Алгебры Роты — Бакстера и двойные алгебры Ли

Гончаров М.Е., Губарев В.Ю.
Институт математики СО РАН, НГУ

Вторая конференция Математических центров России

МГУ, МИАН, 7.11.2022

План

- **1. Двойные алгебры Ли**
- **2. Наивная версия λ-двойной алгебры Ли**
- **3. Правильная версия λ-двойной алгебры Ли**
- **4. Модифицированные двойные алгебры Пуассона**

Двойные алгебры Пуассона

A: конечнопорождённая ассоциативная алгебра над полем F
$\mathrm{Rep}_n(A) = \mathrm{Hom}(A, M_n(F))$
$\mathcal{O}(\mathrm{Rep}_n(A))$ порождена функциями a_{ij}, $a \in A$: $\rho(a)_{ij} = a_{ij}(\rho)$

Двойная скобка Пуассона на A — это билинейное отображение

$$\{\!\{\cdot,\cdot\}\!\}\colon A \otimes A \to A \otimes A,$$

$+$ аналоги антикоммутативности, Якоби и правила Лейбница

Двойная скобка Пуассона $\{\!\{a, b\}\!\} = \sum c_{(1)} \otimes c_{(2)} \in A \otimes A$
индуцирует скобку Пуассона на $\mathcal{O}(\mathrm{Rep}_n(A))$:

$$\{a_{ij}, b_{kl}\} = \sum {c_{(1)}}_{il} {c_{(2)}}_{kj}$$

[Ван ден Берг, 2004]

Определения двойных алгебр

Для $u \in V^{\otimes n}$, $\sigma \in S_n$ тензор u^σ обозначает перестановку множителей

Определение 1 [Ван ден Берг, 2004]

Ассоциативная алгебра A — **двойная алгебра Пуассона** относительно двойной скобки $\{\!\{\cdot,\cdot\}\!\}\colon A\otimes A \to A\otimes A$, если

$$\{\!\{a,b\}\!\} = -\{\!\{b,a\}\!\}^{(12)} \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\{\!\{\{\!\{a,\{\!\{b,c\}\!\}_{(1)}\}\!\},\{\!\{b,c\}\!\}_{(2)}\}\!\} - \{\!\{\{\!\{a,c\}\!\}_{(1)}\otimes\{\!\{b,\{\!\{a,c\}\!\}_{(2)}\}\!\} \\ = (\{\!\{\{\!\{a,b\}\!\}_{(1)},c\}\!\}\otimes\{\!\{a,b\}\!\}_{(2)})^{(23)}\end{gathered} \tag{2}$$

$$\{\!\{a,bc\}\!\} = \{\!\{a,b\}\!\}(1\otimes c) + (b\otimes 1)\{\!\{a,c\}\!\} \tag{3}$$

Двойная алгебра Пуассона есть алгебра пре-Калаби — Яу

Определение 2 [Шедлер, 2009 и др.]

Векторное пространство V — **двойная алгебра Ли** относительно двойной скобки $\{\!\{\cdot,\cdot\}\!\}\colon V\otimes V\to V\otimes V$, если выполнены тождества (1) и (2)

$(V,\{\!\{,\}\!\})$ — двойная а. Ли $\Rightarrow$ $(\mathrm{As}(V),\{\!\{,\}\!\})$ — двойная а. Пуассона

Примеры двойных алгебр Ли

Пример 1 [Ван ден Берг, 2004]

$V = F[t]$ есть двойная алгебра Ли L_1 относительно

$$\{\{t^n, t^m\}\} = \frac{(t^n \otimes 1 - 1 \otimes t^n)(t^m \otimes 1 - 1 \otimes t^m)}{t \otimes 1 - 1 \otimes t}$$

Пример 2 [Кац и др., 2015]

