Универсальные (ко)действующие бимоноиды и моноиды Хопфа

Гордиенко Алексей Сергеевич
(совместно с А. Агоре и Й. Веркрёйссе)

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

2-я конференция научных центров, Москва, МГУ, 7 ноября 2022 года

Содержание

1. Градуировки
   - Эквивалентность
   - Универсальная группа градуировки
2. Универсальные (ко)действующие би/Хопф алгебры
   - $(FG)^*$-действие
   - V-универсальные (ко)действующие би/Хопф алгебры
   - Двойственность и Ω-алгебры
3. Универсальные (ко)действующие би/Хопф моноиды
   - Основная категория
   - Носитель
   - Универсальный кодействующий бимоноид

Градуировки на алгебрах

Разложение $\Gamma \colon A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$ в прямую сумму подпространств называется *градуировкой* на алгебре A над полем F группой G, если $A^{(g)} A^{(h)} \subseteq A^{(gh)}$ для всех $g, h \in G$.

Изоморфизм градуировок

Пусть $\Gamma_1 \colon A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$ и $\Gamma_2 \colon B = \bigoplus_{h \in H} B^{(h)}$ — градуировки, где G и H — группы, а A и B — алгебры.

Градуировки Γ_1 и Γ_2 называются *изоморфными*, если $G = H$ и существует такой изоморфизм алгебр $\varphi \colon A \xrightarrow{\sim} B$, что $\varphi(A^{(g)}) = B^{(g)}$ для всех $g \in G$.

Изоморфизм градуировок

Пусть $\Gamma_1 \colon A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$ и $\Gamma_2 \colon B = \bigoplus_{h \in H} B^{(h)}$ — градуировки, где G и H — группы, а A и B — алгебры.

Градуировки Γ_1 и Γ_2 называются *изоморфными*, если $G = H$ и существует такой изоморфизм алгебр $\varphi \colon A \xrightarrow{\sim} B$, что $\varphi(A^{(g)}) = B^{(g)}$ для всех $g \in G$.

Эквивалентность градуировок

Пусть $\Gamma_1 \colon A = \bigoplus_{g\in G} A^{(g)}$ и $\Gamma_2 \colon B = \bigoplus_{h\in H} B^{(h)}$ — градуировки, где G и H — группы, а A и B — алгебры.

Градуировки Γ_1 и Γ_2 называются *эквивалентными*, если существует такой изоморфизм алгебр $\varphi \colon A \widetilde{\to} B$, что для любого $g \in G$ с $A^{(g)} \neq 0$ существует такой $h \in H$, что $\varphi\left(A^{(g)}\right) = B^{(h)}$.

Пример

Следующие $(S_3, \cdot)$- и $(\mathbb{Z}, +)$-градуировки на $M_2(F)$ эквивалентны:

$$\begin{pmatrix} 1 & (123) \\ (132) & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Носитель

Для градуировки $\Gamma \colon A = \bigoplus_{g\in G} A^{(g)}$ обозначим через $\operatorname{supp}\Gamma := \{g \in G \mid A^{(g)} \neq 0\}$ её *носитель*.

Всякая эквивалентность градуировок Γ_1 и Γ_2 порождает биекцию $\operatorname{supp}\Gamma_1 \mathrel{\widetilde{\to}} \operatorname{supp}\Gamma_2$.

Определение [И. Патера, Х. Цассенхаус, 1989]

- Пусть Γ — групповая градуировка на алгебре A.
- Предположим, что Γ допускает реализацию в качестве G_Γ-градуировки для некоторой группы G_Γ.
- Обозначим через $\varkappa_\Gamma$ соответствующее вложение $\operatorname{supp}\Gamma \hookrightarrow G_\Gamma$.
- Будем говорить, что $(G_\Gamma, \varkappa_\Gamma)$ — *универсальная группа градуировки* Γ, если для любой реализации градуировки Γ некоторой группой G с соответствующим вложением $\psi\colon \operatorname{supp}\Gamma \hookrightarrow G$ существует единственный такой гомоморфизм групп $\varphi\colon G_\Gamma \to G$, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{supp}\Gamma \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[dr, "\psi"'] & G_\Gamma \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Определение [И. Патера, Х. Цассенхаус, 1989]

- Пусть Γ — групповая градуировка на алгебре A.
- Предположим, что Γ допускает реализацию в качестве G_Γ-градуировки для некоторой группы G_Γ.
- Обозначим через $\varkappa_\Gamma$ соответствующее вложение $\operatorname{supp}\Gamma \hookrightarrow G_\Gamma$.
- Будем говорить, что $(G_\Gamma, \varkappa_\Gamma)$ — *универсальная группа градуировки* Γ, если для любой реализации градуировки Γ некоторой группой G с соответствующим вложением $\psi\colon \operatorname{supp}\Gamma \hookrightarrow G$ существует единственный такой гомоморфизм групп $\varphi\colon G_\Gamma \to G$, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{supp}\Gamma \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[dr, "\psi"'] & G_\Gamma \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\
& G
\end{tikzcd}$$

Определение [И. Патера, Х. Цассенхаус, 1989]

- Пусть Γ — групповая градуировка на алгебре A.
- Предположим, что Γ допускает реализацию в качестве G_Γ-градуировки для некоторой группы G_Γ.
- Обозначим через $\varkappa_\Gamma$ соответствующее вложение $\operatorname{supp}\Gamma \hookrightarrow G_\Gamma$.
- Будем говорить, что $(G_\Gamma, \varkappa_\Gamma)$ — *универсальная группа градуировки* Γ, если для любой реализации градуировки Γ некоторой группой G с соответствующим вложением $\psi\colon \operatorname{supp}\Gamma \hookrightarrow G$ существует единственный такой гомоморфизм групп $\varphi\colon G_\Gamma \to G$, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{supp}\Gamma \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[dr, "\psi"'] & G_\Gamma \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Определение [И. Патера, Х. Цассенхаус, 1989]

- Пусть Γ — групповая градуировка на алгебре A.
- Предположим, что Γ допускает реализацию в качестве G_Γ-градуировки для некоторой группы G_Γ.
- Обозначим через $\varkappa_\Gamma$ соответствующее вложение $\operatorname{supp}\Gamma \hookrightarrow G_\Gamma$.
- Будем говорить, что $(G_\Gamma, \varkappa_\Gamma)$ — *универсальная группа градуировки* Γ, если для любой реализации градуировки Γ некоторой группой G с соответствующим вложением $\psi\colon \operatorname{supp}\Gamma \hookrightarrow G$ существует единственный такой гомоморфизм групп $\varphi\colon G_\Gamma \to G$, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{supp}\Gamma \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[dr, "\psi"'] & G_\Gamma \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\
& G
\end{tikzcd}$$

