«Примитивные элементы свободных неассоциативных алгебр над конечными полями»

Аспирант кафедры высшей алгебры
механико-математического факультета МГУ
Майсурадзе Михаил Владимирович
Научные руководители:
Профессор, д.ф-м.н. Михалёв Александр Васильевич
Профессор, д.ф-м.н. Михалёв Александр Александрович

Москва, 2022 г.

Термины и обозначения

Обозначение	Описание	Примеры
X	множество свободных образующих	$x_1, \dots, x_n$
F	поле	$1, 2, 1/3, -5, \dots$
$W_0 = \Gamma(X)$	свободный группоид неассоциативных мономов без единичного элемента с алфавитом X	x_1x_2, $(x_1x_2)(x_3x_4)$, $(x_1(x_2x_3))x_4$
$A = F(X)$	линейное пространство над полем F с базисом, состоящим из 1 и элементов $\Gamma(X)$ с правилом умножения: $(\alpha a)\cdot(\beta b) = (\alpha\beta)(a \cdot b)$, $\forall \alpha, \beta \in F$, $a, b \in \Gamma(X)$	$x_1 + x_2 + x_1(x_2x_3)$, $(x_1x_2)x_3 + x_1(x_2x_3)$
$S_0 = \{r_w, l_w \mid w \in W_0\}$	множество свободных образующих – операторов левого и правого умножения на слова из W_0	$l_{x_1x_2}$, $r_{x_1x_2}$, $l_{(x_1x_2)(x_3x_4)}$, $r_{(x_1(x_2x_3))x_4}$
$U(A) = F(S_0)$	свободная ассоциативная алгебра	$1 + l_{x_1} + r_{x_2x_1}$
$\mathcal{D}(ab) = \mathcal{D}(a)r_b + \mathcal{D}(b)l_a$	дифференцирование	$\mathcal{D}(x_1(x_2x_3)) = \mathcal{D}(x_1)r_{x_2x_3} + \mathcal{D}(x_3)l_{x_2}l_{x_1} + \mathcal{D}(x_2)r_{x_3}l_{x_1}$
$\left\{\frac{\partial}{\partial x_i} \middle\vert x_i \in X\right\}$	частные производные	$\frac{\partial}{\partial x_1}x_1(x_2x_3) = r_{x_2x_3}$ $\frac{\partial}{\partial x_2}x_1(x_2x_3) = r_{x_3}l_{x_1}$ $\frac{\partial}{\partial x_3}x_1(x_2x_3) = l_{x_2}l_{x_1}$

Теоретические факты

Свободные неассоциативные алгебры над конечными полями относятся к шраерову многообразию алгебр. Это означает, что любая подалгебра таких алгебр является свободной [2].
Подмножество M ненулевых элементов свободной алгебры A шраерова многообразия называется **примитивной системой элементов**, если существует множество свободных образующих алгебры A, содержащее подмножество M. Сами элементы такой системы называются **примитивными элементами**.
Критерий примитивности системы и отдельного элемента получен в [5], [6, 12.5.1 Primitive elements in free non-associative algebras]:
Система $a_1, a_2, \ldots, a_r$ элементов свободной неассоциативной алгебры A примитивна тогда и только тогда, когда матрица $(\partial(a_1), \ldots, \partial(a_r))$ обратима слева над $U(A)$. В частности, элемент $a \in A$ является примитивным тогда и только тогда, когда $\exists m_1, \ldots, m_n \in U(A)$, такие что $\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial a}{\partial x_i} = 1$.

Векторные подпространства

Коэффициенты

Свободная алгебра над полем F – это векторное пространство над этим полем. Базисом этого пространства является множество всех слов свободного группоида.
Рассмотрим свободную алгебру с n образующими. Разобьём базис векторного пространства на группы по длине слова. В случае неассоциативной алгебры также требуется дополнительное разбиение на группы по расстановке скобок. В каждой группе слов длины k будет n^k элементов, которые можно записать в виде k-мерной таблицы. Коэффициенты при этих мономах также удобно записывать в виде k-мерной таблицы.