$dY(N) = F[t] \otimes M_N(F)$ есть двойная алгебра Ли относительно

$$\{\{T^{ij}_m, T^{kl}_n\}\} = \sum_{r=0}^{\min\{m,n\}-1} \left(T^{kj}_r \otimes T^{il}_{m+n-r-1} - T^{kj}_{m+n-r-1} \otimes T^{il}_r\right)$$

где $T^{ij}_n = t^n \otimes e_{ij}$

Умножение в $dY(N)$ воспроизводит определяющие соотношения в янгиане $Y(gl_N)$:

$$[T^{ij}_m, T^{kl}_n] = \sum_{r=0}^{\min\{m,n\}-1} \left(T^{kj}_r T^{il}_{m+n-r-1} - T^{kj}_{m+n-r-1} T^{il}_r\right)$$

Операторы Роты — Бакстера

Пусть $\dim(V) < \infty$
[Гончаров, Колесников, 2018]: двойная скобка $\{\!\{\cdot,\cdot\}\!\}$ на V задаётся линейным оператором $R\colon \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ так, что

$$\{\!\{a, b\}\!\} = \sum_{i=1}^{N} e_i(a) \otimes R(e_i^*)(b), \quad a, b \in V \tag{4}$$

где $e_1, \ldots, e_N$ — базис $\mathrm{End}(V)$, $e_1^*, \ldots, e_N^*$ — двойственный базис

Определение 3 ([Трикоми, 1951; Бакстер, 1960])

Пусть A — алгебра над полем F, R — линейный оператор на A
R называется **оператором Роты — Бакстера**, если для всех $x, y \in A$ выполняется

$$R(x)R(y) = R\big(R(x)y + xR(y) + \lambda xy\big)$$

где $\lambda \in F$ — фиксированный скаляр из основного поля F (**вес** R)

Связи: уравнение Янга — Бакстера, пре- и посталгебры, брейсы, симметрические многочлены, числа Бернулли, shuffle algebra ...

Конечномерный случай

Теорема 1 [Гончаров, Колесников, 2018]

Пусть V — конечномерное пространство с двойной скобкой $\{\!\{\cdot,\cdot\}\!\}$, заданной при помощи оператора $R\colon \mathrm{End}(V) \to \mathrm{End}(V)$ (4)
V — двойная алгебра Ли $\Leftrightarrow$ R — кососимметричный оператор Роты — Бакстера веса 0 на $\mathrm{End}(V)$

Пример 3

Пространство $Fe_1 \oplus Fe_2$ — это двойная алгебра Ли относительно скобки

$$\{\!\{e_1, e_1\}\!\} = e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$$

Соответствующий оператор Роты — Бакстера на $M_2(F)$ есть $R(e_{11}) = e_{21}$ и $R(e_{12}) = -e_{11}$

Простые двойные алгебры Ли

$I \subseteq V$ — идеал двойной алгебры Ли V, если

$$\{\{V, I\}\} + \{\{I, V\}\} \subseteq I \otimes V + V \otimes I$$

V проста, если в V нет ненулевых собственных идеалов, $\{\{V, V\}\} \neq (0)$

Теорема 2 [Гончаров, Колесников, 2018]

Простых конечномерных двойных алгебр Ли не существует

Вопрос 1

Существуют ли простые двойные алгебры Ли?

Вопрос 2

Что произойдёт, если в (4) подставить РБ-оператор ненулевого веса?

Бесконечномерный случай

Пусть V — счётномерное пространство с двойной скобкой $\{\!\{\cdot,\cdot\}\!\}$
Элементы $\mathrm{End}(V)$ — это матрицы $A = (a_{ij})_{i,j\geq 0}$ такие, что в каждом столбце стоит лишь конечное число $\neq 0$ элементов

Введём подалгебру $\mathrm{End}_f(V) \subset \mathrm{End}(V)$, состоящую из матриц, у которых в каждой строке лишь конечное число $\neq 0$ элементов

I: идеал в $\mathrm{End}_f(V)$, порождённый матричными единичками e_{ij}
Определим форму $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на $I \times \mathrm{End}_f(V) \cap \mathrm{End}_f(V) \times I$ как

$$\langle e_{kl}, \varphi\rangle = \langle \varphi, e_{kl}\rangle = \mathrm{tr}(e_{kl}\varphi)$$