Определение [И. Патера, Х. Цассенхаус, 1989]

- Пусть Γ — групповая градуировка на алгебре A.
- Предположим, что Γ допускает реализацию в качестве G_Γ-градуировки для некоторой группы G_Γ.
- Обозначим через $\varkappa_\Gamma$ соответствующее вложение $\operatorname{supp}\Gamma \hookrightarrow G_\Gamma$.
- Будем говорить, что $(G_\Gamma, \varkappa_\Gamma)$ — *универсальная группа градуировки* Γ, если для любой реализации градуировки Γ некоторой группой G с соответствующим вложением $\psi\colon \operatorname{supp}\Gamma \hookrightarrow G$ существует единственный такой гомоморфизм групп $\varphi\colon G_\Gamma \to G$, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{supp}\Gamma \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[dr, "\psi"'] & G_\Gamma \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Определение [И. Патера, Х. Цассенхаус, 1989]

- Пусть Γ — групповая градуировка на алгебре A.
- Предположим, что Γ допускает реализацию в качестве G_Γ-градуировки для некоторой группы G_Γ.
- Обозначим через $\varkappa_\Gamma$ соответствующее вложение $\operatorname{supp}\Gamma \hookrightarrow G_\Gamma$.
- Будем говорить, что $(G_\Gamma, \varkappa_\Gamma)$ — *универсальная группа градуировки* Γ, если для любой реализации градуировки Γ некоторой группой G с соответствующим вложением $\psi\colon \operatorname{supp}\Gamma \hookrightarrow G$ существует единственный такой гомоморфизм групп $\varphi\colon G_\Gamma \to G$, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{supp}\Gamma \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[dr, "\psi"'] & G_\Gamma \arrow[d, dashed, "\varphi"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Алгебры, коалгебры, биалгебры, алгебры Хопфа

Алгебры с 1: умножение $A \otimes A \to A$, единица $u \colon F \to A$, $u(\lambda) = \lambda 1_F$

Коалгебры: коумножение $\Delta \colon C \to C \otimes C$, коединица $\varepsilon \colon C \to F$.

биалгебра = алгебра + коалгебра

алгебра Хопфа = биалгебра + антипод S

Пример: Групповая алгебра FG: $\Delta(g) := g \otimes g$, $\varepsilon(g) = 1$, $S(g) = g^{-1}$ для всех $g \in G$.

Алгебры, коалгебры, биалгебры, алгебры Хопфа

Алгебры с 1: умножение $A \otimes A \to A$, единица $u\colon F \to A$, $u(\lambda) = \lambda 1_F$

Коалгебры: коумножение $\Delta\colon C \to C \otimes C$, коединица $\varepsilon\colon C \to F$.

биалгебра = алгебра + коалгебра

алгебра Хопфа = биалгебра + антипод S

Пример: Групповая алгебра FG: $\Delta(g) := g \otimes g$, $\varepsilon(g) = 1$, $S(g) = g^{-1}$ для всех $g \in G$.

Алгебры, коалгебры, биалгебры, алгебры Хопфа

Алгебры с 1: умножение $A \otimes A \to A$, единица $u\colon F \to A$, $u(\lambda) = \lambda 1_F$

Коалгебры: коумножение $\Delta\colon C \to C \otimes C$, коединица $\varepsilon\colon C \to F$.

биалгебра = алгебра + коалгебра

алгебра Хопфа = биалгебра + антипод S

Пример: Групповая алгебра FG: $\Delta(g) := g \otimes g$, $\varepsilon(g) = 1$, $S(g) = g^{-1}$ для всех $g \in G$.

Алгебры, коалгебры, биалгебры, алгебры Хопфа

Алгебры с 1: умножение $A \otimes A \to A$, единица $u\colon F \to A$, $u(\lambda) = \lambda 1_F$

Коалгебры: коумножение $\Delta\colon C \to C \otimes C$, коединица $\varepsilon\colon C \to F$.

биалгебра $=$ алгебра $+$ коалгебра

алгебра Хопфа $=$ биалгебра $+$ антипод S

Пример: Групповая алгебра FG: $\Delta(g) := g \otimes g$, $\varepsilon(g) = 1$, $S(g) = g^{-1}$ для всех $g \in G$.

Алгебры, коалгебры, биалгебры, алгебры Хопфа

Алгебры с 1: умножение $A \otimes A \to A$, единица $u\colon F \to A$, $u(\lambda) = \lambda 1_F$

Коалгебры: коумножение $\Delta\colon C \to C \otimes C$, коединица $\varepsilon\colon C \to F$.

биалгебра = алгебра + коалгебра

алгебра Хопфа = биалгебра + антипод S

Пример: Групповая алгебра FG: $\Delta(g) := g \otimes g$, $\varepsilon(g) = 1$, $S(g) = g^{-1}$ для всех $g \in G$.

$(FG)^*$-действие

Если $\Gamma\colon A = \bigoplus_{g\in G} A^{(g)}$ — G-градуировка, то алгебра $(FG)^*$ всех функций $G \to F$ с поточечными операциями действует на алгебре A следующим способом: $ha = h(g)a$ для всех $g \in G$, $a \in A^{(g)}$, $h \in (FG)^*$.

$(FG)^*$-действие

Если $\Gamma \colon A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$ — G-градуировка, то алгебра $(FG)^*$ всех функций $G \to F$ с поточечными операциями действует на алгебре A следующим способом: $ha = h(g)a$ для всех $g \in G$, $a \in A^{(g)}$, $h \in (FG)^*$.

$(FG)^*$-действие

Если $\Gamma\colon A = \bigoplus_{g\in G} A^{(g)}$ — G-градуировка, то алгебра $(FG)^*$ всех функций $G \to F$ с поточечными операциями действует на алгебре A следующим способом: $ha = h(g)a$ для всех $g \in G$, $a \in A^{(g)}$, $h \in (FG)^*$.

