Операторы Роты-Бакстера на алгебрах Хопфа.

Гончаров М.Е.

7.11.2022, вторая конференция Математических центров России.

Операторы Роты-Бакстера на алгебрах.

Определение ([Tricomi, 1951; Baxter, 1960])

Пусть A — алгебра над полем F и $\lambda \in F$ — произвольный скаляр. Линейное отображение $R : A \to A$ называется оператором Роты-Бакстера веса λ, если для любых $x, y \in A$:

$$R(x)R(y) = R(R(x)y + xR(y) + \lambda xy). \tag{1}$$

Операторы Роты-Бакстера на алгебрах.

Определение ([Tricomi, 1951; Baxter, 1960])

Пусть A — алгебра над полем F и $\lambda \in F$ — произвольный скаляр. Линейное отображение $R : A \to A$ называется оператором Роты-Бакстера веса λ, если для любых $x, y \in A$:

$$R(x)R(y) = R(R(x)y + xR(y) + \lambda xy). \qquad (1)$$

Если R — оператор Роты-Бакстера веса λ на алгебре A и α — ненулевой скаляр, то оператор αR является оператором Роты-Бакстера веса $\alpha\lambda$. Таким образом, с точностью до умножения на скаляр у нас есть два различных случая: $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$.

Операторы Роты-Бакстера впервые возникли в середине прошлого века в работах Г. Бакстера как инструмент изучения интегральных операторов в рамках теории вероятностей и математической статистики.

Операторы Роты-Бакстера впервые возникли в середине прошлого века в работах Г. Бакстера как инструмент изучения интегральных операторов в рамках теории вероятностей и математической статистики.

Независимо от этого, операторы Роты-Бакстера естественным образом возникли в 80-х годах прошлого столетия в работах М.А. Семёнова-Тян-Шанского как операторная форма определенных решений классического уравнения Янга-Бакстера. Оказалось, что если $(\mathfrak{g}, \omega)$ — квадратичная алгебра Ли, то кососимметрические решения классического уравнения Янга-Бакстера (т.е. структуры треугольных биалгебр Ли на данной алгебре Ли) находятся во взаимно однозначном соответствии с операторвми Роты-Бакстера веса 0, удовлетворяющим

$$R + R^* = 0.$$

Операторы Роты-Бакстера впервые возникли в середине прошлого века в работах Г. Бакстера как инструмент изучения интегральных операторов в рамках теории вероятностей и математической статистики.

Независимо от этого, операторы Роты-Бакстера естественным образом возникли в 80-х годах прошлого столетия в работах М.А. Семёнова-Тян-Шанского как операторная форма определенных решений классического уравнения Янга-Бакстера. Оказалось, что если $(\mathfrak{g}, \omega)$ — квадратичная алгебра Ли, то кососимметрические решения классического уравнения Янга-Бакстера (т.е. структуры треугольных биалгебр Ли на данной алгебре Ли) находятся во взаимно однозначном соответствии с операторвми Роты-Бакстера веса 0, удовлетворяющим

$$R + R^* = 0.$$

Вместе с тем, структуры факторизуемых биалгебр Ли на $(\mathfrak{g}, \omega)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с операторами Роты-Бакстера веса 1, удовлетворяющим

$$R + R^* + id = 0.$$

Мотивация.

Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и $\varphi : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$ — эндоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$, то φ можно единственным образом продолжить до эндоморфизма $\varphi : U(\mathfrak{g}) \mapsto U(\mathfrak{g})$ универсальной обертывающей алгебры.

Мотивация.

Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и $\varphi : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$ — эндоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$, то φ можно единственным образом продолжить до эндоморфизма $\varphi : U(\mathfrak{g}) \mapsto U(\mathfrak{g})$ универсальной обертывающей алгебры.

С некоторых точек зрения разумно поставить вопрос о продолжении оператора Роты-Бакстера на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, до какого-то разумного оператора на универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g})$.

Мотивация.

Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и $\varphi : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$ — эндоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$, то φ можно единственным образом продолжить до эндоморфизма $\varphi : U(\mathfrak{g}) \mapsto U(\mathfrak{g})$ универсальной обертывающей алгебры.

С некоторых точек зрения разумно поставить вопрос о продолжении оператора Роты-Бакстера на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, до какого-то разумного оператора на универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g})$.

