Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем на 4-мерных многообразиях

Елена Кудрявцева

Московский государственный университет,
Московский Центр Фундаментальной и Прикладной Математики

Вторая конференция Математических центров России
(7–11 ноября 2022 г., МГУ, МИАН, г. Москва)

10.11.2022

Интегрируемые системы и их особенности

Интегрируемая гамильтонова система (*ИГС*) на симплектическом $2n$-мерном многообразии (M, ω) задается отображением $F = (f_1, \dots, f_n) \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ т.ч.

- $\{f_i, f_j\} = 0$, где $\{f, g\} := \omega(X_f, X_g)$, $X_f = omega^{-1}(df)$;
- f_i функционально независимы п.в. на M (т.е. $df_1 \wedge \dots \wedge df_n \neq 0$).

Интегрируемые системы и их особенности

Интегрируемая гамильтонова система (*ИГС*) на симплектическом $2n$-мерном многообразии (M, ω) задается отображением $F = (f_1, \dots, f_n) \in C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ т.ч.

- $\{f_i, f_j\} = 0$, где $\{f, g\} := \omega(X_f, X_g)$, $X_f = omega^{-1}(df)$;
- f_i функционально независимы п.в. на M (т.е. $df_1 \wedge \dots \wedge df_n \neq 0$).

ИГС $\rightsquigarrow$ *лагранжево слоение с особенностями* (слоение Лиувилля) (M, ω, B, π), где $\pi : M \to B$ – проекция, слои — компоненты связности $\mathcal{L}_a \subseteq F^{-1}(a)$,

база $B = \{\text{слои}\}$ с фактортопологией.

Все слои компактны, все особенности невырожд.$\Rightarrow$

$M = M^{2n} \supseteq M^{2(n-1)} \supseteq \dots \supseteq M^0$ – стратификация, где $M^{2r} = \{m \in M \mid \operatorname{rk} dF(m) \leq r\}$ – $2r$-остов, $M^{2r} \setminus M^{2(r-1)} = \{m \in M \mid \operatorname{rk} dF(m) = r\}$ — симпл. $2r$-многообразие ($2r$-страты).

$B = B^n \supseteq B^{n-1} \supseteq \dots \supseteq B^0$ – стратификация, $B^r = \pi(M^{2r})$, $B^r \setminus B^{r-1}$ — r-мерное многообразие (чьи компоненты связности — страты).

Особенность — росток слоения в особом слое $\mathcal{L} = \pi^{-1}(b)$, $b \in B^{n-1}$.

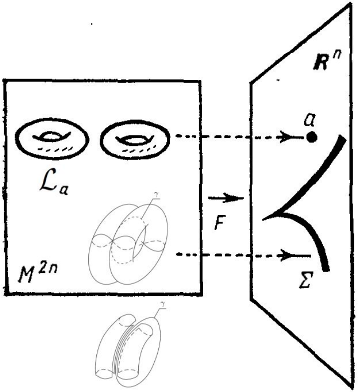
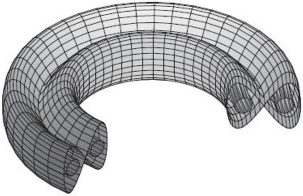
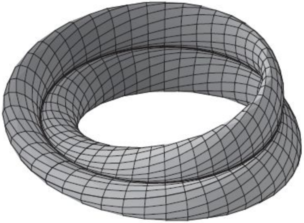
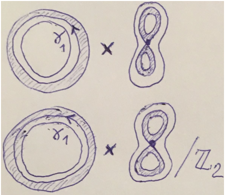


Иллюстрация: слоение Лиувилля. Лагранжевы слоения с особенностями

Для простоты: две степени свободы $(n = 2)$.
(M^4, ω, F), $\qquad F = (H, K) : M^4 \to \mathbb{R}^2$, $\qquad F(m) = (H(m), K(m))$.







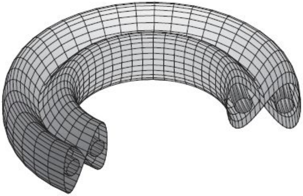
Объект, который мы хотим изучать – лагранжевы слоения с особенностями

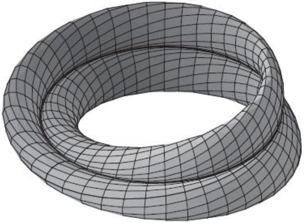
$$\pi : M^4 \to B^2,$$

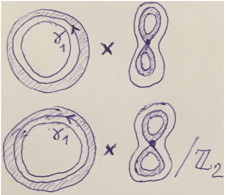
которое локально может быть задано парой коммутирующих функций.