Эквивалентность градуировок в терминах $(FG)^*$-действий

- Пусть $\Gamma_1 \colon A_1 = \bigoplus_{g\in G_1} A_1^{(g)}$ и $\Gamma_2 \colon A_2 = \bigoplus_{g\in G_2} A_2^{(g)}$ — групповые градуировки.
- Обозначим через $\zeta_i \colon (FG_i)^* \to \operatorname{End}_F A_i$ соответствующие $(FG_i)^*$-действия, $i = 1, 2$.
- Пусть $\varphi \colon A_1 \xrightarrow{\sim} A_2$ — некоторый изоморфизм алгебр.
- Обозначим через $\tilde\varphi \colon \operatorname{End}_F A_1 \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}_F A_2$, заданный как $\tilde\varphi(f) := \varphi f \varphi^{-1}$ для всех $f \in \operatorname{End}_F A_1$.
- Тогда φ — эквивалентность градуировок Γ_1 и Γ_2, если и только если

$$\tilde\varphi\Big(\zeta_1\big((FG_1)^*\big)\Big) = \zeta_2\big((FG_2)^*\big).$$

Эквивалентность градуировок в терминах $(FG)^*$-действий

- Пусть $\Gamma_1 \colon A_1 = \bigoplus_{g\in G_1} A_1^{(g)}$ и $\Gamma_2 \colon A_2 = \bigoplus_{g\in G_2} A_2^{(g)}$ — групповые градуировки.
- Обозначим через $\zeta_i \colon (FG_i)^* \to \operatorname{End}_F A_i$ соответствующие $(FG_i)^*$-действия, $i = 1, 2$.
- Пусть $\varphi \colon A_1 \mathrel{\widetilde{\to}} A_2$ — некоторый изоморфизм алгебр.
- Обозначим через $\tilde\varphi \colon \operatorname{End}_F A_1 \mathrel{\widetilde{\to}} \operatorname{End}_F A_2$, заданный как $\tilde\varphi(f) := \varphi f \varphi^{-1}$ для всех $f \in \operatorname{End}_F A_1$.
- Тогда φ — эквивалентность градуировок Γ_1 и Γ_2, если и только если

$$\tilde\varphi\Big(\zeta_1\big((FG_1)^*\big)\Big) = \zeta_2\big((FG_2)^*\big).$$

Эквивалентность градуировок в терминах $(FG)^*$-действий

- Пусть $\Gamma_1\colon A_1 = \bigoplus_{g\in G_1} A_1^{(g)}$ и $\Gamma_2\colon A_2 = \bigoplus_{g\in G_2} A_2^{(g)}$ — групповые градуировки.
- Обозначим через $\zeta_i\colon (FG_i)^* \to \operatorname{End}_F A_i$ соответствующие $(FG_i)^*$-действия, $i = 1, 2$.
- Пусть $\varphi\colon A_1 \xrightarrow{\sim} A_2$ — некоторый изоморфизм алгебр.
- Обозначим через $\tilde\varphi\colon \operatorname{End}_F A_1 \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}_F A_2$, заданный как $\tilde\varphi(f) := \varphi f \varphi^{-1}$ для всех $f \in \operatorname{End}_F A_1$.
- Тогда φ — эквивалентность градуировок Γ_1 и Γ_2, если и только если

$$\tilde\varphi\Big(\zeta_1\big((FG_1)^*\big)\Big) = \zeta_2\big((FG_2)^*\big).$$

Эквивалентность градуировок в терминах $(FG)^*$-действий

- Пусть $\Gamma_1 \colon A_1 = \bigoplus_{g \in G_1} A_1^{(g)}$ и $\Gamma_2 \colon A_2 = \bigoplus_{g \in G_2} A_2^{(g)}$ — групповые градуировки.
- Обозначим через $\zeta_i \colon (FG_i)^* \to \operatorname{End}_F A_i$ соответствующие $(FG_i)^*$-действия, $i = 1, 2$.
- Пусть $\varphi \colon A_1 \xrightarrow{\sim} A_2$ — некоторый изоморфизм алгебр.
- Обозначим через $\tilde\varphi \colon \operatorname{End}_F A_1 \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}_F A_2$, заданный как $\tilde\varphi(f) := \varphi f \varphi^{-1}$ для всех $f \in \operatorname{End}_F A_1$.
- Тогда φ — эквивалентность градуировок Γ_1 и Γ_2, если и только если

$$\tilde\varphi\Big(\zeta_1\big((FG_1)^*\big)\Big) = \zeta_2\big((FG_2)^*\big).$$

Эквивалентность градуировок в терминах $(FG)^*$-действий

- Пусть $\Gamma_1 \colon A_1 = \bigoplus_{g\in G_1} A_1^{(g)}$ и $\Gamma_2 \colon A_2 = \bigoplus_{g\in G_2} A_2^{(g)}$ — групповые градуировки.
- Обозначим через $\zeta_i \colon (FG_i)^* \to \operatorname{End}_F A_i$ соответствующие $(FG_i)^*$-действия, $i = 1, 2$.
- Пусть $\varphi \colon A_1 \xrightarrow{\sim} A_2$ — некоторый изоморфизм алгебр.
- Обозначим через $\tilde\varphi \colon \operatorname{End}_F A_1 \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}_F A_2$, заданный как $\tilde\varphi(f) := \varphi f \varphi^{-1}$ для всех $f \in \operatorname{End}_F A_1$.
- Тогда φ — эквивалентность градуировок Γ_1 и Γ_2, если и только если

$$\tilde\varphi\Big(\zeta_1\big((FG_1)^*\big)\Big) = \zeta_2\big((FG_2)^*\big).$$

Носитель

- Пусть A, B и Q — векторные пространства.
- Пусть $\rho\colon A \to B \otimes Q$ — линейное отображение.
- Тогда $\operatorname{supp} \rho$ - это наименьшее такое подпространство $Q_0 \subseteq Q$, что $\rho(A) \subseteq B \otimes Q_0$

Носитель

- Пусть A, B и Q — векторные пространства.
- Пусть $\rho\colon A \to B \otimes Q$ — линейное отображение.
- Тогда $\operatorname{supp} \rho$ - это наименьшее такое подпространство $Q_0 \subseteq Q$, что $\rho(A) \subseteq B \otimes Q_0$

Носитель

- Пусть A, B и Q — векторные пространства.
- Пусть $\rho\colon A \to B \otimes Q$ — линейное отображение.
- Тогда $\operatorname{supp}\rho$ - это наименьшее такое подпространство $Q_0 \subseteq Q$, что $\rho(A) \subseteq B \otimes Q_0$

Коноситель

- Пусть A, B и P — векторные пространства.
- Пусть $\psi \colon P \otimes A \to B$ — линейное отображение.
- Тогда $\operatorname{cosupp} \psi := \psi(P \otimes (-)) \subseteq \operatorname{Hom}_F(A, B)$ — это подпространство всех линейных операторов $\psi(p \otimes (-)) \in \operatorname{Hom}_F(A, B)$, где $p \in P$

Для отображения $\rho \colon A \to B \otimes Q$ его коноситель $\operatorname{cosupp} \rho$ определяется как коноситель соответствующего отображения $Q^* \otimes A \to B$.