Векторные подпространства

Примеры записи коэффициентов

- мономы длины 0 (элементы поля в алгебрах с 1). Таблица $n^0 = 1$ коэффициентов записывается одним числом.
- x_i – мономы длины 1. Таблица $n^1 = n$ коэффициентов записывается вектором длины n.
- $x_i x_j$ – мономы длины 2. Таблица n^2 коэффициентов записывается квадратной матрицей $n \times n$.
- ассоциативные мономы $x_i x_j x_s$ длины 3. Таблица n^3 коэффициентов записывается кубом $n \times n \times n$ коэффициентов.
- неассоциативные мономы $(x_i x_j) x_s$, $x_i (x_j x_s)$ длины 3. Две таблицы n^3 коэффициентов записываются $C_{k-1} = C_2 = 2$ ($(k-1)$-е число Каталана) кубами $n \times n \times n$ коэффициентов.

Единицу и слова свободного группоида также удобно представлять в виде многомерных таблиц. Обозначим $\bar{x} \times \ldots \times \bar{x}$ k-мерную таблицу в которой на месте $(i_1, \ldots, i_k)$ находится элемент $x_{i_1} \ldots x_{i_k}$. В неассоциативном случае расстановка скобок в произведении $\bar{x} \times \ldots \times \bar{x}$ совпадает с расстановкой скобок в элементе $x_{i_1} \ldots x_{i_k}$. Считая умножение между таблицами коэффициентов и слов, как и сложение между элементами одного из подпространств, описанных выше, поэлементным, получим более удобное представление элементов свободных алгебр.

Векторные подпространства

Примеры элементов

- элемент длины 2 свободной алгебры:

$$h = a_{x_1}x_1 + a_{x_2}x_2 + \ldots + a_{x_n}x_n + a_{x_1x_1}x_1x_1 + a_{x_1x_2}x_1x_2 + \ldots + a_{x_nx_n}x_nx_n$$

$$h = \begin{pmatrix} a_{x_1}x_1 \\ a_{x_2}x_2 \\ \vdots \\ a_{x_n}x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{x_1x_1}x_1x_1 & a_{x_1x_2}x_1x_2 & \cdots & a_{x_1x_n}x_1x_n \\ a_{x_2x_1}x_2x_1 & a_{x_2x_2}x_2x_2 & \cdots & a_{x_2x_n}x_2x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{x_nx_1}x_nx_1 & a_{x_nx_2}x_nx_2 & \cdots & a_{x_nx_n}x_nx_n \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} a_{x_1} \\ a_{x_2} \\ \vdots \\ a_{x_n} \end{pmatrix} \bar{x} + \begin{pmatrix} a_{x_1x_1} & a_{x_1x_2} & \cdots & a_{x_1x_n} \\ a_{x_2x_1} & a_{x_2x_2} & \cdots & a_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{x_nx_1} & a_{x_nx_2} & \cdots & a_{x_nx_n} \end{pmatrix} \bar{x} \times \bar{x}$$

$$h = A_{\bar{x}} \cdot \bar{x} + A_{\bar{x}\times\bar{x}} \cdot \bar{x} \times \bar{x}.$$

- элемент длины 3 свободной неассоциативной алгебры:

$$h = A_{\bar{x}} \cdot \bar{x} + A_{\bar{x}\times\bar{x}} \cdot \bar{x} \times \bar{x} + A_{\bar{x}\times(\bar{x}\times\bar{x})} \cdot \bar{x} \times (\bar{x} \times \bar{x}) + A_{(\bar{x}\times\bar{x})\times\bar{x}} \cdot (\bar{x} \times \bar{x}) \times \bar{x}$$

Векторные “слои”

Здесь $A_{((\dots)\dots)}$ – все коэффициенты при мономах длины k с указанной скобочной структурой составленные в виде k-мерной таблицы. Такие таблицы неудобно записывать, но достаточно легко представлять.
В случае 2-мерных матриц мы оперируем понятиями “строк” и “столбцов” матрицы. Пронумеруем стороны этих таблиц так, что в 2-мерном случае строки индексируются вдоль первой стороны, а столбцы – вдоль второй. В 3-хмерном случае вдоль первой стороны индексируются горизонтальные “слои”. Пусть $A_{((\bar{x}\dots\times\bar{x})\dots\bar{x})}$ – k-мерная таблица коэффициентов. Обозначим i-ый “слой” этой таблицы, индексированный по одной из её сторон $A_{((\bar{x}\dots\times x_i)\dots\bar{x})}$. Это $(k-1)$-мерная таблица с коэффициентами.