К сожалению, невозможно продлить оператор Роты-Бакстера R, действующего на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, до (алгебраического) оператора Роты-Бакстера на универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g})$ (т.е. до линейного отображения $B : U(\mathfrak{g}) \mapsto U(\mathfrak{g})$, такого что $B|\mathfrak{g} = R$ и

$$B(x)B(y) = B(B(x)y + xB(y) + \lambda xy),$$

$x, y \in U(\mathfrak{g})$.

Мотивация.

Тем не менее, некоторые полученные результаты показывают, что какое-то разумное продолжение должно существовать:

Мотивация.

Тем не менее, некоторые полученные результаты показывают, что какое-то разумное продолжение должно существовать:

Во-первых, известно, что структуру биалгебры на произвольной алгебре Ли можно продолжить до ко-Пуассоновой коскобки на универсальной обертывающей алгебре.

Мотивация.

Тем не менее, некоторые полученные результаты показывают, что какое-то разумное продолжение должно существовать:

Во-первых, известно, что структуру биалгебры на произвольной алгебре Ли можно продолжить до ко-Пуассоновой коскобки на универсальной обертывающей алгебре.

Во-вторых, операторы Роты-Бакстера ненулевого веса связаны со структурами пост-лиевых алгебр на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. В свою очередь известно, что структуру пост-лиевой алгебры на алгебре Ли можно продолжить до некоторой разумной структуры на универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g})$ (Ebrahimi-Fard K., Lundervold A. and Munthe-Kaas H.Z. 2015).

Операторы Роты-Бакстера на группах.

В 2020 в работе L.Guo, H. Lang, Y. Sheng бало дано мотивированное определение оператора Роты-Бакстера (веса 1) на группах. Для произвольной группы G отображение $B : G \mapsto G$ называется оператором Роты-Бакстера, если для любых $g, h \in G$:

$$B(g)B(h) = B(gB(g)hB(g)^{-1}).$$

Операторы Роты-Бакстера на группах.

В 2020 в работе L.Guo, H. Lang, Y. Sheng бало дано мотивированное определение оператора Роты-Бакстера (веса 1) на группах. Для произвольной группы G отображение $B : G \mapsto G$ называется оператором Роты-Бакстера, если для любых $g, h \in G$:

$$B(g)B(h) = B(gB(g)hB(g)^{-1}).$$

Они доказали, что если G — группа Ли и B — оператор Роты-Бакстера на G, то касательное к B в единице отображение будет оператором Роты-Бакстера веса 1 на соответствующей алгебре Ли.

Операторы Роты-Бакстера на группах.

В 2020 в работе L.Guo, H. Lang, Y. Sheng бало дано мотивированное определение оператора Роты-Бакстера (веса 1) на группах. Для произвольной группы G отображение $B : G \mapsto G$ называется оператором Роты-Бакстера, если для любых $g, h \in G$:

$$B(g)B(h) = B(gB(g)hB(g)^{-1}).$$

Они доказали, что если G — группа Ли и B — оператор Роты-Бакстера на G, то касательное к B в единице отображение будет оператором Роты-Бакстера веса 1 на соответствующей алгебре Ли.

Вместе с тем, для многих результатов, известных для операторов Роты-Бакстера ненулевого веса на алгебрах, были получены соответствующие им аналоги на группах.

Мотивация.

Что общего у групп и алгебр Ли?

Что общего у групп и алгебр Ли? И те и другие являются основанием для двух важнейших примеров кокоммутативных алгебр Хопфа: групповой алгебры $F[G]$ группы G и универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Мотивация.

Что общего у групп и алгебр Ли? И те и другие являются основанием для двух важнейших примеров кокоммутативных алгебр Хопфа: групповой алгебры $F[G]$ группы G и универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Возвращаясь к исходной задаче, возможно, стоит рассматривать универсальную обертываю алгебру не как алгебру, а как кокоммутативную алгебру Хопфа и изменить требования к получаемому оператору?

Обозначения.

Если $\Delta : A \mapsto A \otimes A$ — коумножение на пространстве A, то мы будем использовать следующее обозначения для образа коумножения: для любого $a \in A$:

$$\Delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}.$$

Обозначения.

