Свойства корней многочленов над алгебрами Кэли-Диксона

Жилина Светлана Александровна

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Механико-математический факультет,
кафедра Высшей алгебры

Московский центр фундаментальной и прикладной математики

7 ноября 2022 года

Доклад основан на работе:
A. Chapman, A. Guterman, S. Vishkautsan, S. Zhilina, *Roots and critical points of polynomials over Cayley-Dickson algebras*, Comm. Algebra (2022).

Процедура Кэли-Диксона

Определение 1

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра над полем $\mathbb{F}$ с сопряжением $a \mapsto \bar{a}$. Алгебра $\mathcal{A}\{\gamma\}$, полученная из $\mathcal{A}$ применением процедуры Кэли-Диксона *с параметром $\gamma \in \mathbb{F}$, $\gamma \neq 0$, определяется как $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ со стандартным сложением, а также умножением и сопряжением*

$$(a, b)(c, d) = (ac + \gamma \bar{d} b, da + b\bar{c}),$$

$$\overline{(a, b)} = (\bar{a}, -b), \qquad a, b, c, d \in \mathcal{A}.$$

Процедура Кэли-Диксона

Определение 1

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра над полем $\mathbb{F}$ с сопряжением $a \mapsto \bar{a}$. Алгебра $\mathcal{A}\{\gamma\}$, полученная из $\mathcal{A}$ применением процедуры Кэли-Диксона *с параметром $\gamma \in \mathbb{F}$, $\gamma \neq 0$, определяется как $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$ со стандартным сложением, а также умножением и сопряжением*

$$(a, b)(c, d) = (ac + \gamma \bar{d} b, da + b\bar{c}),$$

$$\overline{(a, b)} = (\bar{a}, -b), \qquad a, b, c, d \in \mathcal{A}.$$

Предложение 2

Если $\mathcal{A}$ унитальна и сопряжение на $\mathcal{A}$ регулярно, *то есть $\forall\, a \in \mathcal{A}$* след *$t(a) = a + \bar{a} \in \mathbb{F}1_{\mathcal{A}}$ и* норма *$n(a) = a\bar{a} = \bar{a}a \in \mathbb{F}1_{\mathcal{A}}$, то сопряжение на $\mathcal{A}\{\gamma\}$ также регулярно и $\forall\,(a, b) \in \mathcal{A}\{\gamma\}$*

$$t((a, b)) = t(a),$$

$$n((a, b)) = n(a) - \gamma n(b).$$

Алгебры Кэли-Диксона

Положим $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1[\mu\} = \mathbb{F} + \mathbb{F}\ell_1$, где

$$\ell_1^2 = \ell_1 + \mu, \qquad \mu \in \mathbb{F},\ 4\mu + 1 \neq 0,$$

$$\overline{\alpha + \beta\ell_1} = (\alpha + \beta) - \beta\ell_1, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{F}.$$

Алгебры Кэли-Диксона

Положим $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1[\mu\} = \mathbb{F} + \mathbb{F}\ell_1$, где

$$\ell_1^2 = \ell_1 + \mu, \qquad \mu \in \mathbb{F},\ 4\mu + 1 \neq 0,$$
$$\overline{\alpha + \beta\ell_1} = (\alpha + \beta) - \beta\ell_1, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{F}.$$

Определение 3

Пусть $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Алгебрами Кэли-Диксона *над* $\mathbb{F}$ *называется такая последовательность алгебр* $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *что*

$$\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_{n+1}[\mu, \gamma_1, \ldots, \gamma_n\} = (\mathcal{A}_n[\mu, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}\})\{\gamma_n\}.$$

Алгебры Кэли-Диксона

Положим $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_1[\mu\} = \mathbb{F} + \mathbb{F}\ell_1$, где

$$\ell_1^2 = \ell_1 + \mu, \qquad \mu \in \mathbb{F},\ 4\mu + 1 \neq 0,$$
$$\overline{\alpha + \beta\ell_1} = (\alpha + \beta) - \beta\ell_1, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{F}.$$

Определение 3

Пусть $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Алгебрами Кэли-Диксона *над* $\mathbb{F}$ *называется такая последовательность алгебр* $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, *что*

$$\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_{n+1}[\mu, \gamma_1, \ldots, \gamma_n\} = (\mathcal{A}_n[\mu, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}\})\{\gamma_n\}.$$