Векторные “слои”

Пример для элемента длины 3 и двух образующих

Для примера покажем, как записывается представление $A_{\bar{x}\times(\bar{x}\times\bar{x})}\cdot\bar{x}\times(\bar{x}\times\bar{x})$ при $\bar{x}=(x_1,x_2)$. Размер таблицы равен $2\times2\times2$. Запишем её “слои”, индексированные вдоль третьей стороны (“глубины”) в виде расширенных квадратных матриц.

$$A_{\bar{x}\times(\bar{x}\times\bar{x})}=\left(A_{\bar{x}\times(\bar{x}\times x_1)}\middle|A_{\bar{x}\times(\bar{x}\times x_2)}\right)$$

$$A_{\bar{x}\times(\bar{x}\times\bar{x})}=\left(\begin{array}{cc|cc} a_{x_1(x_1x_1)} & a_{x_1(x_2x_1)} & a_{x_1(x_1x_2)} & a_{x_1(x_2x_2)} \\ a_{x_2(x_1x_1)} & a_{x_2(x_2x_1)} & a_{x_2(x_1x_2)} & a_{x_2(x_2x_2)} \end{array}\right)$$

$$\bar{x}\times(\bar{x}\times\bar{x})=\left(\begin{array}{cc|cc} x_1(x_1x_1) & x_1(x_2x_1) & x_1(x_1x_2) & x_1(x_2x_2) \\ x_2(x_1x_1) & x_2(x_2x_1) & x_2(x_1x_2) & x_2(x_2x_2) \end{array}\right)$$

Отметим, что чаще удобно рассматривать рассматривать “слои” индексированные вдоль первой стороны (“высоты”):

$$A_{x_1\times(\bar{x}\times\bar{x})}=\begin{pmatrix} a_{x_1(x_1x_1)} & a_{x_1(x_2x_1)} \\ a_{x_1(x_1x_2)} & a_{x_1(x_2x_2)} \end{pmatrix},A_{x_2\times(\bar{x}\times\bar{x})}=\begin{pmatrix} a_{x_2(x_1x_1)} & a_{x_2(x_2x_1)} \\ a_{x_2(x_1x_2)} & a_{x_2(x_2x_2)} \end{pmatrix}$$

Техника свободного дифференциального исчисления в свободных неассоциативных алгебрах

Рассмотрим теперь в $U(A)$ частные производные представленные в описанном выше виде:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = a_{x_i} + A_{x_i \times \bar{x}} \cdot r_{\bar{x}} + A_{\bar{x} \times x_i} \cdot l_{\bar{x}} +$$

$$+ A_{x_i \times (\bar{x} \times \bar{x})} \cdot r_{\bar{x} \times \bar{x}} + A_{\bar{x} \times (x_i \times \bar{x})} \cdot r_{\bar{x}} \times l_{\bar{x}} + A_{\bar{x} \times (\bar{x} \times x_i)} \cdot l_{\bar{x}} \times l_{\bar{x}} +$$

$$+ A_{(x_i \times \bar{x}) \times \bar{x}} \cdot r_{\bar{x}} \times r_{\bar{x}} + A_{(\bar{x} \times x_i) \times \bar{x}} \cdot l_{\bar{x}} \times r_{\bar{x}} + A_{(\bar{x} \times \bar{x}) \times x_i} \cdot l_{\bar{x} \times \bar{x}} + \dots$$

Из матриц $A_{((\bar{x} \dots \times x_i) \dots \bar{x})}$ можно составить вектора длины n, сгруппировав их по структуре слов $U(A)$.

Например, для мономов вида $l_{\bar{x}} \times r_{\bar{x}}$ получим вектор слоёв коэффициентов:

$$\begin{pmatrix} A_{(\bar{x} \times x_1) \times \bar{x}} \\ \dots \\ A_{(\bar{x} \times x_n) \times \bar{x}} \end{pmatrix},$$

или, что то же самое исходную матрицу коэффициентов при $(\bar{x} \times \bar{x}) \times \bar{x}$, с другим порядком сторон.