Иллюстрация: слоение Лиувилля. Лагранжевы слоения с особенностями

Для простоты: две степени свободы ($n = 2$).
(M^4, ω, F), $\quad F = (H, K) : M^4 \to \mathbb{R}^2$, $\quad F(m) = (H(m), K(m))$.







Объект, который мы хотим изучать – лагранжевы слоения с особенностями

$$\pi : M^4 \to B^2,$$

которое локально может быть задано парой коммутирующих функций.
Множество слоев B^2 – вообще говоря, не является многообразием. Но во всех интересных примерах B – стратифицированное 2-многообразие $(B, \mathcal{S})$.
Стратификация $\mathcal{S} = [B^0 \subseteq B^1 \subseteq B^2 = B]$.
r-страты $=$ компоненты связности $B^r \setminus B^{r-1}$.

Эквивалентные системы (лагранжевы слоения с особенностями)

Два слоения $\pi_1 : M_1 \to B_1$ и $\pi_2 : M_2 \to B_2$ назовем *эквивалентными*, если $\exists$ гомеоморфизмы Φ, ϕ т.ч. $\pi_2 \circ \Phi = \phi \circ \pi_1$ и Φ сохр. ориентации всех $(M_r \setminus M_{r-1}, \omega)$.

Эквивалентные системы (лагранжевы слоения с особенностями)

Два слоения $\pi_1 : M_1 \to B_1$ и $\pi_2 : M_2 \to B_2$ назовем *эквивалентными*, если $\exists$ гомеоморфизмы Φ, ϕ т.ч. $\pi_2 \circ \Phi = \phi \circ \pi_1$ и Φ сохр. ориентации всех $(M_r \setminus M_{r-1}, \omega)$.

Слоения наз. *грубо эквивалентными* [Болсинов, Фоменко 1999]), если $\exists\ \phi$ и *лок. поднятия* $\Phi_\alpha : \pi_1^{-1}(U_\alpha) \to \pi_2^{-1}(\phi(U_\alpha))$ для некот. открытого покрытия $B_1 = \cup_\alpha U_\alpha$.

Эквивалентные системы (лагранжевы слоения с особенностями)

Два слоения $\pi_1 : M_1 \to B_1$ и $\pi_2 : M_2 \to B_2$ назовем *эквивалентными*, если $\exists$ гомеоморфизмы Φ, ϕ т.ч. $\pi_2 \circ \Phi = \phi \circ \pi_1$ и Φ сохр. ориентации всех $(M_r \setminus M_{r-1}, \omega)$.

Слоения наз. *грубо эквивалентными* [Болсинов, Фоменко 1999]), если $\exists$ ϕ и *лок. поднятия* $\Phi_\alpha : \pi_1^{-1}(U_\alpha) \to \pi_2^{-1}(\phi(U_\alpha))$ для некот. открытого покрытия $B_1 = \cup_\alpha U_\alpha$.

Слоения наз. *почти эквивалентными* [N.T. Zung 2003]), если они грубо эквивалентны и $\Phi_\beta^{-1} \circ \Phi_\alpha$ изотопны *id* в классе поднятий $id_{U_\alpha \cap U_\beta}$.

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_1"] & M_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ B_1 \arrow[r, "\phi"] & B_2. \end{tikzcd}$$

Проблема 1: Когда два слоения грубо эквивалентны?

Проблема 2: Пусть дан ϕ. Когда **грубая эквив.** $\Longrightarrow$ **почти эквив.**?

Проблема 3: Пусть дан ϕ. Когда **почти эквив-ть** $\Longrightarrow$ **эквив.**?

Какие инварианты различают неэквив. слоения? 3 возможности для M_1 и M_2:

- локально (окрестность точки или особого слоя);
- полу-глобально ($\pi^{-1}(\overline{\beta})$, где $\beta \subseteq B^2 \setminus B^1$ — замыкание 2-страта);
- глобально (все M).

Эквивалентные системы (лагранжевы слоения с особенностями)

Два слоения $\pi_1 : M_1 \to B_1$ и $\pi_2 : M_2 \to B_2$ назовем *эквивалентными*, если $\exists$ гомеоморфизмы Φ, ϕ т.ч. $\pi_2 \circ \Phi = \phi \circ \pi_1$ и Φ сохр. ориентации всех $(M_r \setminus M_{r-1}, \omega)$.