Замечание 4

Если $\operatorname{char}\mathbb{F} \neq 2$, *то* $\mathcal{A}_1 \cong \mathbb{F}\{\gamma_0\}$, *где* $\gamma_0 = (4\mu + 1)/4 \neq 0$. *Значит, можно положить* $\mathcal{A}_0 = \mathbb{F}$, *и для* $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{F} \setminus \{0\}$ *алгебры* $\{\mathcal{A}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *определяются как*

$$\mathcal{A}_{n+1} = \mathcal{A}_{n+1}\{\gamma_0, \ldots, \gamma_n\} = (\mathcal{A}_n\{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}\})\{\gamma_n\}.$$

Свойства алгебр Кэли-Диксона

Алгебра $\mathcal{A}$ называется

- *альтернативной*, если $(aa)b = a(ab)$ и $b(aa) = (ba)a$ $\forall\, a, b \in \mathcal{A}$,
- *гибкой*, если $(ab)a = a(ba)$ $\forall\, a, b \in \mathcal{A}$.

Свойства алгебр Кэли-Диксона

Алгебра $\mathcal{A}$ называется

- *альтернативной*, если $(aa)b = a(ab)$ и $b(aa) = (ba)a$ $\forall\, a, b \in \mathcal{A}$,
- *гибкой*, если $(ab)a = a(ba)$ $\forall\, a, b \in \mathcal{A}$.

Основные свойства алгебр Кэли-Диксона таковы:

- $\mathcal{A}_n$ коммутативна $\Leftrightarrow n \leq 1$,
- $\mathcal{A}_n$ ассоциативна $\Leftrightarrow n \leq 2$,
- $\mathcal{A}_n$ альтернативна $\Leftrightarrow n \leq 3$,
- $\mathcal{A}_n$ всегда гибкая.

Свойства алгебр Кэли-Диксона

Алгебра $\mathcal{A}$ называется

- *альтернативной*, если $(aa)b = a(ab)$ и $b(aa) = (ba)a$ $\forall\, a, b \in \mathcal{A}$,
- *гибкой*, если $(ab)a = a(ba)$ $\forall\, a, b \in \mathcal{A}$.

Основные свойства алгебр Кэли-Диксона таковы:

- $\mathcal{A}_n$ коммутативна $\Leftrightarrow n \leq 1$,
- $\mathcal{A}_n$ ассоциативна $\Leftrightarrow n \leq 2$,
- $\mathcal{A}_n$ альтернативна $\Leftrightarrow n \leq 3$,
- $\mathcal{A}_n$ всегда гибкая.

При $n \leq 3$ алгебра $\mathcal{A}_n$ *композиционна*, то есть $n(ab) = n(a)n(b)$ $\forall a, b \in \mathcal{A}_n$, и квадратичная форма $n(\cdot)$ строго невырождена. Следовательно, $a \in \mathcal{A}_n$ является делителем нуля $\Leftrightarrow n(a) = 0$. Однако при $n \geq 4$ в $\mathcal{A}_n$ есть делители нуля, даже когда норма на $\mathcal{A}_n$ анизотропна.

Кольца многочленов над алгебрами Кэли-Диксона

Определение 5

Кольцо многочленов над $\mathcal{A}_n$ — это $\mathcal{A}_n[x] = \mathcal{A}_n \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[x]$.

Заметим, что $\mathcal{A}_n[x] \subset \mathcal{A}_n \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}(x)$, где $\mathcal{A}_n \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}(x)$ — алгебра Кэли-Диксона над полем рациональных функций $\mathbb{F}(x)$ над $\mathbb{F}$. Следовательно, элемент x — центральный в $\mathcal{A}_n[x]$, то есть коммутирует и ассоциирует со всеми элементами $\mathcal{A}_n[x]$.

Кольца многочленов над алгебрами Кэли-Диксона

Определение 5

Кольцо многочленов над $\mathcal{A}_n$ — это $\mathcal{A}_n[x] = \mathcal{A}_n \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[x]$.