Зададим линейное отображение $R\colon I \to \mathrm{End}(V)$ по формуле

$$\{\!\{a,b\}\!\} = \sum_{i,j} e_{ij}(a) \otimes R(e_{ji})(b), \quad a,b\in V \tag{5}$$

Бесконечномерный случай-2

A: алгебра, J — идеал в A
Линейное отображение $R\colon J \to A$ называется оператором Роты — Бакстера веса $\lambda \in F$ из J в A, если

$$R(a)R(b) = R(R(a)b + aR(b) + \lambda ab), \quad a, b \in J$$

Теорема 3 (В.Г., 2021)

Пусть V — счётномерное пространство с двойной скобкой $\{\!\{\cdot,\cdot\}\!\}$, заданной при помощи отображения $R\colon I \to \mathrm{End}_f(V)$ по (5). Тогда V — двойная алгебра Ли $\iff$ R — кососимметричный оператор Роты — Бакстера веса 0 из I в $\mathrm{End}_f(V)$

Примеры

Пример 1 [Ван ден Берг, 2004]

$V = F[t]$ есть двойная алгебра Ли L_1 относительно

$$\{\{t^n, t^m\}\} = \frac{(t^n \otimes 1 - 1 \otimes t^n)(t^m \otimes 1 - 1 \otimes t^m)}{t \otimes 1 - 1 \otimes t}$$

Ей соответствует оператор

$$R_1(e_{ij}) = \begin{cases} -(e_{i,j+1} + e_{i+1,j+2} + \ldots), & i > j \\ e_{0,j-i+1} + e_{1,j-i+2} + \ldots + e_{i-1,j}, & i \leq j \end{cases} \tag{6}$$

Пример 2 [Кац и др., 2015]

$dY(N) = F[t] \otimes M_N(F)$ есть двойная алгебра Ли относительно

$$\{\{T_m^{ij}, T_n^{kl}\}\} = \sum_{r=0}^{\min\{m,n\}-1} \left(T_r^{kj} \otimes T_{m+n-r-1}^{il} - T_{m+n-r-1}^{kj} \otimes T_r^{il}\right)$$

Ей соответствует оператор $R = (-R_1) \otimes \mathrm{id}$

Примеры-2

Пример 4 (В.Г., 2021)

$V = F[t]$ есть двойная алгебра Ли L_2 относительно

$$\{\!\{t^n, t^m\}\!\} = -\frac{(t^n \otimes t^m - t^m \otimes t^n)}{t \otimes 1 - 1 \otimes t}$$

Ей соответствует оператор

$$R_2(e_{ij}) = \begin{cases} -(e_{i-1,j} + e_{i-2,j-1} + \ldots + e_{i-1-j,0}), & i > j \\ e_{i,j+1} + e_{i+1,j+2} + \ldots, & i \leq j \end{cases} \tag{7}$$

Теорема 4 (В.Г., 2021)

Двойная алгебра Ли L_2 проста

Наивная версия λ-двойной алгебры Ли

Применяем формулу

$$\{\{a, b\}\} = \sum_{i=1}^{N} e_i(a) \otimes R(e_i^*)(b), \quad a, b \in V$$

и предполагаем, что выполнено тождество Якоби (2). Тогда

$$R((R + R^* + \lambda\,\mathrm{id})(y)x) = 0, \quad x, y \in \mathrm{End}(V)$$

Получаем аналог антикоммутативности $R + R^* + \lambda\,\mathrm{id} = 0$ который в терминах двойной скобки даёт

$$\{\{a, b\}\} + \{\{b, a\}\}^{(12)} = -\lambda b \otimes a \tag{8}$$

λ-двойная алгебра Ли: $\{\{,\}\}$ удовлетворяет (2) и (8)

