ Существует функция $F(x) = O(x^7)$ такая, что для любого помеченного графа Γ следующие условия эквивалентны:

- (1) существует бесконечно много попарно неизоморфных групп H таких, что $\Gamma(H) = \Gamma$;
- (2) существует более, чем $F(|V(\Gamma)|)$ попарно неизоморфных групп H таких, что $\Gamma(H) = \Gamma$, где $V(\Gamma)$ — множество всех вершин Γ .

³ Работа выполнена за счет Российского научного фонда (проект [19-71-10067](#)).   

Схема доказательства теоремы 3

Пусть G — группа, почти распознаваемая по графу Грюнберга–Кегеля.

Теорема 2. Группа G почти проста, и любая группа H со свойством $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ почти проста.

Ключевым инструментом в доказательстве теоремы 3 является следующее утверждение.

Теорема 4.⁴ Пусть π — конечное множество, состоящее из простых чисел. Тогда число почти простых групп S со свойством $\pi(S) \subseteq \pi$ конечно и имеет мощность не более $O(|\pi|^7)$.

⁴ Работа выполнена за счет Российского научного фонда (проект 19-71-10067).   

Группы с равными графами Грюнберга–Кегеля

Теорема 3. Существует функция $F(x) = O(x^7)$ такая, что для любого помеченного графа Γ следующие условия эквивалентны:

- (1) существует бесконечно много попарно неизоморфных групп H таких, что $\Gamma(H) = \Gamma$;
- (2) существует более, чем $F(|V(\Gamma)|)$ попарно неизоморфных групп H таких, что $\Gamma(H) = \Gamma$, где $V(\Gamma)$ — множество всех вершин Γ .

Проблема 2. Улучшить верхнюю оценку в теореме 3.

Теорема (А. В. Заварницин, 2006). Не существует константы k такой, что для любой почти простой группы G число попарно неизоморфных почти простых групп H таких, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$, не более, чем k .

Теорема (М. А. Гречкосеева, А. В. Васильев, 2022). В теореме 3 верхняя оценка может быть улучшена до $F(x) = O(x^5)$.

Проблема 3. Пусть Γ — помеченный граф. Найти эффективный алгоритм, который решает следующие проблемы:

- Существует ли (почти) простая группа G такая, что $\Gamma(G) = \Gamma$?
- Каковы все (почти) простые группы с этим свойством?

Группы с равными графами Грюнберга–Кегеля

Если G проста, то [А. В. Васильев](#) предположил, что существует не более 4 попарно неизоморфных неабелевых простых групп H таких, что $\Gamma(G) = \Gamma(H)$ ([проблема 16.26](#) в ”Коуровской тетради”).

Пусть G и H — неабелевы простые группы. Исследование случаев совпадения $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$:

- G — спорадическая группа ([М. Hagie, 2003](#)).
- $G \cong A_n$ ([М. А. Звездина, 2013](#)).
- G и H — группы лиева типа и $\text{char}(G) = \text{char}(H)$ ([М. Р. Зиновьева, 2014](#)).
- G и H — группы лиева типа и $\text{char}(G) \neq \text{char}(H)$ ([М. Р. Зиновьева, 2015–2022+, в процессе...](#)).

Проблема 1. Пусть G — почти простая группа. Определить, является ли G распознаваемой, k -распознаваемой для некоторого $k > 1$ или нераспознаваемой по графу Грюнберга–Кегеля?

Несвязный граф Грюнберга–Кегеля

Теорема (К. Gruenberg, О. Kegel, 1975; опубликована в работе J. Williams, 1981). Если G — группа с несвязным графом Грюнберга–Кегеля, то выполняется одно из следующих утверждений:

- (1) G — группа Фробениуса;
- (2) G — 2-фробениусова группа;
- (3) G — расширение нильпотентной группы K с помощью почти простой группы A , где $S \trianglelefteq A \leq \text{Aut}(S)$ и S — простая группа с несвязным графом Грюнберга–Кегеля.