Коноситель

- Пусть A, B и P — векторные пространства.
- Пусть $\psi\colon P \otimes A \to B$ — линейное отображение.
- Тогда $\operatorname{cosupp}\psi := \psi(P \otimes (-)) \subseteq \operatorname{Hom}_F(A, B)$ — это подпространство всех линейных операторов $\psi(p \otimes (-)) \in \operatorname{Hom}_F(A, B)$, где $p \in P$

Для отображения $\rho\colon A \to B \otimes Q$ его коноситель $\operatorname{cosupp}\rho$ определяется как коноситель соответствующего отображения $Q^* \otimes A \to B$.

Коноситель

- Пусть A, B и P — векторные пространства.
- Пусть $\psi\colon P \otimes A \to B$ — линейное отображение.
- Тогда $\operatorname{cosupp}\psi := \psi(P \otimes (-)) \subseteq \operatorname{Hom}_F(A, B)$ — это подпространство всех линейных операторов $\psi(p \otimes (-)) \in \operatorname{Hom}_F(A, B)$, где $p \in P$

Для отображения $\rho\colon A \to B \otimes Q$ его коноситель $\operatorname{cosupp}\rho$ определяется как коноситель соответствующего отображения $Q^* \otimes A \to B$.

Коноситель

- Пусть A, B и P — векторные пространства.
- Пусть $\psi\colon P \otimes A \to B$ — линейное отображение.
- Тогда $\operatorname{cosupp}\psi := \psi(P \otimes (-)) \subseteq \operatorname{Hom}_F(A, B)$ — это подпространство всех линейных операторов $\psi(p \otimes (-)) \in \operatorname{Hom}_F(A, B)$, где $p \in P$

Для отображения $\rho\colon A \to B \otimes Q$ его коноситель $\operatorname{cosupp}\rho$ определяется как коноситель соответствующего отображения $Q^* \otimes A \to B$.

Структура (ко)модуля на тензорном произведении

Структура модуля на тензорном произведении модулей $A \otimes B$:

$$h(a \otimes b) := \sum h_{(1)} a \otimes h_{(2)} b$$

Здесь $\Delta \colon H \to H \otimes H$ — коумножение, $\Delta h = \sum h_{(1)} \otimes h_{(2)}$ — обозначения Свидлера.

Структура модуля на тензорном произведении модулей $A \otimes B$:

$$\rho(a \otimes b) := \sum a_{(0)} \otimes b_{(0)} \otimes a_{(1)} b_{(1)},$$

где $\rho(a) = \sum a_{(0)} \otimes a_{(1)}$, $\rho \colon A \to A \otimes H$.

Структура (ко)модуля на тензорном произведении

Структура модуля на тензорном произведении модулей $A \otimes B$:

$$h(a \otimes b) := \sum h_{(1)} a \otimes h_{(2)} b$$

Здесь $\Delta \colon H \to H \otimes H$ — коумножение, $\Delta h = \sum h_{(1)} \otimes h_{(2)}$ — обозначения Свидлера.

Структура модуля на тензорном произведении модулей $A \otimes B$:

$$\rho(a \otimes b) := \sum a_{(0)} \otimes b_{(0)} \otimes a_{(1)} b_{(1)},$$

где $\rho(a) = \sum a_{(0)} \otimes a_{(1)}$, $\rho \colon A \to A \otimes H$.

Структура (ко)модуля на тензорном произведении

Структура модуля на тензорном произведении модулей $A \otimes B$:

$$h(a \otimes b) := \sum h_{(1)} a \otimes h_{(2)} b$$

Здесь $\Delta \colon H \to H \otimes H$ — коумножение, $\Delta h = \sum h_{(1)} \otimes h_{(2)}$ — обозначения Свидлера.

Структура модуля на тензорном произведении модулей $A \otimes B$:

$$\rho(a \otimes b) := \sum a_{(0)} \otimes b_{(0)} \otimes a_{(1)} b_{(1)},$$

где $\rho(a) = \sum a_{(0)} \otimes a_{(1)}$, $\rho \colon A \to A \otimes H$.

Структура (ко)модуля на тензорном произведении

Структура модуля на тензорном произведении модулей $A \otimes B$:

$$h(a \otimes b) := \sum h_{(1)} a \otimes h_{(2)} b$$

Здесь $\Delta \colon H \to H \otimes H$ — коумножение, $\Delta h = \sum h_{(1)} \otimes h_{(2)}$ — обозначения Свидлера.

Структура модуля на тензорном произведении модулей $A \otimes B$:

$$\rho(a \otimes b) := \sum a_{(0)} \otimes b_{(0)} \otimes a_{(1)} b_{(1)},$$

где $\rho(a) = \sum a_{(0)} \otimes a_{(1)}$, $\rho \colon A \to A \otimes H$.

H-модульная алгебра

Умножение $A \otimes A \to A$ должно быть гомомоморфизмом H-модулей:

$$h(ab) = \sum (h_{(1)}a)(h_{(2)}b)$$

для всех $h \in H$, $a, b \in A$.

H-комодульная алгебра

Умножение $A \otimes A \to A$ должно быть гомомоморфизмом H-комодулей:

$$\rho(ab) = \sum a_{(0)} b_{(0)} \otimes a_{(1)} b_{(1)}$$

для всех $a, b \in A$.