РБ-аналог дубля Дринфельда

$\mathcal{M}$: многообразие алгебр, $A \in \mathcal{M}$, R: оператор на A, $\lambda \in F$
Рассмотрим пространство $D_R(A) = A \oplus \bar{A}$, где $\bar{A}$ — копия A, относительно умножения

$$(a + \bar{b}) * (x + \bar{y})$$
$$= ax + R(ay) - aR(y) + R(bx) - R(b)x + \overline{ay + bx - R(b)y - bR(y) - \lambda by}$$

Предложение 1 (Гончаров, В.Г., 2022)

Пусть R — РБ-оператор веса λ на A, тогда $D_R(A) \in \mathcal{M}$

[Uchino, 2008]: схожая формула для $D_R(A)$ в случае $\mathcal{M} = \mathrm{As}$ и $\lambda = 0$

Отрицательный результат

Пусть ω — невырожденная симметрическая инвариантная билинейная форма на A. Зададим форму Q на $D_R(A)$ так:

$$Q(a+\bar{b}, c+\bar{d}) = \omega(a,d) + \omega(b,c)$$

Q также является невырожденной симметрической формой на $D_R(A)$

Предложение 2

Q инвариантна $(Q(ab,c) = Q(a,bc)) \iff R(ab) + R^*(ab) + \lambda ab = 0$ для всех $a, b \in A$

Теорема 5 (Гончаров, В.Г., 2022)

Пусть $A = M_n(F)$ и $\omega(x,y) = \mathrm{tr}(xy)$. Не существует РБ-операторов ненулевого веса λ на A, удовлетворяющих условию $R + R^* + \lambda\,\mathrm{id} = 0$

Правильное определение

Пусть A — алгебра с формой ω, определим $\mathrm{tr}(a) := \omega(a, 1)$

Определение 4 (Огиевецкий, Попов, 2010; Ч. Бай и др., 2020)

Линейный оператор R на квадратичной алгебре (A, ω) называется λ-кососимметрическим, если

$$R(a) + R^*(a) + \lambda a = \lambda \mathrm{tr}(a) 1$$

для всех $a \in A$

Определение 5 (Гончаров, В.Г., 2022)

Векторное пространство V — λ-**двойная алгебра Ли** относительно двойной скобки $\{\!\{\cdot,\cdot\}\!\}\colon V \otimes V \to V \otimes V$, если

$$\{\!\{a, b\}\!\} + \{\!\{b, a\}\!\}^{(12)} = \lambda(a \otimes b - b \otimes a), \tag{9}$$

$$\begin{aligned} \{\!\{\{\!\{a, \{\!\{b, c\}\!\}_{(1)}\}\!\}, \{\!\{b, c\}\!\}_{(2)}\}\!\} - \{\!\{\{\!\{a, c\}\!\}_{(1)} \otimes \{\!\{b, \{\!\{a, c\}\!\}_{(2)}\}\!\} \\ -(\{\!\{\{\!\{a, b\}\!\}_{(1)}, c\}\!\} \otimes \{\!\{a, b\}\!\}_{(2)})^{(23)} = -\lambda(b \otimes \{\!\{a, c\}\!\})^{(12)} \end{aligned} \tag{10}$$

для всех $a, b, c \in V$

Теорема 6

Пусть V — конечномерное пространство с двойной скобкой $\{\!\{\cdot,\cdot\}\!\}$, заданной при помощи оператора $R\colon \mathrm{End}(V)\to\mathrm{End}(V)$ (4)
V — λ-двойная алгебра Ли $\iff R$ — λ-кососимметрический оператор Роты — Бакстера веса λ на $\mathrm{End}(V)$

Пример 5

Линейный оператор P на $M_n(F)$, заданный как

$$P(e_{ij}) = \begin{cases} -e_{ij}, & i<j \\ 0, & i>j \\ \sum\limits_{k\geq 1} e_{i+k,\,i+k}, & i=j \end{cases}$$

является 1-кососимметрическим РБ-оператором веса 1 на $M_n(F)$
Тогда для $V=\mathrm{Span}\{f_1,\dots,f_n\}$

$$\{\!\{f_k,f_l\}\!\} = \begin{cases} f_k\otimes f_l - f_l\otimes f_k, & k<l \\ 0, & k\geq l \end{cases}$$

Примеры λ-двойных алгебр Ли (прод.)