Техника свободного дифференциального исчисления в свободных неассоциативных алгебрах

Пример дифференцирования группы мономов длины 3 с двумя образующими

Рассмотрим “вклад” $A_{\bar{x}\times(\bar{x}\times\bar{x})} \cdot \bar{x} \times (\bar{x} \times \bar{x})$ при $\bar{x} = (x_1, x_2)$ в выражения для частных производных.

$$\mathcal{D}(A_{\bar{x}\times(\bar{x}\times\bar{x})} \cdot \bar{x} \times (\bar{x} \times \bar{x})) =$$

$$= A_{\bar{x}\times(\bar{x}\times\bar{x})} \cdot (\mathcal{D}(x) \times (\bar{x} \times \bar{x}) + \bar{x} \times (\mathcal{D}(\bar{x}) \times \bar{x}) + \bar{x} \times (\bar{x} \times \mathcal{D}(\bar{x}))) =$$

$$= \begin{pmatrix} A_{x_1\times(\bar{x}\times\bar{x})} \\ A_{x_2\times(\bar{x}\times\bar{x})} \end{pmatrix} \cdot \mathcal{D}(x) \times r_{\bar{x}\times\bar{x}} + \begin{pmatrix} A_{\bar{x}\times(x_1\times\bar{x})} \\ A_{\bar{x}\times(x_2\times\bar{x})} \end{pmatrix} \cdot \mathcal{D}(x) \times r_{\bar{x}} \times l_{\bar{x}} +$$

$$+ \begin{pmatrix} A_{\bar{x}\times(\bar{x}\times x_1)} \\ A_{\bar{x}\times(\bar{x}\times x_2)} \end{pmatrix} \cdot \mathcal{D}(x) \times l_{\bar{x}} \times l_{\bar{x}}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{x_1\times(\bar{x}\times\bar{x})} \\ A_{x_2\times(\bar{x}\times\bar{x})} \end{pmatrix} \cdot r_{\bar{x}\times\bar{x}} + \begin{pmatrix} A_{\bar{x}\times(x_1\times\bar{x})} \\ A_{\bar{x}\times(x_2\times\bar{x})} \end{pmatrix} \cdot r_{\bar{x}} \times l_{\bar{x}} + \begin{pmatrix} A_{\bar{x}\times(\bar{x}\times x_1)} \\ A_{\bar{x}\times(\bar{x}\times x_2)} \end{pmatrix} \cdot l_{\bar{x}} \times l_{\bar{x}}$$

Техника свободного дифференциального исчисления в свободных неассоциативных алгебрах

Пример дифференцирования группы мономов длины 3 с двумя образующими

$$\begin{pmatrix} A_{x_1\times(\bar{x}\times\bar{x})} \\ A_{x_2\times(\bar{x}\times\bar{x})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{x_1(x_1x_1)} & a_{x_1(x_2x_1)} \\ a_{x_1(x_1x_2)} & a_{x_1(x_2x_2)} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{x_2(x_1x_1)} & a_{x_2(x_2x_1)} \\ a_{x_2(x_1x_2)} & a_{x_2(x_2x_2)} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{x_1(x_1x_1)} & a_{x_1(x_2x_1)} & a_{x_1(x_1x_2)} & a_{x_1(x_2x_2)} \\ a_{x_2(x_1x_1)} & a_{x_2(x_2x_1)} & a_{x_2(x_1x_2)} & a_{x_2(x_2x_2)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{\bar{x}\times(x_1\times\bar{x})} \\ A_{\bar{x}\times(x_2\times\bar{x})} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{x_1(x_1x_1)} & a_{x_2(x_1x_1)} \\ a_{x_1(x_1x_2)} & a_{x_2(x_1x_2)} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{x_1(x_2x_1)} & a_{x_2(x_2x_1)} \\ a_{x_1(x_2x_2)} & a_{x_2(x_2x_2)} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{x_1(x_1x_1)} & a_{x_2(x_1x_1)} & a_{x_1(x_1x_2)} & a_{x_2(x_1x_2)} \\ a_{x_1(x_2x_1)} & a_{x_2(x_2x_1)} & a_{x_1(x_2x_2)} & a_{x_2(x_2x_2)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A_{\bar{x}\times(\bar{x}\times x_1)} \\ A_{\bar{x}\times(\bar{x}\times x_2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{x_1(x_1x_1)} & a_{x_2(x_1x_1)} \\ a_{x_1(x_2x_1)} & a_{x_2(x_2x_1)} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{x_1(x_1x_2)} & a_{x_2(x_1x_2)} \\ a_{x_1(x_2x_2)} & a_{x_2(x_2x_2)} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} a_{x_1(x_1x_1)} & a_{x_2(x_1x_1)} & a_{x_1(x_2x_1)} & a_{x_2(x_2x_1)} \\ a_{x_1(x_1x_2)} & a_{x_2(x_1x_2)} & a_{x_1(x_2x_2)} & a_{x_2(x_2x_2)} \end{pmatrix}$$