Эквивалентность H-комодульных структур

Пусть A_i — H_i-комодульные алгебры, а $\rho_i \colon A_i \to A_i \otimes H_i$ — соответствующие отображения, $i = 1, 2$.
Тогда гомоморфизм алгебр $\varphi \colon A_1 \to A_2$ называется *эквивалентностью* кодействий ρ_1 и ρ_2, если

$$\tilde{\varphi}(\operatorname{cosupp} \rho_1) = \operatorname{cosupp} \rho_2$$

Эквивалентность H-комодульных структур

Пусть A_i — H_i-комодульные алгебры, а $\rho_i \colon A_i \to A_i \otimes H_i$ — соответствующие отображения, $i = 1, 2$.
Тогда гомоморфизм алгебр $\varphi \colon A_1 \to A_2$ называется *эквивалентностью* кодействий ρ_1 и ρ_2, если

$$\tilde{\varphi}(\operatorname{cosupp} \rho_1) = \operatorname{cosupp} \rho_2$$

Эквивалентность H-комодульных структур

Предложение

Пусть A_i — H_i-комодульные алгебры для алгебр Хопфа H_i над полем F, $i = 1, 2$. Тогда изоморфизм алгебр $\varphi\colon A_1 \mathrel{\widetilde{\to}} A_2$ является эквивалентностью комодульных структур $\rho_i\colon A_i \to A_i \otimes H_i$, $i = 1, 2$, если и только если существует изоморфизм коалгебр $\tau\colon \operatorname{supp}\rho_1 \mathrel{\widetilde{\to}} \operatorname{supp}\rho_2$, для которого диаграмма ниже коммутативна

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[d, "\varphi"] & A_1 \otimes \operatorname{supp}\rho_1 \arrow[d, "\varphi\otimes\tau"] \\
A_2 \arrow[r, "\rho_2"] & A_2 \otimes \operatorname{supp}\rho_2
\end{tikzcd}$$

Эквивалентность H-комодульных структур

Предложение

Пусть A_i — H_i-комодульные алгебры для алгебр Хопфа H_i над полем F, $i = 1, 2$. Тогда изоморфизм алгебр $\varphi\colon A_1 \xrightarrow{\sim} A_2$ является эквивалентностью комодульных структур $\rho_i\colon A_i \to A_i \otimes H_i$, $i = 1, 2$, если и только если существует изоморфизм коалгебр $\tau\colon \operatorname{supp}\rho_1 \xrightarrow{\sim} \operatorname{supp}\rho_2$, для которого диаграмма ниже коммутативна

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[d, "\varphi"] & A_1 \otimes \operatorname{supp}\rho_1 \arrow[d, "\varphi\otimes\tau"] \\
A_2 \arrow[r, "\rho_2"] & A_2 \otimes \operatorname{supp}\rho_2
\end{tikzcd}$$

Эквивалентность H-комодульных структур

Предложение

Пусть A_i — H_i-комодульные алгебры для алгебр Хопфа H_i над полем F, $i = 1, 2$. Тогда изоморфизм алгебр $\varphi\colon A_1 \mathrel{\widetilde{\to}} A_2$ является эквивалентностью комодульных структур $\rho_i\colon A_i \to A_i \otimes H_i$, $i = 1, 2$, если и только если существует изоморфизм коалгебр $\tau\colon \operatorname{supp} \rho_1 \mathrel{\widetilde{\to}} \operatorname{supp} \rho_2$, для которого диаграмма ниже коммутативна

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[d, "\varphi"] & A_1 \otimes \operatorname{supp} \rho_1 \arrow[d, "\varphi \otimes \tau"] \\
A_2 \arrow[r, "\rho_2"] & A_2 \otimes \operatorname{supp} \rho_2
\end{tikzcd}$$

Эквивалентность H-модульных структур

Пусть A_i — H_i-модульные алгебры, а $\psi_i \colon H_i \otimes A_i \to A_i$ — соответствующие отображения, $i = 1, 2$.
Тогда изоморфизм алгебр $\varphi \colon A_1 \to A_2$ называется *эквивалентностью* действий ψ_1 и ψ_2, если

$$\tilde{\varphi}(\operatorname{cosupp} \psi_1) = \operatorname{cosupp} \psi_2$$

Эквивалентность H-модульных структур

Пусть A_i — H_i-модульные алгебры, а $\psi_i \colon H_i \otimes A_i \to A_i$ — соответствующие отображения, $i = 1, 2$.
Тогда изоморфизм алгебр $\varphi \colon A_1 \to A_2$ называется *эквивалентностью* действий ψ_1 и ψ_2, если

$$\tilde{\varphi}(\operatorname{cosupp} \psi_1) = \operatorname{cosupp} \psi_2$$

Универсальные (ко)действующие биалгебры и алгебры Хопфа

- универсальная действующая биалгебра (М. Е. Свидлер, 1969);
- универсальная кодействующая алгебра Хопфа (Ю. И. Манин, 1988);
- универсальная кодействующая биалгебра (Д. Тамбара, 1990).

Универсальные (ко)действующие биалгебры и алгебры Хопфа

- универсальная действующая биалгебра (М. Е. Свидлер, 1969);
- универсальная кодействующая алгебра Хопфа (Ю. И. Манин, 1988);
- универсальная кодействующая биалгебра (Д. Тамбара, 1990).

Универсальные (ко)действующие биалгебры и алгебры Хопфа

- универсальная действующая биалгебра (М. Е. Свидлер, 1969);
- универсальная кодействующая алгебра Хопфа (Ю. И. Манин, 1988);
- универсальная кодействующая биалгебра (Д. Тамбара, 1990).

V-универсальная кодействующая алгебра Хопфа

Пусть $\operatorname{cosupp}\psi \subseteq V$, где V — некоторая фиксированная подалгебра с 1 алгебры $\operatorname{End}_F(A)$.

$$\begin{tikzcd}
H \otimes A \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, dashed, "\varphi\otimes\mathrm{id}_A"'] & A \\
{}_{\square}\mathcal{H}(A, V) \otimes A \arrow[ur, "\psi^{\mathrm{Hopf}}_{A,V}"'] &
\end{tikzcd}$$

Алгебра Хопфа ${}_{\square}\mathcal{H}(A, V)$ называется *V-универсальной действующей алгеброй Хопфа*. Она всегда существует.

V-универсальная кодействующая алгебра Хопфа

Пусть $\operatorname{cosupp}\rho \subseteq V$, где V — некоторая фиксированная подалгебра с 1 алгебры $\operatorname{End}_F(A)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho^{\mathrm{Hopf}}_{A,V}"] \arrow[dr, "\rho"'] & A \otimes \mathcal{H}^{\square}(A, V) \arrow[d, dashed, "\mathrm{id}_A \otimes \varphi"] \\ & A \otimes H \end{tikzcd}$$

Алгебра Хопфа $\mathcal{H}^{\square}(A, V)$ называется *V-универсальной кодействующей алгеброй Хопфа*.