Заметим, что $\mathcal{A}_n[x] \subset \mathcal{A}_n \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}(x)$, где $\mathcal{A}_n \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}(x)$ — алгебра Кэли-Диксона над полем рациональных функций $\mathbb{F}(x)$ над $\mathbb{F}$. Следовательно, элемент x — центральный в $\mathcal{A}_n[x]$, то есть коммутирует и ассоциирует со всеми элементами $\mathcal{A}_n[x]$.

Любой $f(x) \in \mathcal{A}_n[x]$ представим как $f(x) = \sum_{l=0}^{m} a_l x^l$, $a_l \in \mathcal{A}_n$. Для всех $b \in \mathcal{A}_n$ положим $f(b) = \sum_{l=0}^{m} a_l b^l$.

Кольца многочленов над алгебрами Кэли-Диксона

Определение 5

Кольцо многочленов над $\mathcal{A}_n$ — это $\mathcal{A}_n[x] = \mathcal{A}_n \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}[x]$.

Заметим, что $\mathcal{A}_n[x] \subset \mathcal{A}_n \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}(x)$, где $\mathcal{A}_n \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}(x)$ — алгебра Кэли-Диксона над полем рациональных функций $\mathbb{F}(x)$ над $\mathbb{F}$. Следовательно, элемент x — центральный в $\mathcal{A}_n[x]$, то есть коммутирует и ассоциирует со всеми элементами $\mathcal{A}_n[x]$.

Любой $f(x) \in \mathcal{A}_n[x]$ представим как $f(x) = \sum_{l=0}^{m} a_l x^l$, $a_l \in \mathcal{A}_n$. Для всех $b \in \mathcal{A}_n$ положим $f(b) = \sum_{l=0}^{m} a_l b^l$.

Замечание 6

Так как $\mathcal{A}_n$ некоммутативна при $n \geq 2$, для $f(x), g(x) \in \mathcal{A}_n[x]$ и $a \in \mathcal{A}_n$ может быть выполнено $(fg)(a) \neq f(a)g(a)$.

Корни сопровождающего многочлена

Обозначим $\overline{f(x)} = \sum_{l=0}^{m} \overline{a_l} x^l$. *Сопровождающим многочленом* для $f(x)$ называется $C_f(x) = \overline{f(x)} \cdot f(x) = n(f(x)) \in \mathbb{F}[x]$.

Корни сопровождающего многочлена

Обозначим $\overline{f(x)} = \sum_{l=0}^{m} \overline{a_l} x^l$. *Сопровождающим многочленом* для $f(x)$ называется $C_f(x) = \overline{f(x)} \cdot f(x) = n(f(x)) \in \mathbb{F}[x]$.

Цель: изучение связи между корнями $f(x)$, $f'(x)$ и $C_f(x)$.

Корни сопровождающего многочлена

Обозначим $\overline{f(x)} = \sum_{l=0}^{m} \overline{a_l} x^l$. *Сопровождающим многочленом* для $f(x)$ называется $C_f(x) = \overline{f(x)} \cdot f(x) = n(f(x)) \in \mathbb{F}[x]$.

Цель: изучение связи между корнями $f(x)$, $f'(x)$ и $C_f(x)$.

Предложение 7 (Chapman, 2020)

При $n \leq 3$ корни $f(x)$ являются корнями $C_f(x)$.

Корни сопровождающего многочлена

Обозначим $\overline{f(x)} = \sum_{l=0}^{m} \overline{a_l} x^l$. *Сопровождающим многочленом* для $f(x)$ называется $C_f(x) = \overline{f(x)} \cdot f(x) = n(f(x)) \in \mathbb{F}[x]$.

Цель: изучение связи между корнями $f(x)$, $f'(x)$ и $C_f(x)$.

Предложение 7 (Chapman, 2020)

При $n \leq 3$ корни $f(x)$ являются корнями $C_f(x)$.

Однако в общем случае предложение 7 не выполняется.

Пример 8

Рассмотрим $\mathcal{A}_n\{-1,-1,-1,-1\}$ над полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$, со стандартным базисом $\{e_m \mid m = 0, \ldots, 15\}$. Положим $a = e_1 + e_{10}$ и $b = e_7 + e_{12}$, и пусть $f(x) = ax$, $C_f(x) = 2x^2$. Тогда $f(b) = ab = 0$, но $C_f(b) = -4 \neq 0$.