Проблема 1. Пусть G — почти простая группа. Определить, является ли G распознаваемой, k -распознаваемой для некоторого $k > 1$ или нераспознаваемой по графу Грюнберга–Кегеля?

Связный граф Грюнберга–Кегеля

Теорема (А. В. Васильев, 2005) Пусть G — неразрешимая группа такая, что вершина 2 не смежна хотя бы с одной нечетной вершиной в $\Gamma(G)$. Тогда существует простая группа S такая, что

$$S \trianglelefteq G/S(G) \leq \text{Aut}(S),$$

где $S(G)$ — разрешимый радикал группы G .

Несвязный граф Грюнберга–Кегеля

Проблема. Описать случаи совпадения графов Грюнберга–Кегеля $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$, где G — почти простая группа, H — группа Фробениуса или 2-фробениусова группа.

2012, М. Р. Зиновьева, В. Д. Мазуров:

G — простая группа.

2016, М. Р. Зиновьева, А. С. Кондратьев

+

2018, И. Б. Горшков, Н. М.

H разрешима.

В процессе: К. А. Ильенко, Н. М.

G почти проста, но не проста, H — неразрешимая группа Фробениуса

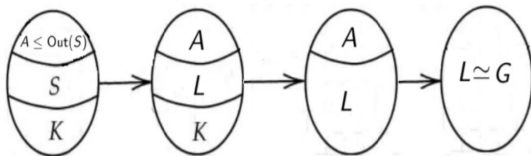
О методах решения проблемы 1

Несвязный граф Грюнберга–Кегеля

L — неабелева простая группа с несвязным графом Грюнберга–Кегеля, G — группа такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(L)$.

Применяем теорему Грюнберга–Кегеля.

Если G — не группа Фробениуса и не 2-фробениусова группа, то существует подгруппа $K \trianglelefteq G$ такая, что K нильпотентна и G/K почти проста с цоколем S .



Простая группа L называется **квазираспознаваемой** по графу Грюнберга–Кегеля, если выполняются следующие утверждения:

- любая группа G такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(L)$, обладает единственным неабелевым композиционным фактором S ;
- $S \cong L$.

Замечание. Пусть простая группа G квазираспознаваема по графу Грюнберга–Кегеля. Если H — группа такая, что $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ и $|H| = |G|$, то $H \cong G$.

Известные результаты для простых групп

- Проблема 1 решена для спорадических групп.

М. Hagie, 2003; А. В. Заварницин, 2006
А. С. Кондратьев, 2019 и 2021 (2 статьи)
М. Lee, Т. Poriel, 2022

- Группы ${}^2G_2(q)$ распознаваемы по графу Г.–К.

А. В. Заварницин, 2006

- Проблема 1 решена для групп $PSL_2(q)$, за исключением случаев $q > 8$ четно или $11 < q$ — простое число и $q \equiv 1 \pmod{12}$ (в этих случаях группа $PSL_2(q)$ **квази**распознаваема по графу Г.–К.).

М. Hagie, 2003; В. Khosravi×3, 2007 (2 статьи)
А. Khosravi, В. Khosravi, 2008; В. Khosravi, 2008

- Группа $PSL_{16}(2)$ распознаваема по графу Г.–К.
(! $\Gamma(PSL_{16}(2))$ связный).

В. Khosravi×3, 2008;
закончено А. В. Заварницин, 2010

Известные результаты для простых групп

- Группа ${}^2D_n(3)$ при $n \geq 5$ распознаваема по графу Г.–К.
A. Babai and B. Khosravi, 2011
M. F. Ghasemabadi, A. Iranmanesh, N. Ahanjideh, 2012
- Группа $D_n(3)$ при $n \geq 5$ распознаваема по графу Г.–К.
M. F. Ghasemabadi, N. Ahanjideh, 2012
- Группы $B_n(3)$ и $C_n(3)$, где $n \geq 5$ нечетно,
2-распознаваемы по графу Г.–К.
Z. Momen, B. Khosravi, 2012
M. F. Ghasemabadi, A. Iranmanesh, N. Ahanjideh, 2013
- Группа $D_n(5)$ при $n \geq 5$ распознаваема по графу Г.–К.
Z. Akhlaghi, M. Khatami, B. Khosravi, 2013;
A. Babai, B. Khosravi, 2014

Известные результаты для простых групп

- Проблема 1 решена для простых групп S таких, что $|\pi(S)| \in \{3, 4\}$.