Доказывается, что если V *поточечно конечномерно* и *замкнуто в конечной топологии*, то $\mathcal{H}^{\square}(A, V)$ существует.

V-универсальная кодействующая алгебра Хопфа

Пусть $\operatorname{cosupp} \rho \subseteq V$, где V — некоторая фиксированная подалгебра с 1 алгебры $\operatorname{End}_F(A)$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\rho^{\mathrm{Hopf}}_{A,V}"] \arrow[dr, "\rho"'] & A \otimes \mathcal{H}^{\square}(A, V) \arrow[d, dashed, "\mathrm{id}_A \otimes \varphi"] \\
& A \otimes H
\end{tikzcd}$$

Алгебра Хопфа $\mathcal{H}^{\square}(A, V)$ называется *V-универсальной кодействующей алгеброй Хопфа*.

Доказывается, что если V *поточечно конечномерно* и *замкнуто в конечной топологии*, то $\mathcal{H}^{\square}(A, V)$ существует.

Двойственность

Единственный такой гомоморфизм $\theta^{\mathrm{Hopf}} \colon \mathcal{H}^{\square}(A, V)^{\circ} \to {}_{\square}\mathcal{H}(A, V)$ алгебр Хопфа, что диаграмма ниже коммутативна, является изоморфизмом:

$$\begin{tikzcd}
{}_{\square}\mathcal{H}(A, V) \otimes A \arrow[dr, "\psi^{\mathrm{Hopf}}_{A,V}"] & \\
& B \\
\mathcal{H}^{\square}(A, V)^{\circ} \otimes A \arrow[uu, dashed, "\theta^{\mathrm{Hopf}} \otimes \mathrm{id}_A"] \arrow[ur, "\widetilde{\rho}^{\mathrm{Hopf}}_{A,V}"'] &
\end{tikzcd}$$

Ω-алгебры

- Ω — множество линейных отображений $\omega\colon A^{\otimes s(\omega)} \to A^{\otimes t(\omega)}$, где $s(\omega)$ — арность, а $t(\omega)$ — коарность ω.
- Мы говорим, что A — H-(ко)модульная Ω-алгебра, если все ω являются гомоморфизмами H-(ко)модулей.

Ω-алгебры

- Ω — множество линейных отображений $\omega\colon A^{\otimes s(\omega)} \to A^{\otimes t(\omega)}$, где $s(\omega)$ — арность, а $t(\omega)$ — коарность ω.
- Мы говорим, что A — H-(ко)модульная Ω-алгебра, если все ω являются гомоморфизмами H-(ко)модулей.

Заплетённые моноидальные категории

Задан бифунктор $\otimes \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ и его естественное преобразование («заплетание», англ. braiding) $c_{V,W} \colon V \otimes W \to W \otimes V$, для которых выполняются определённые аксиомы согласованности.

Основная категория

Пусть $\mathcal{C}$ — заплетённая моноидальная категория, для которой выполняются определённые свойства:

- существуют малые пределы;
- функторы $(-) \otimes \mathrm{id}_M$ и $\mathrm{id}_M \otimes (-)$ сохраняют моно- и эпиморфизмы и некоторые пределы;
- существуют разложения произвольного морфизма в произведение моно- и эпиморфизма;
- ...

Основная категория

Пусть $\mathcal{C}$ — заплетённая моноидальная категория, для которой выполняются определённые свойства:

- существуют малые пределы;
- функторы $(-) \otimes \mathrm{id}_M$ и $\mathrm{id}_M \otimes (-)$ сохраняют моно- и эпиморфизмы и некоторые пределы;
- существуют разложения произвольного морфизма в произведение моно- и эпиморфизма;
- ...

Основная категория

Пусть $\mathcal{C}$ — заплетённая моноидальная категория, для которой выполняются определённые свойства:

- существуют малые пределы;
- функторы $(-) \otimes \mathrm{id}_M$ и $\mathrm{id}_M \otimes (-)$ сохраняют моно- и эпиморфизмы и некоторые пределы;
- существуют разложения произвольного морфизма в произведение моно- и эпиморфизма;
- ...

Основная категория

Пусть $\mathcal{C}$ — заплетённая моноидальная категория, для которой выполняются определённые свойства:

- существуют малые пределы;
- функторы $(-) \otimes \mathrm{id}_M$ и $\mathrm{id}_M \otimes (-)$ сохраняют моно- и эпиморфизмы и некоторые пределы;
- существуют разложения произвольного морфизма в произведение моно- и эпиморфизма;
- ...

Примеры категорий $\mathcal{C}$

- Vect_F;
- Sets;
- $\mathrm{Vect}_F^{\mathrm{op}}$;
- $\mathrm{Sets}^{\mathrm{op}}$;
- H-Mod для кокоммутататитвных алгебр Хопфа H;
- Comod-H для коммутативных алгебр Хопфа H;
- ${}^H_H\mathcal{YD}$ для алгебр Хопфа H с обратимым антиподом;
- ...

Примеры категорий $\mathcal{C}$

- Vect_F;
- Sets;
- $\mathrm{Vect}_F^{\mathrm{op}}$;
- $\mathrm{Sets}^{\mathrm{op}}$;
- H-Mod для кокоммутатативных алгебр Хопфа H;
- Comod-H для коммутативных алгебр Хопфа H;
- ${}^H_H\mathcal{YD}$ для алгебр Хопфа H с обратимым антиподом;
- ...

Примеры категорий $\mathcal{C}$

- Vect_F;
- Sets;
- $\mathrm{Vect}_F^{\mathrm{op}}$;
- $\mathrm{Sets}^{\mathrm{op}}$;
- H-Mod для кокоммутататативных алгебр Хопфа H;
- Comod-H для коммутативных алгебр Хопфа H;
- ${}^H_H\mathcal{YD}$ для алгебр Хопфа H с обратимым антиподом;
- ...

Примеры категорий $\mathcal{C}$

- Vect_F;
- Sets;
- $\mathrm{Vect}_F^{\mathrm{op}}$;
- $\mathrm{Sets}^{\mathrm{op}}$;
- H-Mod для кокоммутатативных алгебр Хопфа H;
- Comod-H для коммутативных алгебр Хопфа H;
- ${}^H_H\mathcal{YD}$ для алгебр Хопфа H с обратимым антиподом;
- ...