Слоения наз. *грубо эквивалентными* [Болсинов, Фоменко 1999]), если $\exists$ ϕ и *лок. поднятия* $\Phi_\alpha : \pi_1^{-1}(U_\alpha) \to \pi_2^{-1}(\phi(U_\alpha))$ для некот. открытого покрытия $B_1 = \cup_\alpha U_\alpha$.

Слоения наз. *почти эквивалентными* [N.T. Zung 2003]), если они грубо эквивалентны и $\Phi_\beta^{-1} \circ \Phi_\alpha$ изотопны id в классе поднятий $id_{U_\alpha \cap U_\beta}$.

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi_1"] & M_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ B_1 \arrow[r, "\phi"] & B_2. \end{tikzcd}$$

Проблема 1: Когда два слоения грубо эквивалентны?

Проблема 2: Пусть дан ϕ. Когда **грубая эквив.** $\Longrightarrow$ **почти эквив.**?

Проблема 3: Пусть дан ϕ. Когда **почти эквив-ть** $\Longrightarrow$ **эквив.**?

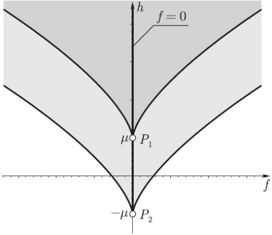
Какие инварианты различают неэквив. слоения? 3 возможности для M_1 и M_2:

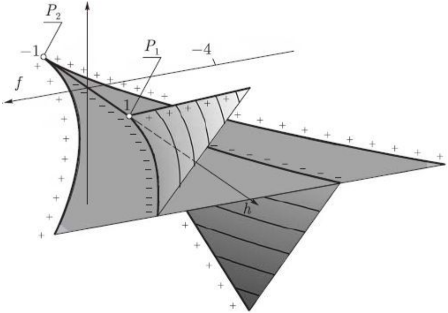
- локально (окрестность точки или особого слоя);
- полу-глобально ($\pi^{-1}(\overline{\beta})$, где $\beta \subseteq B^2 \setminus B^1$ — замыкание 2-страта);
- глобально (все M).

Допустимые типы особенностей:

- невырожденные особенности (точка $m \in M^0$ невыр., если $dX_{f_i}(m)$ лин. нез. и $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n$ т.ч. $\sum \lambda_i dX_{f_i}(m)$ не имеет кратных собственных значений),
- более вырожденные особенности ранга 1 (параболические орбиты с резонансами: $f_1 = I$, $f_2 = p^2 + q^3 + Iq$, $\omega = di \wedge d\varphi + dp \wedge dq$ и т.п.).

Решение проблемы 1. Иллюстрация: база слоения Лиувилля в интегрируемом случае Горячева-Чаплыгина

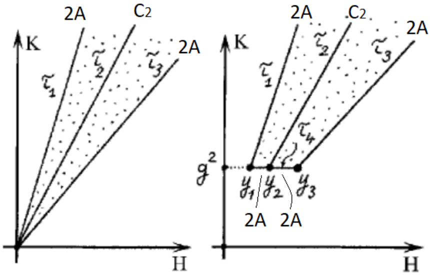




B – стратифицированное 2-многообразие $(B, \mathcal{S})$.
Стратификация $\mathcal{S} = [B^0 \subseteq B^1 \subseteq B^2 = B]$.
r-страты = компоненты связности $B^r \setminus B^{r-1}$.

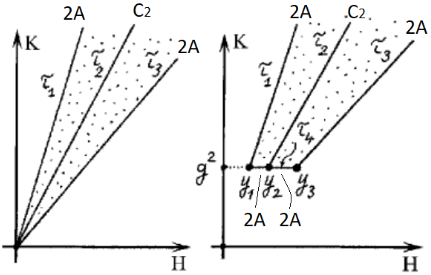
Решение проблемы 1 (А.Т. Фоменко): два лагранжевых слоения $\pi_1 : M_1 \to B_1$ и $\pi_2 : M_2 \to B_2$ грубо эквивалентны $\iff \exists \phi : B_1 \to B_2$ т.ч. $\phi(B_1, S_1, T_1) = (B_2, S_2, T_2)$.

Здесь T – комбинаторные метки на вершинах и ребрах (B, S), описывающие топологию слоения в $\pi^{-1}(U)$.