Пример 6

Линейный оператор P на $M_n(F)$, заданный как

$$P_1(e_{ij}) = \begin{cases} \sum\limits_{k\geq 1} e_{i+k,j+k}, & i \geq j \\ -\sum\limits_{k\geq 0} e_{i-k,j-k}, & i < j \end{cases}$$

является 1-кососимметрическим РБ-оператором веса 1 на $M_n(F)$
Тогда для $V = \mathrm{Span}\{f_1, \ldots, f_n\}$

$$\{\!\{f_k, f_l\}\!\} = \begin{cases} -(f_l \otimes f_k + f_{l+1} \otimes f_{k-1} + \ldots + f_{k-1} \otimes f_{l+1}), & l < k \\ f_k \otimes f_l + f_{k+1} \otimes f_{l-1} + \ldots + f_{l-1} \otimes f_{k+1}, & l \geq k \end{cases}$$

Распространяя на $V = F[t]$, получаем λ-двойную алгебру Ли M_1:

$$\{\!\{t^n, t^m\}\!\} = -\frac{(t^n \otimes t^{m+1} - t^m \otimes t^{n+1})}{t \otimes 1 - 1 \otimes t}$$

Предложение 3

1-Двойная алгебра Ли M_1 содержит ровно один собственный ненулевой идеал, это $I = tF[t]$. Более того, M_1 и I изоморфны

Пример Артамонова

Пример 7 [Артамонов, 2017]

Пространство $V = \mathrm{Span}\{a_1, a_2, a_3\}$ является (-1)-двойной алгеброй Ли M_{art} относительно скобки

$$\begin{gathered}\{\{a_1, a_2\}\} = -a_1 \otimes a_2, \quad \{\{a_2, a_1\}\} = a_1 \otimes a_2, \quad \{\{a_2, a_3\}\} = a_3 \otimes a_2 \\ \{\{a_3, a_1\}\} = a_1 \otimes a_3 - a_3 \otimes a_1, \quad \{\{a_3, a_2\}\} = -a_3 \otimes a_2\end{gathered} \tag{11}$$

Предложение 4

Пусть A — квадратичная алгебра
R — λ-кососимметрический РБ-оператор веса λ на A
Тогда R^* — λ-кососимметрический РБ-оператор веса λ на A

Простых конечномерных двойных алгебр нет

Пусть $1 < \dim(V) < \infty$, $A = \mathrm{End}(V)$, ω — форма следа на A [Миллер, 1969; Губарев, 2020]: $\underline{A = I_1 \oplus I_2}$ (как подалгебры), где

$$I_1 = \ker(R^N), \quad I_2 = \ker(R + \lambda\,\mathrm{id})^N, \quad N = n^2$$

Предложение 5

$I_2' := \ker(R + \lambda\,\mathrm{id})$ — нильпотентный идеал в $\mathrm{Im}(R)$

Теорема 7 (Гончаров, В.Г., 2022)

Пусть $(V, \{\!\{,\}\!\})$ — λ-двойная алгебра Ли для $\lambda \neq 0$
и R — соответствующий РБ-оператор веса λ на $A = \mathrm{End}(V)$
Если $\dim V > 1$, тогда $U = I_2'V$ есть собственный идеал V

Следствие 1

Простых конечномерных двойных алгебр Ли нет

$\lambda = 0$: доказано в [Гончаров, Колесников, 2018]
$\lambda \neq 0$ и $\dim V > 1$: следует из теоремы 7
$\lambda \neq 0$ и $\dim V = 1$: $\{\!\{\cdot,\cdot\}\!\} = 0$