Примеры категорий $\mathcal{C}$

- Vect_F;
- Sets;
- $\mathrm{Vect}_F^{\mathrm{op}}$;
- $\mathrm{Sets}^{\mathrm{op}}$;
- H-Mod для кокоммутатативных алгебр Хопфа H;
- Comod-H для коммутативных алгебр Хопфа H;
- ${}^H_H\mathcal{YD}$ для алгебр Хопфа H с обратимым антиподом;
- ...

Примеры категорий $\mathcal{C}$

- Vect_F;
- Sets;
- $\mathsf{Vect}_F^{\mathrm{op}}$;
- $\mathsf{Sets}^{\mathrm{op}}$;
- H-Mod для кокоммутатативных алгебр Хопфа H;
- Comod-H для коммутативных алгебр Хопфа H;
- ${}^H_H\mathcal{YD}$ для алгебр Хопфа H с обратимым антиподом;
- ...

Примеры категорий $\mathcal{C}$

- Vect_F;
- Sets;
- $\mathrm{Vect}_F^{\mathrm{op}}$;
- $\mathrm{Sets}^{\mathrm{op}}$;
- H-Mod для кокоммутатативных алгебр Хопфа H;
- Comod-H для коммутативных алгебр Хопфа H;
- ${}^H_H\mathcal{YD}$ для алгебр Хопфа H с обратимым антиподом;
- ...

Примеры категорий $\mathcal{C}$

- Vect_F;
- Sets;
- $\mathsf{Vect}_F^{\mathrm{op}}$;
- $\mathsf{Sets}^{\mathrm{op}}$;
- H-Mod для кокоммутатативных алгебр Хопфа H;
- Comod-H для коммутативных алгебр Хопфа H;
- ${}^H_H\mathcal{YD}$ для алгебр Хопфа H с обратимым антиподом;
- ...

Носитель

Пусть $\rho\colon A \to B \otimes Q$ — морфизм для некоторых объектов A, B, Q из $\mathcal{C}$. Рассмотрим категорию $\mathcal{Q}(\rho)$, где:

- объекты - это такие пары (ρ_1, i_1), где $\rho_1\colon A \to B \otimes Q_1$ — морфизм, а $i_1\colon Q_1 \rightarrowtail Q$ — мономорфизм, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[dr, "\rho"'] & B \otimes Q_1 \arrow[d, "\mathrm{id}_B \otimes i_1"] \\ & B \otimes Q \end{tikzcd}$$

Носитель

Пусть $\rho\colon A \to B \otimes Q$ — морфизм для некоторых объектов A, B, Q из $\mathcal{C}$. Рассмотрим категорию $\mathcal{Q}(\rho)$, где:

- объекты - это такие пары (ρ_1, i_1), где $\rho_1\colon A \to B \otimes Q_1$ — морфизм, а $i_1\colon Q_1 \rightarrowtail Q$ — мономорфизм, что диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[dr, "\rho"'] & B \otimes Q_1 \arrow[d, "\mathrm{id}_B \otimes i_1"] \\ & B \otimes Q \end{tikzcd}$$

Носитель

- морфизмами между

$$\rho_1 \colon A \to B \otimes Q_1, \quad i_1 \colon Q_1 \rightarrowtail Q$$

и

$$\rho_2 \colon A \to B \otimes Q_2, \quad i_2 \colon Q_2 \rightarrowtail Q$$

являются такие морфизмы $\tau \colon Q_1 \to Q_2$, что диаграммы ниже коммутативны:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[dr, "\rho_2"'] & B \otimes Q_1 \arrow[d, "\mathrm{id}_B \otimes \tau"] \\ & B \otimes Q_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Q_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\tau"'] & Q \\ Q_2 \arrow[ur, "i_2"'] & \end{tikzcd}$$

Носитель

Рассмотрим функтор $T\colon \mathcal{Q}(\rho) \to \mathcal{C}$, который отображает пару $(A \to B \otimes Q_1,\ Q_1 \rightarrowtail Q)$ в Q_1. Определим теперь *носитель* $\operatorname{supp}\rho$ морфизма ρ как $\operatorname{supp}\rho := \lim T$.

Переходя к пределу, получаем соответствующий морфизм $\rho_0\colon A \to B \otimes \operatorname{supp}\rho$:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\rho_0"] \arrow[dr] & B \otimes \operatorname{supp}\rho \arrow[d] \\
& B \otimes Q
\end{tikzcd}$$

Носитель

Рассмотрим функтор $T\colon \mathcal{Q}(\rho) \to \mathcal{C}$, который отображает пару $(A \to B \otimes Q_1,\ Q_1 \rightarrowtail Q)$ в Q_1. Определим теперь *носитель* $\operatorname{supp} \rho$ морфизма ρ как $\operatorname{supp} \rho := \lim T$.

Переходя к пределу, получаем соответствующий морфизм $\rho_0\colon A \to B \otimes \operatorname{supp} \rho$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho_0"] \arrow[dr] & B \otimes \operatorname{supp} \rho \arrow[d] \\ & B \otimes Q \end{tikzcd}$$

Отношение «тоньше/грубее» и эквивалентность

Будем говорить, что $\rho_1 \colon A \to B \otimes Q_1$ *тоньше*, чем $\rho_2 \colon A \to B \otimes Q_2$, а ρ_2 — *грубее*, чем ρ_1, если существует такой морфизм $\tau \colon \operatorname{supp}\rho_1 \to \operatorname{supp}\rho_2$, что $\rho_{20} = (\mathrm{id}_B \otimes \tau)\rho_{10}$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho_{10}"] \arrow[dr, "\rho_{20}"'] & B \otimes \operatorname{supp}\rho_1 \arrow[d, "\mathrm{id}_B \otimes \tau"] \\ & B \otimes \operatorname{supp}\rho_2 \end{tikzcd}$$

Обозначение: $\rho_1 \succcurlyeq \rho_2$.

Если $\rho_1 \succcurlyeq \rho_2$ и $\rho_1 \preccurlyeq \rho_2$, будем говорить, что ρ_1 и ρ_2 *эквивалентны*.