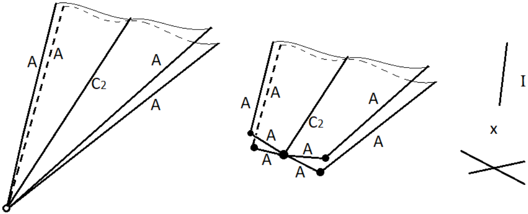


Бифуркационная диаграмма $F(M^2)$ (для 0 и $\neq 0$ значений углового момента)

Множество критических значений и база слоения. Волчок Эйлера



Бифуркационная диаграмма $F(M^2)$ (для 0 и $\neq 0$ значений углового момента)



Бифуркационный комплекс B (для 0 и $\neq 0$ значений углового момента)

- Регулярный случай (нет особых точек)

Theorem 3 (теорема Лиувилля)

Пусть $\mathcal{L}$ — регулярный компактный слой лагранжева слоения. Тогда в некоторой окрестности $U(\mathcal{L})$ слоение симплектоморфно стандартной модели:

$F : T^2 \times D^2 \to D^2$, *и* $\omega = \sum_{i=1}^{2} dI_i \wedge d\varphi_i$, *где* φ_1, φ_2 *(углы) – 2π-периодичные координаты на* T^2 *(слое) и* I_1, I_2 *(действия) – координаты на* D^2 *(базе).*

Примеры решения проблем 2 и 3.

- Регулярный случай (нет особых точек)

Theorem 3 (теорема Лиувилля)

Пусть $\mathcal{L}$ — регулярный компактный слой лагранжева слоения. Тогда в некоторой окрестности $U(\mathcal{L})$ слоение симплектоморфно стандартной модели:

$F : T^2 \times D^2 \to D^2$, *и* $\omega = \sum_{i=1}^{2} dI_i \wedge d\varphi_i$, *где* φ_1, φ_2 *(углы) – 2π-периодичные координаты на T^2 (слое) и I_1, I_2 (действия) – координаты на D^2 (базе).*

Свойства: (i) явная формула для переменных действия: $2\pi I_i = \oint_{\gamma_i} \alpha$, где $d\alpha = \omega$;

(ii) переменные действия определены с точностью до $\mathbb{R}^2 \rtimes GL(2, \mathbb{Z})$; $\Omega = dI_1 \wedge dI_2$.

Примеры решения проблем 2 и 3.

- Регулярный случай (нет особых точек)

Theorem 3 (теорема Лиувилля)

Пусть $\mathcal{L}$ — регулярный компактный слой лагранжева слоения. Тогда в некоторой окрестности $U(\mathcal{L})$ слоение симплектоморфно стандартной модели:

$F : T^2 \times D^2 \to D^2$, и $\omega = \sum_{i=1}^{2} dI_i \wedge d\varphi_i$, где φ_1, φ_2 (углы) – 2π-периодичные координаты на T^2 (слое) и I_1, I_2 (действия) – координаты на D^2 (базе).

Свойства: (i) явная формула для переменных действия: $2\pi I_i = \oint_{\gamma_i} \alpha$, где $d\alpha = \omega$;

(ii) переменные действия определены с точностью до $\mathbb{R}^2 \rtimes GL(2, \mathbb{Z})$; $\Omega = dI_1 \wedge dI_2$.

Вывод: переменные действия $=$ $\mathbb{Z}$-плоская аффинная связность на $B_{\mathrm{reg}} = B \setminus B^{n-1}$

Примеры решения проблем 2 и 3.

- Регулярный случай (нет особых точек)

Theorem 3 (теорема Лиувилля)

Пусть $\mathcal{L}$ — регулярный компактный слой лагранжева слоения. Тогда в некоторой окрестности $U(\mathcal{L})$ слоение симплектоморфно стандартной модели:

$F : T^2 \times D^2 \to D^2$, и $\omega = \sum\limits_{i=1}^{2} dI_i \wedge d\varphi_i$, где φ_1, φ_2 (углы) – 2π-периодичные координаты на T^2 (слое) и I_1, I_2 (действия) – координаты на D^2 (базе).

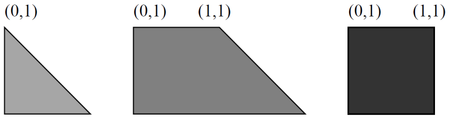
Свойства: (i) явная формула для переменных действия: $2\pi I_i = \oint\limits_{\gamma_i} \alpha$, где $d\alpha = \omega$;

(ii) переменные действия определены с точностью до $\mathbb{R}^2 \rtimes GL(2, \mathbb{Z})$; $\Omega = dI_1 \wedge dI_2$.