Модифицированные двойные алгебры Пуассона

Определение 6 [Артамонов, 2015]

Пусть A — ассоциативная алгебра с произведением $ab = \mu(a \otimes b)$ A относительно двойной скобки $\{\!\{\cdot,\cdot\}\!\}$ называется модифицированной двойной алгеброй Пуассона, если

$$\{\!\{a, bc\}\!\} = (b \otimes 1)\{\!\{a, c\}\!\} + \{\!\{a, b\}\!\}(1 \otimes c) \tag{12}$$

$$\{\!\{ab, c\}\!\} = (1 \otimes a)\{\!\{b, c\}\!\} + \{\!\{a, c\}\!\}(b \otimes 1) \tag{13}$$

$$\{a, \{b, c\}\} - \{b, \{a, c\}\} = \{\{a, b\}, c\} \tag{14}$$

$$\{a, b\} + \{b, a\} = 0 \mod [A, A] \tag{15}$$

для всех $a, b, c \in A$. Здесь $\{a, b\} = \mu \circ \{\!\{a, b\}\!\}$

Гипотеза Артамонова

(-1)-двойная алгебра Ли M_{art}:

$$\{\!\{a_1, a_2\}\!\} = -a_1 \otimes a_2, \quad \{\!\{a_2, a_1\}\!\} = a_1 \otimes a_2, \quad \{\!\{a_2, a_3\}\!\} = a_3 \otimes a_2,$$
$$\{\!\{a_3, a_1\}\!\} = a_1 \otimes a_3 - a_3 \otimes a_1, \quad \{\!\{a_3, a_2\}\!\} = -a_3 \otimes a_2$$

Распространим по (12), (13) двойную скобку на $A = \mathrm{As}\langle a_1, a_2, a_3\rangle$

Гипотеза [Артамонов, 2017]

Алгебра A относительно заданной двойной скобки является модифицированной двойной алгеброй Пуассона

Теорема 8 (Гончаров, В.Г., 2022)

Пусть $(V, \{\!\{\cdot,\cdot\}\!\})$ — λ-двойная алгебра Ли, $n = \dim V < \infty$, $\lambda \neq 0$ Тогда, продолжая по (12), (13) двойную скобку на алгебру $A = \mathrm{As}\langle e_1, \ldots, e_n\rangle$, получаем модифицированную двойную алгебру Пуассона на A

Следствие 2

Гипотеза Артамонова верна

Литература

- M. Van den Bergh. Double Poisson algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (11) (2008) 5711–5769.
- T. Schedler. Poisson algebras and Yang-Baxter equations, in: Contemp. Math. **482**, AMS, Providence, R.I. (2009) 91–106.
- A. Odesskii, V. Rubtsov, V. Sokolov. Double Poisson brackets on free associative algebras, in: Contemp. Math. **592** (2013) 225–239, AMS, Providence, RI.
- A. De Sole, V. G. Kac, D. Valeri. Double Poisson vertex algebras and non-commutative Hamiltonian equations, Adv. Math. **281** (2015) 1025–1099.
- S. Arthamonov. Noncommutative inverse scattering method for the Kontsevich system, Lett. Math. Phys. (9) **105** (2015) 1223–1251.
- S. Arthamonov. Modified double Poisson brackets, J. Algebra **492** (2017) 212–233.

Литература (прод.)

- M. E. Goncharov, P. S. Kolesnikov. Simple finite-dimensional double algebras, J. Algebra **500** (2018) 425–438.
- N. Iyudu, M. Kontsevich, Y. Vlassopoulos. Pre-Calabi-Yau algebras as noncommutative Poisson structures, J. Algebra **567** (2020) 63–90.
- V. Gubarev. An example of a simple double Lie algebra, Sib. Electron. Math. Rep. (2) **18** (2021) 834–844.
- M. Goncharov, V. Gubarev. Double Lie algebras of nonzero weight, Adv. Math. **409**, Part B (2022), 108680.

Спасибо за внимание!