Отношение «тоньше/грубее» и эквивалентность

Будем говорить, что $\rho_1 \colon A \to B \otimes Q_1$ *тоньше*, чем $\rho_2 \colon A \to B \otimes Q_2$, а ρ_2 — *грубее*, чем ρ_1, если существует такой морфизм $\tau \colon \operatorname{supp}\rho_1 \to \operatorname{supp}\rho_2$, что $\rho_{20} = (\mathrm{id}_B \otimes \tau)\rho_{10}$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho_{10}"] \arrow[dr, "\rho_{20}"'] & B \otimes \operatorname{supp}\rho_1 \arrow[d, "\mathrm{id}_B \otimes \tau"] \\ & B \otimes \operatorname{supp}\rho_2 \end{tikzcd}$$

Обозначение: $\rho_1 \succcurlyeq \rho_2$.

Если $\rho_1 \succcurlyeq \rho_2$ и $\rho_1 \preccurlyeq \rho_2$, будем говорить, что ρ_1 и ρ_2 *эквивалентны*.

Отношение «тоньше/грубее» и эквивалентность

Будем говорить, что $\rho_1 \colon A \to B \otimes Q_1$ *тоньше*, чем $\rho_2 \colon A \to B \otimes Q_2$, а ρ_2 — *грубее*, чем ρ_1, если существует такой морфизм $\tau \colon \operatorname{supp} \rho_1 \to \operatorname{supp} \rho_2$, что $\rho_{20} = (\mathrm{id}_B \otimes \tau)\rho_{10}$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho_{10}"] \arrow[dr, "\rho_{20}"'] & B \otimes \operatorname{supp} \rho_1 \arrow[d, "\mathrm{id}_B \otimes \tau"] \\ & B \otimes \operatorname{supp} \rho_2 \end{tikzcd}$$

Обозначение: $\rho_1 \succcurlyeq \rho_2$.

Если $\rho_1 \succcurlyeq \rho_2$ и $\rho_1 \preccurlyeq \rho_2$, будем говорить, что ρ_1 и ρ_2 *эквивалентны*.

Тензорные эпиморфизмы

Будем говорить, что морфизм $\rho_1 \colon A \to B \otimes Q_1$ является *тензорным эпиморфизмом*, если для любых таких $f, g \colon Q_1 \to R$, что

$$(\mathrm{id}_B \otimes f)\rho_1 = (\mathrm{id}_B \otimes g)\rho_1,$$

выполнено $f = g$.

Предложение

Для всех $\rho \colon A \to B \otimes Q$ морфизм $\rho_0 \colon A \to B \otimes \operatorname{supp} \rho$ является тензорным эпиморфизмом.

Тензорные эпиморфизмы

Будем говорить, что морфизм $\rho_1\colon A \to B \otimes Q_1$ является *тензорным эпиморфизмом*, если для любых таких $f, g\colon Q_1 \to R$, что

$$(\mathrm{id}_B \otimes f)\rho_1 = (\mathrm{id}_B \otimes g)\rho_1,$$

выполнено $f = g$.

Предложение

Для всех $\rho\colon A \to B \otimes Q$ морфизм $\rho_0\colon A \to B \otimes \operatorname{supp} \rho$ является тензорным эпиморфизмом.

Универсальный кодействующий бимоноид

Рассмотрим Ω-моноид A в $\mathcal{C}$.

Пусть U — комоноид, а тензорный эпиморфизм $\rho_U : A \to A \otimes U$ задаёт на A структуру U-комодуля.

Универсальный кодействующий бимоноид

Рассмотрим Ω-моноид A в $\mathcal{C}$.

Пусть U — комоноид, а тензорный эпиморфизм $\rho_U \colon A \to A \otimes U$ задаёт на A структуру U-комодуля.

Универсальный кодействующий бимоноид

Рассмотрим категорию Coactions(ρ_U), объектами которой являются такие кодействия $\rho\colon A \to A \otimes B$ произвольных бимоноидов B, что $\rho \preccurlyeq \rho_U$, а морфизмами из $\rho_1\colon A \to A \otimes B_1$ в $\rho_2\colon A \to A \otimes B_2$ являются все гомоморфизмы бимоноидов $\varphi\colon B_1 \to B_2$, для которых диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[dr, "\rho_2"'] & A \otimes B_1 \arrow[d, "\mathrm{id}_A \otimes \varphi"] \\ & A \otimes B_2 \end{tikzcd}$$

Бимоноид, отвечающий начальному объекту категории Coactions(ρ_U), называется *U-универсальным кодействующим бимоноидом* на A.

Доказывается, что U-универсальный кодействующий бимоноид действительно существует.

Универсальный кодействующий бимоноид

Рассмотрим категорию $\mathrm{Coactions}(\rho_U)$, объектами которой являются такие кодействия $\rho\colon A \to A \otimes B$ произвольных бимоноидов B, что $\rho \preccurlyeq \rho_U$, а морфизмами из $\rho_1\colon A \to A \otimes B_1$ в $\rho_2\colon A \to A \otimes B_2$ являются все гомоморфизмы бимоноидов $\varphi\colon B_1 \to B_2$, для которых диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[dr, "\rho_2"'] & A \otimes B_1 \arrow[d, "\mathrm{id}_A \otimes \varphi"] \\ & A \otimes B_2 \end{tikzcd}$$

Бимоноид, отвечающий начальному объекту категории $\mathrm{Coactions}(\rho_U)$, называется *$U$-универсальным кодействующим бимоноидом* на A.

Доказывается, что U-универсальный кодействующий бимоноид действительно существует.

Универсальный кодействующий бимоноид

Рассмотрим категорию $\mathrm{Coactions}(\rho_U)$, объектами которой являются такие кодействия $\rho\colon A \to A \otimes B$ произвольных бимоноидов B, что $\rho \preccurlyeq \rho_U$, а морфизмами из $\rho_1\colon A \to A \otimes B_1$ в $\rho_2\colon A \to A \otimes B_2$ являются все гомоморфизмы бимоноидов $\varphi\colon B_1 \to B_2$, для которых диаграмма ниже коммутативна:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[dr, "\rho_2"'] & A \otimes B_1 \arrow[d, "\mathrm{id}_A \otimes \varphi"] \\ & A \otimes B_2 \end{tikzcd}$$

Бимоноид, отвечающий начальному объекту категории $\mathrm{Coactions}(\rho_U)$, называется *$U$-универсальным кодействующим бимоноидом* на A.

Доказывается, что U-универсальный кодействующий бимоноид действительно существует.