Вывод: переменные действия $=$ $\mathbb{Z}$-плоская аффинная связность на $B_{\mathrm{reg}} = B \setminus B^{n-1}$

- J. Duistermaat 1987: $\exists$ глобальные переменные действие-угол $\iff$ аффинная монодромия $\mu(P) = 0$ ($P \subset T^*B$ – решетка периодов) и $\lambda(M, \omega, B, \pi) = 0$ (лагранжев класс слоения) - решают проблемы 2 и 3, $\chi(B) = 0$,
- Mishachev 1996, I.K.Kozlov 2020: $B = T^2$ и $B = S^1 \tilde{\times} S^1$.

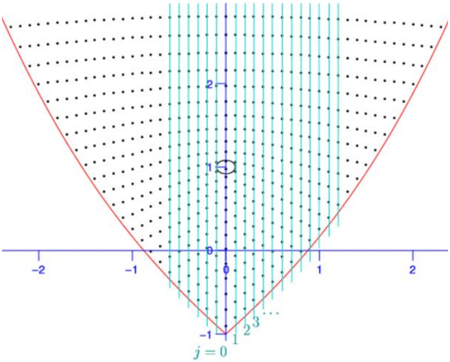
- Только эллиптические особенности. T. Delzant, 1988: торические действия.

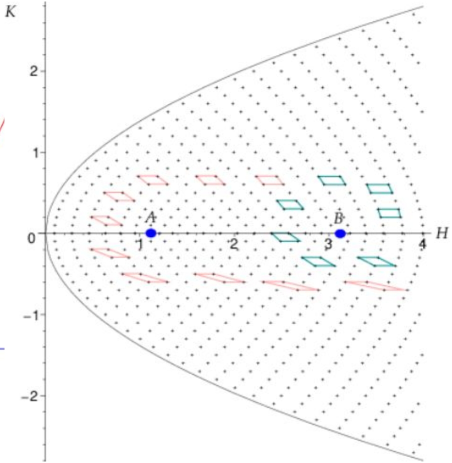


Пример: momentum polytope $I(M_i)$ для $M_1 = \mathbb{C}P^2$, пов. Хирц. M_2 и $M_3 = (\mathbb{C}P^1)^2$, M_2 грубо эквив. M_3, но не почти эквив. $I(M_i)$ определяет слоение с точн. до симп

Решение проблемы 3 (N.T. Zung, 2003): пусть $\phi : B_1 \to B_2$ — грубая эквивалентность между лагранжевыми слоениями $\pi_1 : M_1 \to B_1$ и $\pi_2 : M_2 \to B_2$ (т.е. локально поднимается). Тогда ϕ — почти эквивалентность $\iff$ $\phi^*(\lambda_2) = \lambda_1$.

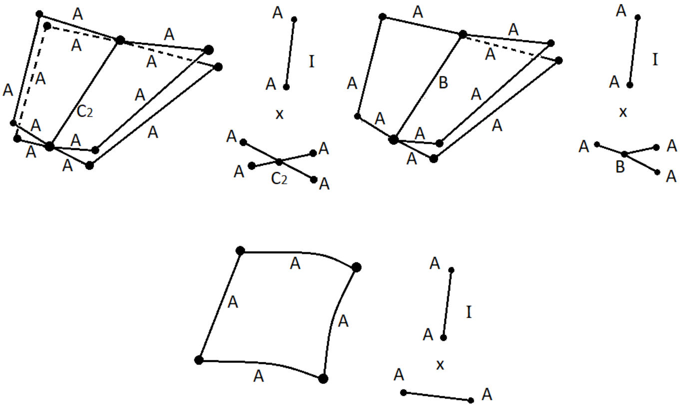
Здесь $\lambda \in H^2(B, \mathcal{R})$ — класс Черна слоения $\pi : M \to B$ (препятствие к $\exists$ сечения).





Примеры решения проблемы 2 в «гиперболическом» случае

Проблема: описать все лагранжевы слоения с особенностями (с точностью до эквивалентности), имеющие такую базу (бифуркационный комплекс): $X \times I$, $Y \times I$.
Сколько их? Какова их структура?
Ответ: 1, 1 (структура прямого произведения), ∞.



похожи на "4-мерное твердое тело", случай Жуковского, волчок Лагранжа

Что известно о симплектических и топологических инвариантах?