Сферические корни многочлена

Характеристическим многочленом для $a \in \mathcal{A}_n$ называется $p_a(x) = x^2 - t(a)x + n(a) \in \mathbb{F}[x]$, причём $p_a(a) = 0$.

Предложение 9

Пусть $a, b \in \mathcal{A}_n$, $b \notin \mathbb{F}$. *Тогда* $p_a(x) = p_b(x) \;\Leftrightarrow\; p_a(b) = 0$.

Сферические корни многочлена

Характеристическим многочленом для $a \in \mathcal{A}_n$ называется $p_a(x) = x^2 - t(a)x + n(a) \in \mathbb{F}[x]$, причём $p_a(a) = 0$.

Предложение 9

Пусть $a, b \in \mathcal{A}_n$, $b \notin \mathbb{F}$. *Тогда* $p_a(x) = p_b(x) \ \Leftrightarrow\ p_a(b) = 0$.

Корень $a \notin \mathbb{F}$ называется *сферическим* для $f(x) \in \mathcal{A}_n[x]$, если любое такое $b \in \mathcal{A}_n$, что $p_a(b) = 0$, также является корнем $f(x)$.

Сферические корни многочлена

Характеристическим многочленом для $a \in \mathcal{A}_n$ называется $p_a(x) = x^2 - t(a)x + n(a) \in \mathbb{F}[x]$, причём $p_a(a) = 0$.

Предложение 9

Пусть $a, b \in \mathcal{A}_n$, $b \notin \mathbb{F}$. Тогда $p_a(x) = p_b(x) \;\Leftrightarrow\; p_a(b) = 0$.

Корень $a \notin \mathbb{F}$ называется *сферическим* для $f(x) \in \mathcal{A}_n[x]$, если любое такое $b \in \mathcal{A}_n$, что $p_a(b) = 0$, также является корнем $f(x)$.

Теорема 10

Элемент $a \in \mathcal{A}_n \setminus \mathbb{F}$ — сферический корень для $f(x) \in \mathcal{A}_n[x] \Leftrightarrow$ $f(x) = g(x)p_a(x)$ для некоторого $g(x) \in \mathcal{A}_n[x]$.

Поиск сферических корней

Теорема 11

Если $a \in \mathcal{A}_n \setminus \mathbb{F}$ *— сферический корень для* $f(x) \in \mathcal{A}_n[x]$*, то* a *является также корнем для* $C_f(x)$*.*

Поиск сферических корней

Теорема 11

Если $a \in \mathcal{A}_n \setminus \mathbb{F}$ — сферический корень для $f(x) \in \mathcal{A}_n[x]$, то a является также корнем для $C_f(x)$.

Доказательство.

По теореме 10, $f(x) = g(x)p_a(x)$. Тогда $C_f(x) = \overline{f(x)} \cdot f(x) = (p_a(x)\overline{g(x)}) \cdot (g(x)p_a(x)) = \overline{g(x)} \cdot g(x) \cdot (p_a(x))^2$. □

Поиск сферических корней

Теорема 11

Если $a \in \mathcal{A}_n \setminus \mathbb{F}$ — сферический корень для $f(x) \in \mathcal{A}_n[x]$, то a является также корнем для $C_f(x)$.

Доказательство.

По теореме 10, $f(x) = g(x)p_a(x)$. Тогда $C_f(x) = \overline{f(x)} \cdot f(x) = (p_a(x)\overline{g(x)}) \cdot (g(x)p_a(x)) = \overline{g(x)} \cdot g(x) \cdot (p_a(x))^2$. □

Алгоритм поиска сферических корней для $f(x) \in \mathcal{A}_n[x]$:

(1) Найти в $\mathbb{F}[x]$ все многочлены степени 2 со старшим коэффициентом 1, которые делят $C_f(x)$.

(2) Для каждого такого многочлена $p(x)$ выбрать такой элемент $a \in \mathcal{A}_n \setminus \mathbb{F}$, что $p(x) = p_a(x)$, если это возможно.

(3) Элемент a — сферический корень для $f(x)$, если и только если остаток от деления $f(x)$ на $p_a(x)$ равен нулю.