Если $\Delta : A \mapsto A \otimes A$ — коумножение на пространстве A, то мы будем использовать следующее обозначения для образа коумножения: для любого $a \in A$:

$$\Delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}.$$

В алгебре Хофпа $H = (H, \mu, \Delta, \eta, \epsilon, S)$ мы используем следующие обозначения:
— $\mu : H \otimes H \mapsto H$ — умножение,
— $\Delta : H \mapsto H \otimes H$ — коумножение,
— $\eta : F \mapsto H$ — единица,
— $\epsilon : H \mapsto F$ — коединица,
— $S : H \mapsto H$ — антипод.

Если (A, Δ, ϵ) — коалгебра, то линейное отображение $\varphi : A \mapsto A$ называется морфизмом коалгебр, если для любого $x \in A$:

$$\Delta(\varphi(x)) = \varphi(x_{(1)}) \otimes \varphi(x_{(2)}).$$
$$\epsilon(\varphi(x)) = \epsilon(x).$$

Главное определение.

Определение.

Пусть $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ — кокоммутативная алгебра Хопфа. Морфизм коалгебр $B : H \mapsto H$ называется оператором Роты-Бакстера на H, если для всех $x, y \in H$:

$$B(x)B(y) = B(x_{(1)}B(x_{(2)})yS(B(x_{(3)}))), \qquad (2)$$

где $\Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$.

Свойства.

$$B(x)B(y) = B(x_{(1)}B(x_{(2)})yS(B(x_{(3)})))$$

Замечание. Заметим, что если H является коммутативной и кокоммутативной алгеброй Хопфа, тогда морфизм коалгебр $B : H \mapsto H$ будет оператором Роты-Бакстера тогда и только тогда, когда B является обычным гомоморфизмом алгебр, то есть $B(xy) = B(x)B(y)$ для любых $x, y \in H$.

Свойства.

$$B(x)B(y) = B(x_{(1)}B(x_{(2)})yS(B(x_{(3)})))$$

Замечание. Заметим, что если H является коммутативной и кокоммутативной алгеброй Хопфа, тогда морфизм коалгебр $B : H \mapsto H$ будет оператором Роты-Бакстера тогда и только тогда, когда B является обычным гомоморфизмом алгебр, то есть $B(xy) = B(x)B(y)$ для любых $x, y \in H$.

Замечание. Если B — оператор Роты-Бакстера на кокоммутативной алгебре Хопфа H и $\varphi : H \mapsto H$ — автоморфизм (или антиавтоморфизм) биалгебр, то отображение $B' = \varphi \circ B \circ \varphi^{-1}$ опять будет оператором Роты-Бакстера на H.

Свойства.

$$B(x)B(y) = B(x_{(1)}B(x_{(2)})yS(B(x_{(3)})))$$

Замечание. Заметим, что если H является коммутативной и кокоммутативной алгеброй Хопфа, тогда морфизм коалгебр $B : H \mapsto H$ будет оператором Роты-Бакстера тогда и только тогда, когда B является обычным гомоморфизмом алгебр, то есть $B(xy) = B(x)B(y)$ для любых $x, y \in H$.

Замечание. Если B — оператор Роты-Бакстера на кокоммутативной алгебре Хопфа H и $\varphi : H \mapsto H$ — автоморфизм (или антиавтоморфизм) биалгебр, то отображение $B' = \varphi \circ B \circ \varphi^{-1}$ опять будет оператором Роты-Бакстера на H.

Утверждение 1.

Пусть H — кокоммутативная алгебра Хопфа, B — оператор Роты-Бакстера на H. Тогда
(1) Если $g \in H$ — групповой, то $B(g)$ снова является групповым.
(2) $B(1) = 1$.
(3) Если $x \in H$ — примитивный, то $B(x)$ тоже является примитивным.

Свойства

Если $R : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$ — оператор Роты-Бакстера веса 1 на алгебре $\mathfrak{g}$, то оператор $-R - id : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$ также будет оператором Роты-Бакстера веса 1 на $\mathfrak{g}$. Аналогичный результат на группах звучит так: если G — группа и B — оператор Роты-Бакстера на G, тогда оператор $\tilde{B} : G \mapsto G$, определенный по правилу $\tilde{B}(g) = g^{-1}B(g^{-1})$, также является оператором Роты-Бакстера на G.