- Local
  - J. Vey 1978, H. Eliasson 1990:
    Non-degenerate singularities are classified by combinatorial data $(k_e, k_h, k_f) \in \mathbb{Z}_+^3$,
    $k_e + k_h + 2k_f = n - r$;
  - E. Miranda and N.T. Zung, 2004:
    Equivariant version of this result (near a non-degenerate orbit).

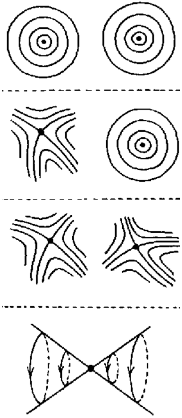
Что известно о симплектических и топологических инвариантах?

- Local
  - J. Vey 1978, H. Eliasson 1990:
    Non-degenerate singularities are classified by combinatorial data $(k_e, k_h, k_f) \in \mathbb{Z}_+^3$,
    $k_e + k_h + 2k_f = n - r$;
  - E. Miranda and N.T. Zung, 2004:
    Equivariant version of this result (near a non-degenerate orbit).
- Semi-local
  - A. Fomenko and H. Zieschang, 1990: Topology of hyperbolic corank 1 singularities (2 d.f.),
    N.T. Zung, 1996: Topology of nondegenerate singularities,
    A.S. Lermontova, 2005: Topology of hyperbolic corank 1 singularities.

Что известно о симплектических и топологических инвариантах?

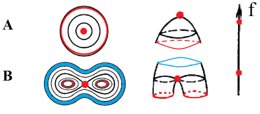
- Local
  - J. Vey 1978, H. Eliasson 1990:
    Non-degenerate singularities are classified by combinatorial data $(k_e, k_h, k_f) \in \mathbb{Z}_+^3$, $k_e + k_h + 2k_f = n - r$;
  - E. Miranda and N.T. Zung, 2004:
    Equivariant version of this result (near a non-degenerate orbit).
- Semi-local
  - A. Fomenko and H. Zieschang, 1990: Topology of hyperbolic corank 1 singularities (2 d.f.),
    N.T. Zung, 1996: Topology of nondegenerate singularities,
    A.S. Lermontova, 2005: Topology of hyperbolic corank 1 singularities.
- Semi-global and global
  - A. Fomenko and H.Zieschang, 1990: Topology of fibrations on 3D isoenergy manifolds (semi-global invariants $\{r_\beta, \varepsilon_\beta\}$, global invariants $\{n_{B'}\}$, where β is a 2-stratum and B' is a family of 2-strata, 2.d.f.),
  - J. Duistermaat, 1987: Regular case (no singular fibres), Mishachev, 1996, I.K.Kozlov, 2020 (2 d.f.),
  - T. Delzant, 1988: Toric actions,
  - N.C. Leung and M. Symington, 2018: Topology of almost toric fibrations on closed 4-manifolds (without hyperbolic blocks, 2 d.f.),
  - N.T. Zung, 2003: Very general case (topological and symplectic classifications) for roughly equivalent systems s.t. each composition $\Phi_\alpha^{-1} \circ \Phi_\beta$ is isotopic to $id_{\pi_1^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)}$ in the space of liftings of $id_{U_\alpha \cap U_\beta}$ (such fibrations will be called *almost-equivalent* (roughly equivalent [N.T. Zung 2003]).

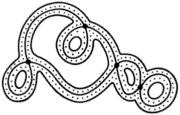
Невырожденные особенности (почти прямые произведения)

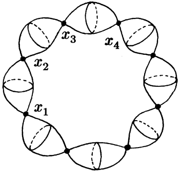


Теорема (Vey 1978, Eliasson 1990, локальная симпл. классификаци
В окрестности невырожденной точки лагранжево слоение симплек-
томорфно прямому произведению элементарных блоков 4 типов:
$h_i = \lambda_i$ (регулярный тип), r экземпляров,
$h_i = x_i^2 + y_i^2$ (эллиптический тип), k_e экземпляров,
$h_i = x_i^2 - y_i^2$ (гиперболический тип), k_h экземпляров,
$h_j = Re(x_j + ix_{j+1})(y_j - iy_{j+1})$ (фокус-фокус тип), k_f экземпляров,
$h_{j+1} = Im(x_j + ix_{j+1})(y_j - iy_{j+1})$, $k_e + k_h + 2k_f + r = n$.