Вещественные алгебры Кэли-Диксона

Если $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, то $\mathcal{A}_n\{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}\} \cong \mathcal{A}_n\{\mathrm{sgn}(\gamma_0), \ldots, \mathrm{sgn}(\gamma_{n-1})\}$, поэтому достаточно рассматривать $\gamma_k \in \{\pm 1\}$, $k = 0, \ldots, n-1$.

Вещественные алгебры Кэли-Диксона

Если $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, то $\mathcal{A}_n\{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}\} \cong \mathcal{A}_n\{\mathrm{sgn}(\gamma_0), \ldots, \mathrm{sgn}(\gamma_{n-1})\}$, поэтому достаточно рассматривать $\gamma_k \in \{\pm 1\}$, $k = 0, \ldots, n-1$.

При $\gamma_0 = \cdots = \gamma_{n-1} = -1$ алгебра $\mathcal{A}_n = \mathcal{M}_n = \mathcal{M}_{n-1}\{-1\}$ называется алгеброй *главной последовательности*. Норма на $\mathcal{M}_n$ — квадрат евклидовой нормы.

Вещественные алгебры Кэли-Диксона

Если $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, то $\mathcal{A}_n\{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}\} \cong \mathcal{A}_n\{\mathrm{sgn}(\gamma_0), \ldots, \mathrm{sgn}(\gamma_{n-1})\}$, поэтому достаточно рассматривать $\gamma_k \in \{\pm 1\}$, $k = 0, \ldots, n-1$.

При $\gamma_0 = \cdots = \gamma_{n-1} = -1$ алгебра $\mathcal{A}_n = \mathcal{M}_n = \mathcal{M}_{n-1}\{-1\}$ называется алгеброй *главной последовательности*. Норма на $\mathcal{M}_n$ — квадрат евклидовой нормы.

- Комплексные числа: $\mathbb{C} \cong \mathcal{M}_1$;
- Кватернионы: $\mathbb{H} \cong \mathcal{M}_2$;
- Октонионы: $\mathbb{O} \cong \mathcal{M}_3$;
- Седенионы: $\mathbb{S} \cong \mathcal{M}_4$;

Вещественные алгебры Кэли-Диксона

Если $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, то $\mathcal{A}_n\{\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}\} \cong \mathcal{A}_n\{\mathrm{sgn}(\gamma_0), \ldots, \mathrm{sgn}(\gamma_{n-1})\}$, поэтому достаточно рассматривать $\gamma_k \in \{\pm 1\}$, $k = 0, \ldots, n-1$.

При $\gamma_0 = \cdots = \gamma_{n-1} = -1$ алгебра $\mathcal{A}_n = \mathcal{M}_n = \mathcal{M}_{n-1}\{-1\}$ называется алгеброй *главной последовательности*. Норма на $\mathcal{M}_n$ — квадрат евклидовой нормы.

- Комплексные числа: $\mathbb{C} \cong \mathcal{M}_1$;
- Кватернионы: $\mathbb{H} \cong \mathcal{M}_2$;
- Октонионы: $\mathbb{O} \cong \mathcal{M}_3$;
- Седенионы: $\mathbb{S} \cong \mathcal{M}_4$;

Предложение 12

Алгебра $\mathcal{M}_n$ локально комплексна, то есть $\forall a \in \mathcal{M}_n \setminus \mathbb{R}$ подалгебра $\mathbb{C}_a = \mathbb{R}[a]$ изоморфна $\mathbb{C}$.

Теорема Гаусса-Лукаса

Классическая теорема Гаусса–Лукаса утверждает, что если $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ и $\deg f \geq 1$, то корни $f'(x)$ содержатся в выпуклой оболочке корней $f(x)$.

Мы хотим обобщить её на случай произвольной алгебры главной последовательности $\mathcal{M}_n$. Однако, как показали Ghiloni и Perotti, уже в $\mathbb{H}[x]$ это утверждение не выполняется.

Теорема Гаусса-Лукаса

Классическая теорема Гаусса–Лукаса утверждает, что если $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ и $\deg f \geq 1$, то корни $f'(x)$ содержатся в выпуклой оболочке корней $f(x)$.

Мы хотим обобщить её на случай произвольной алгебры главной последовательности $\mathcal{M}_n$. Однако, как показали Ghiloni и Perotti, уже в $\mathbb{H}[x]$ это утверждение не выполняется.