*А. С. Кондратьев, И. В. Храмцов, 2010 и 2012
(2 статьи)*

- Если $n \notin \{p, p-1\}$, где числа p и $p-2$ просты, то группа A_n нераспознаваема по графу Г.–К., исследован вопрос **квази**распознаваемости групп A_n и S_n по графу Г.–К.

В. Khosravi, A. Z. Moghanjoghi, 2007;

А. М. Старолетов, 2017;

И. Б. Горшков, А. М. Старолетов, 2019

- $E_7(2)$, $E_7(3)$, ${}^2E_6(2)$, $E_6(2)$, ${}^2E_6(3)$ и $E_6(3)$ распознаваемы по графу Г.–К.

А. С. Кондратьев, 2015 и 2019 (2 статьи);

W. Guo, А. С. Кондратьев, Н. М., 2021;

А. П. Храмова, Н. М., В. В. Паньшин,

А. М. Старолетов, в рамках БММ МЦА, 2021

Известные результаты для простых групп

- Группа ${}^2F_4(q)$ **квази**распознаваема по графу Г.–К.

Z. Akhlaghi, M. Khatami, B. Khosravi, 2009

- Группа $F_4(q)$, где $q > 2$ четно, **квази**распознаваема по графу Г.–К.

B. Khosravi, A. Babai, 2011

- Группы $G_2(q)$, где $q \equiv 0 \pmod{3}$, и ${}^2B_2(q)$ **квази**распознаваемы (**требуется ревизия**) по графу Г.–К.

Q. Zhang, W. Shi, R. Shen, 2011

- Группа $E_8(q)$ при $q \equiv 0, 1, 4 \pmod{5}$ почти распознаваема по графу Г.–К.

А. В. Заварницин, 2013

Распознаваемость по графу Грюнберга–Кегеля

Теорема (А. В. Заварницин, 2013). Пусть $L = E_8(q)$, где $q \equiv 0, \pm 1 \pmod{5}$. Если G — группа такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(L)$, то $G \cong E_8(u)$ для некоторого $u \equiv 0, \pm 1 \pmod{5}$.

Теорема 5 (Н. М., В. В. Панышин, А. М. Старолетов, 2022+). Пусть $L = E_8(q)$, где $q \equiv \pm 2 \pmod{5}$. Если G — группа такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(L)$, то $G \cong E_8(u)$ для некоторого $u \equiv \pm 2 \pmod{5}$.

Следствие 2. Группа $E_8(q)$ почти распознаваема по графу Грюнберга–Кегеля для любого q .

Следствие 3. Пусть H — группа такая, что $\Gamma(H) = \Gamma(E_8(q))$ и $|H| = |E_8(q)|$ для некоторого q . Тогда $H \cong E_8(q)$.

Теорема 6 (Н. М., В. В. Паньшин, А. М. Старолетов, 2022+). Пусть $L = F_4(q)$, где q четно, или $G_2(q)$, где $q \equiv 0 \pmod{3}$, или ${}^2F_4(q)$. Если G — группа такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(L)$ и $G/F(G)$, где $F(G)$ — наибольшая нильпотентная нормальная подгруппа в G , содержит подгруппу, изоморфную L , то $F(G) = 1$. В частности, L почти распознаваема по графу Грюнберга–Кегеля.

Теорема 7 (Н. М., В. В. Паньшин, А. М. Старолетов, 2022+). Пусть $L = {}^2B_2(q)$ для некоторого q . Тогда существует группа G такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(L)$ и $O_2(G) \neq 1$. В частности, группа L нераспознаваема по графу Грюнберга–Кегеля.