Теорема (N.T. Zung 1996, локальная тополог. классификация)
В окрестности невырожденного слоя, удовлетворяющего условию нерасщепляемости, лагранжево слоение эквивалентно почти-прямому произведению $T = (V_1 \times \cdots \times V_k)/G$ элементарных блоков 4 типов (метка T в вершине или на ребре комплекса B):
регулярный $V_{reg} = D^1 \times S^1$ (r штук),
эллиптический (k_e штук), гиперболический (k_h штук), фокус-фокус (k_f штук).

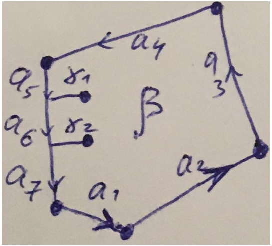


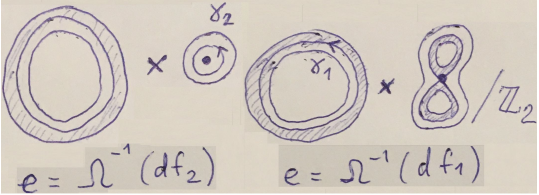




(B, S, T)

$\beta \subset B$ наз. *топологической гранью* комплекса B [Zung 2003], если β – объединение грани и всех 0-стратов $p_1, \dots, p_N \in \partial\beta$ типа фокус-фокус (нодальные точки).
Разрезом (или кривыми ветвления) топологической грани β называется набор попарно непересекающихся простых кривых $\gamma_j : [0,1] \to \overline{\beta}$, $1 \le j \le N$, т.ч. $\gamma_j(0) = p_j$, $\gamma_j(1) =: q_j \in B^1 \setminus B^0$ и $\gamma_j([0,1)) \subset \beta$.





Пусть $\beta \approx D^2$ — k-угольник с N нодальными точками.
Выберем базисную точку $b \in \beta \setminus (\cup_{j=1}^{N} \gamma_j)$.
$\partial\beta = a_1, \dots, a_{k+N}$ – обход против часовой стрелки.
Сопоставим каждой стороне $a_j \mapsto \gamma_j \mapsto e_j = \Omega^{-1}(df_{1,2}) \in T_b B$, где $\gamma_j \in H_1(\pi^{-1}(b))$.

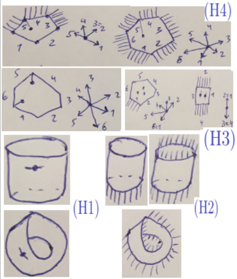
Еж топологической грани $(\beta, \{\gamma_j\})$:
$\mathcal{E}(\beta, \{\gamma_j\}) = [D_b I(e_1), \dots, D_b I(e_{k+N})] mod SL(2,\mathbb{Z}) \in (\mathbb{Z}^2)^{k+N} / SL(2,\mathbb{Z})$.

Топологический инвариант $(B, \mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{E})$ — меченая база слоения.

Полу-глобальный топологический инвариант: ежи топологич. граней

Base	# of nodes	# of vertices	Total space
D^2	$n \geq 0$	$k \geq \max(0, 3-n)$	$\mathbb{C}P^2\#(n+k-3)\overline{\mathbb{C}P}^2$ or $S^2\times S^2$ (if $n+k=4$)
$S^1\times I$	$n \geq 0$	0	$(S^2\times T^2)\,\#\,n\overline{\mathbb{C}P}^2$ or $(S^2\tilde{\times}T^2)\,\#\,n\overline{\mathbb{C}P}^2$
$S^1\tilde{\times}I$	$n \geq 0$	0	$(S^2\times T^2)\,\#\,n\overline{\mathbb{C}P}^2$ or $(S^2\tilde{\times}T^2)\,\#\,n\overline{\mathbb{C}P}^2$
S^2	24	0	K3 surface
$\mathbb{R}P^2$	12	0	Enriques surface
T^2	0	0	T^2 bundle with monodromy $(I, \left(\begin{smallmatrix}1&\lambda\\0&1\end{smallmatrix}\right))$
$S^1\tilde{\times}S^1$	0	0	T^2 bundle with monodromy $(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&\lambda\\0&1\end{smallmatrix}\right))$

Table 1: Closed almost toric four-manifolds



Определим *гиперболический тип* грани: (H1) нет гип.; (H2) $\exists$ гип., нет гип.-элл.; (H3) $\exists$ гип.-элл., $\nexists$ гип.-гип.; (H4) $\exists$ гип.-гип. [Leung, Symington 2018]

Следующая теорема обобщает [Zung 2003, Prop. 3.3] и [Leung, Symington, Th. 6.10].