Для $a \in \mathcal{M}_n \setminus \mathbb{R}$ и $f(x) \in \mathcal{M}_n[x]$ обозначим

$$\begin{aligned} f_a &= \mathrm{Pr}_{\mathbb{C}_a} f \in \mathbb{C}_a[x], \\ f_a^{\perp} &= \mathrm{Pr}_{\mathbb{C}_a^{\perp}} f \in \mathbb{C}_a^{\perp}[x]. \end{aligned}$$

Теорема Гаусса-Лукаса

Классическая теорема Гаусса–Лукаса утверждает, что если $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ и $\deg f \geq 1$, то корни $f'(x)$ содержатся в выпуклой оболочке корней $f(x)$.

Мы хотим обобщить её на случай произвольной алгебры главной последовательности $\mathcal{M}_n$. Однако, как показали Ghiloni и Perotti, уже в $\mathbb{H}[x]$ это утверждение не выполняется.

Для $a \in \mathcal{M}_n \setminus \mathbb{R}$ и $f(x) \in \mathcal{M}_n[x]$ обозначим

$$\begin{aligned} f_a &= \mathrm{Pr}_{\mathbb{C}_a} f \in \mathbb{C}_a[x], \\ f_a^{\perp} &= \mathrm{Pr}_{\mathbb{C}_a^{\perp}} f \in \mathbb{C}_a^{\perp}[x]. \end{aligned}$$

Лемма 13

Для любого $b \in \mathbb{C}_a$ выполнено $f_a(b) \in \mathbb{C}_a$ и $f_a^{\perp}(b) \in \mathbb{C}_a^{\perp}$. Значит, $f(b) = 0 \;\Leftrightarrow\; f_a(b) = f_a^{\perp}(b) = 0$.

Теорема Гаусса-Лукаса для сферических корней

Теорема 14

Если $f(x) \in \mathcal{M}_n[x]$ *и* $\deg f \geq 1$, *то сферические корни* $f'(x)$ *содержатся в выпуклой оболочке корней* $C_f(x)$.

Теорема Гаусса-Лукаса для сферических корней

Теорема 14

Если $f(x) \in \mathcal{M}_n[x]$ и $\deg f \geq 1$, то сферические корни $f'(x)$ содержатся в выпуклой оболочке корней $C_f(x)$.

Доказательство.

Пусть b — сферический корень $f'(x)$. По теореме 10, $f'(x) = g(x)p_b(x)$. Тогда $C_f'(x) = \overline{f'(x)}f(x) + \overline{f(x)}f'(x) = \overline{g(x)p_b(x)} \cdot f(x) + \overline{f(x)}g(x)p_b(x) = (\overline{g(x)}f(x) + \overline{f(x)}g(x))p_b(x)$. Значит, b — корень $C_f'(x)$. Элемент b содержится в некотором $\mathbb{C}_a$, а значит, по теореме Гаусса-Лукаса, b лежит в выпуклой оболочке корней $C_f(x)$ в $\mathbb{C}_a$. Ясно, что эта выпуклая оболочка содержится в выпуклой оболочке всех корней $C_f(x)$ в $\mathcal{M}_n$. $\square$

Теорема Гаусса-Лукаса для улитки

Определение 15 (Ghiloni, Perotti, 2018)

Улиткой Гаусса–Лукаса *для* $f(x) \in \mathcal{M}_n[x]$ *называется*

$$\operatorname{sn}(f) = \bigcup_{a \in \mathcal{M}_n \setminus \mathbb{R}} K_{\mathbb{C}_a}(f_a), \qquad \text{где}$$

$$K_{\mathbb{C}_a}(f_a) = \begin{cases} \operatorname{conv}\{b \in \mathbb{C}_a \mid f_a(b) = 0\}, & \deg f_a \geq 1; \\ \mathbb{C}_a, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема Гаусса-Лукаса для улитки

Определение 15 (Ghiloni, Perotti, 2018)

Улиткой Гаусса–Лукаса *для* $f(x) \in \mathcal{M}_n[x]$ *называется*

$$\mathrm{sn}(f) = \bigcup_{a \in \mathcal{M}_n \setminus \mathbb{R}} K_{\mathbb{C}_a}(f_a), \qquad \text{где}$$

$$K_{\mathbb{C}_a}(f_a) = \begin{cases} \mathrm{conv}\{b \in \mathbb{C}_a \mid f_a(b) = 0\}, & \deg f_a \geq 1; \\ \mathbb{C}_a, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема 16

Если $f(x) \in \mathcal{M}_n[x]$, *то корни* $f'(x)$ *содержатся в* $\mathrm{sn}(f)$.