- $E_7(2)$, $E_7(3)$, ${}^2E_6(2)$, $E_6(2)$, ${}^2E_6(3)$ и $E_6(3)$ распознаваемы по графу Г.–К.

А. С. Кондратьев, 2015 и 2019 (2 статьи);

W. Guo, А. С. Кондратьев, Н. М., 2021;

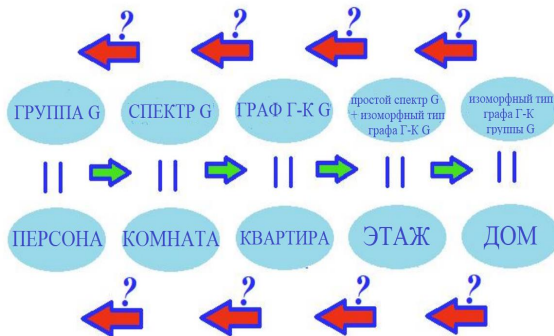
А. П. Храмова, Н. М., В. В. Паньшин,

А. М. Старолетов, в рамках БММ МЦА, 2021

Теорема 8 (Н. М., В. В. Паньшин, А. М. Старолетов, 2022+).

Пусть $L = E_6(q)$ или ${}^2E_6(q)$. Если G — группа такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(L)$, то $L \trianglelefteq G \leq \text{Aut}(L)$. В частности, L почти распознаваема по графу Грюнберга–Кегеля.

”Адресная книга” конечных групп



Определение. Группа G распознаваема по изоморфному типу графа Грюнберга–Кегеля, если для любой группы H изоморфизм графов $\Gamma(G)$ и $\Gamma(H)$ (как абстрактных графов) влечет изоморфизм групп H и G .

(Группа G имеет собственный ”дом”.)

Теорема 2. Пусть G — группа, почти распознаваемая по графу Грюнберга–Кегеля. Тогда G почти проста, и любая группа H со свойством $\Gamma(H) = \Gamma(G)$ почти проста.

Следствие 4. Если группа G распознаваема по изоморфному типу графа Грюнберга–Кегеля, то G почти проста.

Проблема 4. Пусть G — почти простая группа. Определить, в каких случаях G распознаваема по изоморфному типу графа Грюнберга–Кегеля.

Распознаваемость по изоморфному типу графа Г.–К.

Теорема (А.В. Заварницин, 2006). Если G — группа такая, что $\Gamma(G)$ имеет ровно 6 компонент связности, то $G \cong J_4$. В частности, группа J_4 распознаваема по изоморфному типу графа Грюнберга–Кегеля.

Теорема 9 (Р. Cameron, Н.М., 2022).⁵ Группы ${}^2G_2(27)$ и $E_8(2)$ распознаваемы по изоморфному типу графа Грюнберга–Кегеля.

Теорема 10 (Н.М., М. Р. Зиновьева, 2022+).⁶ Группа $E_8(q)$, где $q \in \{3, 4, 5, 7, 8, 9, 17\}$, распознаваема по изоморфному типу графа Грюнберга–Кегеля.

Проблема 5. Существуют ли другие группы, распознаваемые по изоморфному типу графа Грюнберга–Кегеля? В частности, существует ли почти простая, но не простая группа с этим свойством?

⁵ Работа выполнена за счет Российского научного фонда (проект 19-71-10067).

⁶ Работа выполнена за счет Российского научного фонда (проект 19-71-10067). 

P. J. Cameron and N. V. Maslova, Criterion of unrecognizability of a finite group by its Gruenberg–Kegel graph, *J. Algebra*, 607:Part A (2022), 186–213.

M. Lee and T. Popiel, M , B and Co_1 are recognisable by their prime graphs, *J. Group Theory*, (2022),
<https://doi.org/10.1515/jgth-2021-0119>.

M. A. Grechkoseeva and A. V. Vasil'ev, On the prime graph of a finite group with unique nonabelian composition factor, *Communications in Algebra*, 50:8 (2022), 3447–3452.



Спасибо за внимание!