Свойства

Если $R : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$ — оператор Роты-Бакстера веса 1 на алгебре $\mathfrak{g}$, то оператор $-R - id : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}$ также будет оператором Роты-Бакстера веса 1 на $\mathfrak{g}$. Аналогичный результат на группах звучит так: если G — группа и B — оператор Роты-Бакстера на G, тогда оператор $\tilde{B} : G \mapsto G$, определенный по правилу $\tilde{B}(g) = g^{-1}B(g^{-1})$, также является оператором Роты-Бакстера на G.Для кокоммутативных алгебр Хопфа результат выглядит так:

Предложение 1.

Пусть H — кокоммутативная алгебра Хопфа, B — оператор Роты-Бакстера на H. Определим оператор $\tilde{B} : H \mapsto H$ как

$$\tilde{B}(x) = S(x_{(1)})B(S(x_{(2)})).$$

Тогда $\tilde{B}$ также является оператором Роты-Бакстера на H.

Свойства.

Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разлагается в прямую сумму двух подалгебр $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$. Тогда отображение R, определенное как $R(x_1 + x_2) = -x_2$ $(x_i \in \mathfrak{g}_i)$, является оператором Роты-Бакстера веса 1. Для групп аналогичный результат звучит так: если группа G разлагается в произведение двух подгрупп G_1 и G_2: $G = G_1 G_2$, причем $G_1 \cap G_2 = \{e\}$, тогда отображение B, определенное как $B(g_1 g_2) = g_2^{-1}$ $(g_i \in G_i)$, является оператором Роты-Бакстера.

Свойства.

Предположим, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разлагается в прямую сумму двух подалгебр $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$: $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$. Тогда отображение R, определенное как $R(x_1 + x_2) = -x_2$ ($x_i \in \mathfrak{g}_i$), является оператором Роты-Бакстера веса 1. Для групп аналогичный результат звучит так: если группа G разлагается в произведение двух подгрупп G_1 и G_2: $G = G_1 G_2$, причем $G_1 \cap G_2 = \{e\}$, тогда отображение B, определенное как $B(g_1 g_2) = g_2^{-1}$ ($g_i \in G_i$), является оператором Роты-Бакстера.

Предложение 2.

Пусть H — кокоммутативная алгебра Хопфа. Предположим, что H_1 и H_2 — две подалгебры Хопфа такие, что $H = H_1 H_2$ как алгебра Хопфа, причем это произведение является прямым, т.е. как векторное пространство H изоморфно $H_1 \otimes_F H_2$. Определим

$$B(h_1 h_2) = \epsilon(h_1) S(h_2),$$

где $h_i \in H_i$. Тогда B является оператором Роты-Бакстера на H.

Следствие. Если H — кокоммутативная алгебра Хопфа с антиподом S, тогда отображение $B = S$ является оператором Роты-Бакстера на H.

Теорема 1.

Пусть G — произвольная группа, B — оператор Роты-Бакстера на G. Тогда отображение B можно единственным образом продолжить до оператора Роты-Бакстера $B : F[G] \mapsto F[G]$ на групповой алгебре $F[G]$ (рассматриваемой как алгебра Хопфа). Обратно, если B — оператор Роты-Бакстера на $F[G]$, то $B(G) \subset G$ и ограничение $B|_G$ является оператором Роты-Бакстера на группе G.

Операторы Роты-Бакстера на групповой алгебре $F[G]$.

Теорема 1.

Пусть G — произвольная группа, B — оператор Роты-Бакстера на G. Тогда отображение B можно единственным образом продолжить до оператора Роты-Бакстера $B : F[G] \mapsto F[G]$ на групповой алгебре $F[G]$ (рассматриваемой как алгебра Хопфа). Обратно, если B — оператор Роты-Бакстера на $F[G]$, то $B(G) \subset G$ и ограничение $B|_G$ является оператором Роты-Бакстера на группе G.

$$B(\sum \alpha_i g_i) = \sum \alpha_i B(g_i), \quad g_i \in G, \ \alpha_i \in F$$

Оператор Роты-Бакстера на универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g})$.

Лемма 1.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и R — оператор Роты-Бакстера веса 1 на $\mathfrak{g}$. Тогда отображение R можно единственным образом продолжить до линейного отображения $B : U(\mathfrak{g}) \mapsto U(\mathfrak{g})$ такого, что

1. Ограничение отображения B на $\mathfrak{g}$ совпадает с R: $B|_{\mathfrak{g}} = R$.
2. B является оператором Роты-Бакстера на $U(\mathfrak{g})$.

