Локально нильпотентные дифференцирования алгебры многочленов от 3 переменных.

Гайфуллин Сергей Александрович

МГУ, ВШЭ

7 ноября, 2022

Доклад основан на совместной работе с Nikhilesh Dasgupta.
(Работа в процессе.)
Работа поддержана грантом РНФ 22-41-02019.

Определение.

Пусть B – алгебра над полем $\mathbb{K}$ (ассоциативная, коммутативная, с единицей, без делителей нуля).
Локально нильпотентным дифференцированием (ЛНД) алгебры B называется линейный оператор $\delta\colon B \to B$, который

- удовлетворяет тождеству Лейбница, то есть

$$\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b$$

- для каждого $a \in A$ существует натуральное $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\delta^n(a) = 0$.

ЛНД неприводимо, если его образ не содержится ни в каком собственном главном идеале.

Связь с автоморфизмами.

Если δ – ЛНД, то

$$\exp(\delta) = \delta + \frac{\delta^2}{2!} + \frac{\delta^3}{3!} + \dots$$

является автоморфизмом алгебры. Этот автоморфизм включается в $\mathbb{G}_a$-подгруппу (то есть подгруппу, изоморфную аддитивной группе поля)

$$\{\exp(t\delta) | t \in \mathbb{K}\}.$$

Напротив, любая $\mathbb{G}_a$-подгруппа в $\mathrm{Aut}(X)$ получается таким образом из некоторого ЛНД.

Пусть $B = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Как выглядит любое дифференцирование?

Ответ: $\delta = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n}$

Пусть $B = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. Как выглядит любое ЛНД?

- $n = 1$. $\delta = c \frac{\partial}{\partial x}$.
- $n = 2$. Существует такая замена координат $\mathbb{K}[f, g] = \mathbb{K}[x, y]$, что $\delta = P(f) \frac{\partial}{\partial g}$. (Теорема Ренчлера.)
- $n \geq 3$. Нет столь же адекватного ответа.

При $n > 5$ ядро ЛНД может быть не конечно порожденной подалгеброй. При $n = 4$ не известно, может ли $\operatorname{Ker} \delta$ быть не конечно порожденным. При $n = 3$, $\operatorname{Ker} \delta \cong \mathbb{K}[x, y]$. (Теорема Маяниши.)

Треугольные ЛНД.

$$\delta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_1(x_1) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}) \end{pmatrix}$$

Ранг ЛНД

Пусть $\mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n] = \mathbb{K}[u_1, u_2, \ldots, u_n]$. Тогда называем $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ системой координат.

Определение.

Ранг ЛНД δ – это n минус минимум по всем системам координат количества координат в ядре δ.
Эквивалентно $\operatorname{rk}\delta$ равен минимуму количества слагаемых в записи

$$\delta = a_1\frac{\partial}{\partial u_1} + \ldots + a_k\frac{\partial}{\partial u_k}.$$

Если $\operatorname{rk}\delta = 0$, то $\delta = 0$.
Если $\operatorname{rk}\delta = 1$, то в некоторых координатах $\delta = f(u_2, \ldots, u_n)\frac{\partial}{\partial u_1}$.
Пусть $n = 3$. Вопрос, как устроены ЛНД ранга 2 и ранга 3.

Ранг 2.

$B = \mathbb{K}[x, y, z]$. Итерационная процедура построения ЛНД. Рассмотрим $\delta_1 = \frac{\partial}{\partial y}$, $\delta_2 = \frac{\partial}{\partial z}$. Будем строить

$$\delta_{i+2} = \frac{\sigma\delta_{i+1} + f(x)\delta_i}{g(x)}, \text{ где } \sigma \in \operatorname{Ker}\delta_{i+1}.$$

Теорема.

Любое неприводимое ЛНД δ такое, что $x \in \operatorname{Ker}\delta$ включается в цепочку неприводимых ЛНД $\delta_1, \ldots, \delta_l = \delta$, получаемых при помощи этой конструкции.

Определение.

Назовем уровнем (относительно системы координат) ЛНД δ длину этой цепочки, то есть l. Назовем универсальным уровнем данного ЛНД минимум по всем системам порождающих уровней относительно данной системы.

Ранг 2.

Теорема.

ЛНД является триангуляризуемым (то есть треугольное в некоторой системе координат) тогда и только тогда, когда его универсальный уровень не выше 3.

Можно провести некия явные выкладки, которые позволяют доказать, что универсальный уровень некоторых ЛНД ≥ 4. Например, таким образом можно доказать, что следующее ЛНД $\delta = \delta_4$ не триангуляризуемо.

$$\delta_1 = \frac{\partial}{\partial y}, \qquad \delta_2 = \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \delta_3 = y\delta_2 + x\delta_1 = y\frac{\partial}{\partial z} + x\frac{\partial}{\partial y},$$

$$\delta = \delta_4 = (2xz - y^2)\delta_3 + x\delta_2.$$

Ранг 3.

Теорема (Фройденбург 1996). ЛНД ранга 3 существует.
А именно. Положим $u = xz - y^2$, $v = zu^2 + 2x^2yu + x^5$.
Положим $\delta(f) = Jac(u, v, f)$. Тогда δ – ЛНД ранга 3.
Доказательство основано на том, что δ – однородное относительно некоторой $\mathbb{Z}$-градуировки.
Все известные примеры ЛНД ранга 3 однородны относительно некоторой градуировки.

Ранг 3.

Лемма.

Для любого ЛНД алгебры $B = \mathbb{K}[x, y, z]$ существует канонически определенная подалгебра $C = \mathbb{K}[p, q, r] \subseteq \mathbb{K}[x, y, z]$ для некоторых алгебраически независимых p, q, r такая, что $\delta|_C = h(p, q)\frac{\partial}{\partial r}$.

Предложение.

Если для неприводимого ЛНД нет неэквивалентных (непропорциональных) коммутирующих ЛНД, то оно ранга 3.

Лемма.

Для ЛНД $h(p, q)\frac{\partial}{\partial r}$ существует коммутирующее ЛНД тогда и только тогда, когда h – многочлен от некоторой координаты.

Ранг 3.

Теорема.

Путсть δ – неприводимое дифференцирование $B = \mathbb{K}[x, y, z]$.
Тогда δ – ЛНД ранга 3 тогда и только тогда, когда существуют многочлены $u, v, w \in B$ такие, что
1) $\delta(u) = \delta(v) = 0$.
2) $\delta(w) = Jac(u, v, w) = f(u, v)$, где $f(u, v) \in \mathbb{K}[u, v]$ – не многочлен от координаты.
3) $x, y, z \in \mathbb{K}[u, v, w, \frac{1}{f}]$.

Замечание, здесь получается, что $\delta(g) = Jac(u, v, g)$.

Ранг 3. Обобщение примера.

Фиксируем натуральные $m \geq 2$, $k \geq 1$ и многочлен от 2 переменных $F(t_1, t_2)$. Положим $u = xz - y^m$, $w = xF(x, u) + yu^k \in \mathbb{K}[x, y, z]$ Пусть

$$v = \frac{u^{km+1} + w^m}{x}.$$

Можно показать, что $v \in \mathbb{K}[x, y, z]$.
Положим $\delta(f) = Jac(u, v, f)$. Тогда δ – ЛНД ранга 3.
При $m = 2, k = 1, F = t_1^2$ получим пример Фройденбурга.