Так, дифференцирование 8 неассоциативных мономов с заданной скобочной структурой даёт нам 24 ассоциативных монома в выражениях частных производных

Критерий примитивности элемента длины 2

Приведённые выше рассуждения, позволяют нам сформулировать следующий критерий примитивности элементов длины 2 в терминах линейной алгебры.

Предложение

Элемент $h = a \cdot \bar{x} + B \cdot \bar{x} \otimes \bar{x}$, примитивен тогда и только тогда, когда ранг матрицы $\left(a \mid B \mid B^T\right)$ больше ранга матрицы $\left(B \mid B^T\right)$.

Доказательство.

Воспользуемся техникой свободного дифференциального исчисления и критерием примитивности.
Элемент примитивен тогда и только тогда, когда найдутся такие $m_1, m_2, \ldots, m_n \in U(A)$, что $m_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + m_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + m_n \frac{\partial}{\partial x_n} = 1.$

Матрица $\left(a \mid B \mid B^T\right)$ содержит n строк, где n – число свободных образующих. Каждая из строк матрицы соответствует представлению частной производной по одной из переменных в виде многомерных таблиц.

Задача определения примитивности сводится к алгоритму редукции, шагом которого является устранение старших мономов из производных за счёт других производных. Поскольку все старшие мономы l_{x_i} и r_{x_i} производных элементов длины 2 (в общем виде будем записывать op_{x_i}) могут быть получены, либо как $a \cdot op_{x_i} = b \cdot (c \cdot op_{x_i})$, либо как $a \cdot op_{x_i} = (b \cdot op_{x_i}) \cdot c$, то достаточно рассмотреть два случая.

Случай 1. Для редукции используется умножение производных на элементы $U(A)$ отличные от констант. В этом случае она из частных производных изначально должна быть константой, отличной от 0. По критерию примитивности элемент является примитивным.
Очевидно, что $\operatorname{rk}\left(a \mid B \mid B^T\right) > \operatorname{rk}\left(B \mid B^T\right)$, т. к. в матрице $\left(B \mid B^T\right)$ есть нулевая строка, а в векторе a в этой строке находится ненулевая константа.

Случай 2. Для редукции используется только умножение на элементы F.
В этом случае алгоритм редукции сводится к решению СЛАУ над полем F.

Воспользовавшись критерием Кронекера-Капелли, получаем доказательство утверждения. □

Признак примитивности

Полученный для элементов длины 2 критерий можно обобщить до признака примитивности элементов произвольной длины. Транспонирование матриц при этом заменяется на перестановку сторон таблиц коэффициентов. А вместо ранга матрицы рассматривать ранг системы векторов, составленных из элементов слоёв многомерных таблиц коэффициентов.
Под действие этого признака попадает только случай, когда производится только линейная редукция системы частных производных. Т. е. решается СЛАУ:

$$\alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + \alpha_n \frac{\partial}{\partial x_n} = 1, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F.$$