Теорема Гаусса-Лукаса для улитки

Определение 15 (Ghiloni, Perotti, 2018)

Улиткой Гаусса–Лукаса *для* $f(x) \in \mathcal{M}_n[x]$ *называется*

$$\mathrm{sn}(f) = \bigcup_{a \in \mathcal{M}_n \setminus \mathbb{R}} K_{\mathbb{C}_a}(f_a), \qquad \text{где}$$

$$K_{\mathbb{C}_a}(f_a) = \begin{cases} \mathrm{conv}\{b \in \mathbb{C}_a \mid f_a(b) = 0\}, & \deg f_a \geq 1; \\ \mathbb{C}_a, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Теорема 16

Если $f(x) \in \mathcal{M}_n[x]$, *то корни* $f'(x)$ *содержатся в* $\mathrm{sn}(f)$.

Доказательство.

Пусть b — корень $f'(x)$. Тогда b содержится в некотором $\mathbb{C}_a$, а значит, является также корнем $f_a'(x)$. Нетрудно проверить, что $f_a'(x) = (f_a(x))'$. Значит, по теореме Гаусса-Лукаса, b содержится в выпуклой оболочке корней $f_a(x)$. □

Открытые вопросы

- Какой вид может принимать улитка Гаусса-Лукаса для произвольного многочлена из $\mathcal{M}_n[x]$? Известно, что для монического многочлена улитка Гаусса-Лукаса — компактное множество, однако в общем случае это не так.

Открытые вопросы

- Какой вид может принимать улитка Гаусса-Лукаса для произвольного многочлена из $\mathcal{M}_n[x]$? Известно, что для монического многочлена улитка Гаусса-Лукаса — компактное множество, однако в общем случае это не так.
- Над $\mathbb{C}$ имеет место следующий факт: если выпуклая оболочка корней $f(x)$ не является отрезком, то любой корень $f'(x)$ либо является её внутренней точкой, либо является также корнем $f(x)$. Обобщается ли он на случай произвольного $\mathcal{M}_n[x]$?

Открытые вопросы

- Какой вид может принимать улитка Гаусса-Лукаса для произвольного многочлена из $\mathcal{M}_n[x]$? Известно, что для монического многочлена улитка Гаусса-Лукаса — компактное множество, однако в общем случае это не так.
- Над $\mathbb{C}$ имеет место следующий факт: если выпуклая оболочка корней $f(x)$ не является отрезком, то любой корень $f'(x)$ либо является её внутренней точкой, либо является также корнем $f(x)$. Обобщается ли он на случай произвольного $\mathcal{M}_n[x]$?
- Многочлен $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ делится на $f'(x)$, если и только если $f(x) = c(x-a)^n$ для некоторых $a, c \in \mathbb{C}$, $c \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Это можно перефразировать так: все корни $f'(x)$ являются корнями $f(x)$, если и только если $f(x) = c(x-a)^n$. Однако уже в $\mathbb{H}[x]$ это утверждение неверно. Существует ли похожий критерий для произвольного $f(x) \in \mathcal{M}_n[x]$?

Библиография

[1] M. Brešar, P. Šemrl, Š. Špenko, *On locally complex algebras and low-dimensional Cayley-Dickson algebras*, J. Algebra, **327**(1):107–125 (2011).

[2] A. Chapman, *Polynomial equations over octonion algebras*, J. Algebra Appl., **19**(6):10 (2020), 2050102.

[3] A. Chapman, A. Guterman, S. Vishkautsan, S. Zhilina, *Roots and critical points of polynomials over Cayley-Dickson algebras*, Comm. Algebra (2022). DOI: 10.1080/00927872.2022.2134885

[4] R. Ghiloni, A. Perotti, *The quaternionic Gauss-Lucas theorem*, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **197**(6):1679–1686 (2018).

Спасибо за внимание!

E-mail: s.a.zhilina@gmail.com