Theorem 4 (Свойства ежей)

Пусть (M, ω, B, π) *– лагранжево слоение с особенностями на 4-мерном многообразии, все особенности невырождены и удовлетворяют условию нерасщепляемости,* $(e_1, \dots, e_{k+N})$ *– еж граничной окружности* $\partial_i\beta$ *топологической грани* β*. Тогда* $\Omega(e_j, e_{j+1}) > 0$*, если* e_j, e_{j+1} *одного типа (элл. или гип.),* $e_{j+1} = e_j$ *для элл.* e_j *и гип.* e_{j+1}*,* $e_{j+1} = -e_j$ *для гип.* e_j *и элл.* e_{j+1}*. Если все* $\partial_i\beta$ *хорошие (т.е. либо* $k > 0$ *и* $\Omega(e_1, e_m) > 0$*, либо* $k = 0$ *и* $\partial_i\beta$ *элл., либо* $k = 0$ *и* $\partial_i\beta$ *гип. с топол. монодромией* $\begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$*,* $\ell \le 0$*), то* $\chi(\beta) \ge 0$ *и*

(a) β *хорошая, т.е. имеет вид как в таблице.*
Если топологическая грань $\beta \approx D^2$ *имеет допустимый разрез (для типов* $(\mathrm{H}1)$*,* $(\mathrm{H}3)$ *и* $(\mathrm{H}4)$*), то ее еж* $\mathcal{E}(\beta, \{\gamma_j\})$ *делает ровно 1 оборот.*

(b) *Если все топологические грани у* B *хорошие, то они имеют один и тот же гип. тип* $(\mathrm{H}i)$*,* $i = 1, 2, 3, 4$*.*

(c) *Для любой "семьи", образованной гранями с 1-мерными ежами (т.е. либо* $(\mathrm{H}1)$ *и* $B \approx S^1 \times I$ *или* $S^1 \tilde{\times} I$*, либо* $(\mathrm{H}2)$ *или* $(\mathrm{H}3)$*),* $\exists$ *гамильтоново* S^1*-действие, порожденное* $I \circ \pi$*. Здесь* $I : B \to \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ *для* $(\mathrm{H}2)$*,* $I : U \to \mathbb{R}$ *для* $(\mathrm{H}1)$ *и* $(\mathrm{H}3)$*,* U *– малая окрестность ребра* $\approx S^1$ *или объединения ребер, имеющих вершину элл.-гип. типа,* $I(U) = [0, L)$*.*

Полнота топологического инварианта (меченой базы слоения)

Theorem 5 (Топологическая классификация)

Пусть $(M_i, \omega_i, B_i, \pi_i)$, $i = 1, 2$, *– лагранжевы слоения с особенностями и* $\phi : B_1 \to B_2$ *–* *гомеоморфизм, который локально поднимается (т.е. слоения грубо эквивалентны). Предположим, что*

- *все топологические грани хорошие (т.е. как в таблице),*
- *в случае гип. типов из теоремы* $1\,(\mathrm{c})$ $\nexists$ *вложения листа Мебиуса в* B_1,
- *каждая вершина B топологически жесткая (т.е. любое поднятие тождественного гомеоморфизма гомотопно id в классе поднятий),*
- $\forall$ *гип. ребра соответствующий 2-атом* [Болсинов, Фоменко] *плоский.*

Тогда ϕ *имеет глобальное поднятие* $\iff$

- ϕ *сохраняет ежа каждой топологической грани* $\beta \subset B_1$, *гомеоморфной* D^2 *и имеющей допустимый разрез* $\{\gamma_i\}$ *(в частности,* $\{\phi \circ \gamma_i\}$ *допустим для* $\phi(\beta)$*);*
- *для любой "семьи" (см. теорему* $1\,(\mathrm{c})$*) число Эйлера расслоений Зейферта на 3-мерных многообразиях* $(I_i \circ \pi_i)^{-1}(L_i/2)$, *отвечающих* S^1*-действиям, порожденным функциями* $I_i \circ \pi_i$, $i = 1, 2$, *совпадают (в случаях* (H1) *и* (H3) *мы считаем, что* $\phi(I_1^{-1}(0)) = I_2^{-1}(0)$*);*
- *в случаях* (H2) *и* (H4) *отображение* ϕ *сохраняет класс Черна* $\mu_i \in H^2(B_i, \mathcal{R}_i)$ *слоения* [Zung 2003, Def. 4.2 and Th. 4.6]*:* $\mu_1 = \phi^*(\mu_2)$.