Оценка числа примитивных элементов с двумя образующими произвольной длины

Частные производные одной группы мономов

Проиллюстрируем алгоритм расчёта числа примитивных элементов на примере рассмотренной выше группы мономов $A_{\bar{x}\times(\bar{x}\times\bar{x})}\cdot\bar{x}\times(\bar{x}\times\bar{x})$. Пусть $\frac{\partial}{\partial x_2}=\alpha+t\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\alpha, t\in F$. Тогда

$$\begin{pmatrix} a_{x_1(x_1x_1)} & a_{x_1(x_2x_1)} & a_{x_1(x_1x_2)} & a_{x_1(x_2x_2)} \\ a_{x_2(x_1x_1)} & a_{x_2(x_2x_1)} & a_{x_2(x_1x_2)} & a_{x_2(x_2x_2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{x_1(x_1x_1)} & a_{x_1(x_2x_1)} & a_{x_1(x_1x_2)} & a_{x_1(x_2x_2)} \\ ta_{x_1(x_1x_1)} & ta_{x_1(x_2x_1)} & ta_{x_1(x_1x_2)} & ta_{x_1(x_2x_2)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{x_1(x_1x_1)} & a_{x_2(x_1x_1)} & a_{x_1(x_1x_2)} & a_{x_2(x_1x_2)} \\ a_{x_1(x_2x_1)} & a_{x_2(x_2x_1)} & a_{x_1(x_2x_2)} & a_{x_2(x_2x_2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{x_1(x_1x_1)} & a_{x_2(x_1x_1)} & a_{x_1(x_1x_2)} & a_{x_2(x_1x_2)} \\ ta_{x_1(x_1x_1)} & ta_{x_2(x_1x_1)} & ta_{x_1(x_1x_2)} & ta_{x_2(x_1x_2)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a_{x_1(x_1x_1)} & a_{x_2(x_1x_1)} & a_{x_1(x_2x_1)} & a_{x_2(x_2x_1)} \\ a_{x_1(x_1x_2)} & a_{x_2(x_1x_2)} & a_{x_1(x_2x_2)} & a_{x_2(x_2x_2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{x_1(x_1x_1)} & a_{x_2(x_1x_1)} & a_{x_1(x_2x_1)} & a_{x_2(x_2x_1)} \\ ta_{x_1(x_1x_1)} & ta_{x_2(x_1x_1)} & ta_{x_1(x_2x_1)} & ta_{x_2(x_2x_1)} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} a_{x_2(x_2x_2)} &= ta_{x_2(x_2x_1)} = t^2a_{x_1(x_2x_1)} \\ &= ta_{x_2(x_1x_2)} = t^2a_{x_2(x_1x_1)} \\ &= ta_{x_1(x_2x_2)} = t^2a_{x_1(x_1x_2)} = t^3a_{x_1(x_1x_1)}. \end{aligned}$$

Оценка числа примитивных элементов с двумя образующими произвольной длины

t – общий коэффициент пропорциональности между неединичными мономами частных производных. При выражении $a_{x_2(x_2x_2)}$ через другие коэффициенты его степень равна количеству x_1 в соответствующем коэффициенту мономе и обратно, если выражать $a_{x_1(x_1x_1)}$.

Это правило справедливо для мономов любой длины. Если матрица коэффициентов при какой либо группе мономов длины k записывается k-мерной таблицей $(a_{i_1i_2\ldots i_k})$, $i_j = 1..2$, то либо $a_{11\ldots 1} = \ldots = t^k a_{22\ldots 2}$, либо $a_{22\ldots 2} = \ldots = s^k a_{11\ldots 1}$.

Число Каталана C_{k-1} уравнений связывает коэффициенты при мономах длины k.

При мономах меньшей длины число уравнений равно $\sum\limits_{i=2}^{k-1} C_{i-1}$.

Всего $\sum\limits_{i=2}^{k} C_{i-1}$ уравнений связывает коэффициенты при мономах.

Оценка числа примитивных элементов с двумя образующими произвольной длины

Обозначим $S_2^k(q)$ – число примитивных элементов длины k свободной неассоциативной алгебры с двумя образующими над полем F_q.