Оператор Роты-Бакстера на универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g})$.

Лемма 1.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и R — оператор Роты-Бакстера веса 1 на $\mathfrak{g}$. Тогда отображение R можно единственным образом продолжить до линейного отображения $B : U(\mathfrak{g}) \mapsto U(\mathfrak{g})$ такого, что
1. Ограничение отображения B на $\mathfrak{g}$ совпадает с R: $B|_{\mathfrak{g}} = R$.
2. B является оператором Роты-Бакстера на $U(\mathfrak{g})$.

Индуктивное построение оператора B: определим $B(1) = 1$ и для $x, x_1, \ldots, x_k \in \mathfrak{g}$, $h = x_1 x_2 \ldots x_k$ зададим

$$B(xh) = B(x)B(h) - B([B(x), h]). \tag{3}$$

Оператор Роты-Бакстера на универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g})$.

Лемма 1.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и R — оператор Роты-Бакстера веса 1 на $\mathfrak{g}$. Тогда отображение R можно единственным образом продолжить до линейного отображения $B : U(\mathfrak{g}) \mapsto U(\mathfrak{g})$ такого, что
1. Ограничение отображения B на $\mathfrak{g}$ совпадает с R: $B|_{\mathfrak{g}} = R$.
2. B является оператором Роты-Бакстера на $U(\mathfrak{g})$.

Индуктивное построение оператора B: определим $B(1) = 1$ и для $x, x_1, \ldots, x_k \in \mathfrak{g}$, $h = x_1 x_2 \ldots x_k$ зададим

$$B(xh) = B(x)B(h) - B([B(x), h]). \tag{3}$$

Теорема 2.

Операторы Роты-Бакстера веса 1 алгебре Ли $\mathfrak{g}$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с операторами Роты-Бакстера на универсальной обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g})$.

Пример.

Рассмотрим $\mathfrak{g} = sl_2(F)$, x, h, y — стандартный базис $sl_2(F)$ с таблицей умножения:

$$[h, x] = 2x, \quad [h, y] = -2y, \quad [x, y] = h.$$

Рассмотрим отображение R:

$$R(x) = 0, \quad R(h) = -\frac{h}{2}, \quad R(y) = -y.$$

Известно, что определенное таким образом отображение является оператором Роты-Бакстера веса 1 на $\mathfrak{g}$. Рассмотрим продолжение B оператора R на $U(\mathfrak{g})$.

Пример.

Рассмотрим $\mathfrak{g} = sl_2(F)$, x, h, y — стандартный базис $sl_2(F)$ с таблицей умножения:

$$[h, x] = 2x, \quad [h, y] = -2y, \quad [x, y] = h.$$

Рассмотрим отображение R:

$$R(x) = 0, \quad R(h) = -\frac{h}{2}, \quad R(y) = -y.$$

Известно, что определенное таким образом отображение является оператором Роты-Бакстера веса 1 на $\mathfrak{g}$. Рассмотрим продолжение B оператора R на $U(\mathfrak{g})$.
Мономы $x^i h^j y^k$ образуют базис $U(\mathfrak{g})$. Для них (используя определяющее соотношение $B(xh) = B(x)B(h) - B([B(x), h])$):

$$B(x^i h^j y^k) = \begin{cases} 0, \text{ if } i > 0 \\ (-1)^{j+k} \frac{y^k h^j}{2^j}, \quad \text{if } i = 0. \end{cases}$$

- G. Baxter, An analytic problem whose solution follows from a simple algebraic identity, Pacific J. Math. **10** (1960) 731–742.
- Semenov-Tyan-Shanskii, M.A. What is a classical r-matrix?. Funct Anal Its Appl 17, 259–272 (1983).
- L.Guo, H. Lang, Y. Sheng, Integration and Geometrization of Rota-Baxter Lie algebras, Adv. Math. 387 (2021), 107834.
- Ebrahimi-Fard K., Lundervold A., Munthe-Kaas H.Z., On the Lie enveloping algebra of a post-Lie algebra, Journal of Lie Theory 25 (2015), 4, 1139-1165.
- M. Goncharov, Rota-Baxter operators on cocommutative Hopf algebras, Journal of Algebra, 582:15 (2021), 39-56.

Спасибо за внимание.