$$S_2^k(q) \geqslant \left[\underbrace{(q-1)}_{t>0} \left(\underbrace{\left(q^{\sum\limits_{i=2}^{k} C_{i-1}} - 1 \right)}_{\text{хоть один не нулевой}} - \underbrace{\left(q^{\sum\limits_{i=2}^{k-1} C_{i-1}} - 1 \right)}_{\text{кроме нулевых длины } k} \right) + 2\left(q^{C_{k-1}} - 1\right) q^{\sum\limits_{i=2}^{k-1} C_{i-1}} \right] \cdot \underbrace{q(q-1)}_{\text{длины } 1} =$$

$$= q(q-1) \left[(q-1) \left(q^{\sum\limits_{i=2}^{k} C_{i-1}} - q^{\sum\limits_{i=2}^{k-1} C_{i-1}} \right) + 2q^{\sum\limits_{i=2}^{k} C_{i-1}} - 2q^{\sum\limits_{i=2}^{k} C_{i-1}} \right] =$$

$$= q(q-1) \left[q^{\sum\limits_{i=2}^{k} C_{i-1}} (q-1+2) - q^{\sum\limits_{i=2}^{k-1}} (q-1+2) \right] = q(q-1)(q+1) \left[q^{\sum\limits_{i=2}^{k} C_{i-1}} - q^{\sum\limits_{i=2}^{k-1}} \right] =$$

$$= q(q-1)(q+1) q^{\sum\limits_{i=2}^{k-1} C_{i-1}} \left(q^{C_{k-1}} - 1 \right)$$

Оценка числа примитивных элементов с двумя образующими произвольной длины

Итак, получена оценка:

$$S_2^k(q) \geqslant q(q-1)(q+1)q^{\sum\limits_{i=2}^{k-1} C_{i-1}} \left(q^{C_{k-1}} - 1\right).$$

В частности,
$S_2^2(q) = q(q-1)(q+1)q^0(q^1-1) = q(q-1)^2(q+1)$ (равенство – в силу того, что доказан критерий примитивности для элементов длины 2, которым мы воспользовались).
$S_2^3(q) \geqslant q(q-1)(q+1)q^1(q^2-1) = q^2(q-1)^2(q+1)^2$
$S_2^4(q) \geqslant q(q-1)(q+1)q^3(q^5-1) = q^4(q-1)(q+1)(q^5-1)$
$S_2^5(q) \geqslant q(q-1)(q+1)q^8(q^{14}-1) = q^9(q-1)(q+1)(q^{14}-1)$
Правая часть полученной оценки в случае длин 2 и 3 совпадает с формулами подсчёта таких элементов, полученными ранее А. А. Чеповским в диссертации [4].

Выводы

Рассмотренный подход упрощает восприятие свободных алгебр, что позволило в ходе работы получить следующие результаты:

- сформулирован критерий примитивности элементов длины 2 свободных неассоциативных алгебр, позволяющий методами линейной алгебры производить подсчёты примитивных элементов длины 2;
- дана оценка числа примитивных элементов с двумя образующими произвольной длины.

Введение дополнительных структур на описанных векторных пространствах согласованно с описанными подпространствами может дать дальнейшее продвижение в изучении примитивных элементов.

Список литературы

[1] В. А. Артамонов, А. В. Климаков, А. А. Михалёв, А. В. Михалёв, "Примитивные и почти примитивные элементы свободных алгебр шрайеровых многообразий", *Фундамент. и прикл. матем.*, **21**:2 (2016), 3–35; *J. Math. Sci.*, **237**:2 (2019), 157–179.

[2] А. Г. Курош, "Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр", *Матем. сб.*, **20(62)**:2 (1947), 239–262.

[3] А. А. Михалёв, А. В. Михалёв, А. А. Чеповский, К. Шампаньер, "Примитивные элементы свободных неассоциативных алгебр", *Фундамент. и прикл. матем.*, **13**:5 (2007), 171–192; *J. Math. Sci.*, **156**:2 (2009), 320–335.

[4] А.А.Чеповский., *Примитивные элементы алгебр шрайеровых многообразий*, дис. ... канд. физ.-мат. наук, Москва, 2011, 65 с.

[5] Alexander A. Mikhalev and Ualbai Umirbaev and Jie-Tai Yu, "Automorphic orbits in free non-associative algebras", *Journal of Algebra*, **243** (2001), 198–223.

[6] Alexander A. Mikhalev, Vladimir Shpilrain, and Jie-Tai Yu, *Combinatorial Methods: Free Groups, Polynomials, and Free Algebras*, CMS Books in Mathematics, Springer New York, 2004, ISBN: 9780387217246, 327 с.