Спектральные свойства транспозиционного графа T_n

Артем Кравчук
Новосибирский Государственный Университет

совместная работа с Константиновой Е.В.

Вторая конференция Математических центров

Москва, Россия
7-11 ноября 2022

План

Введение

Определение

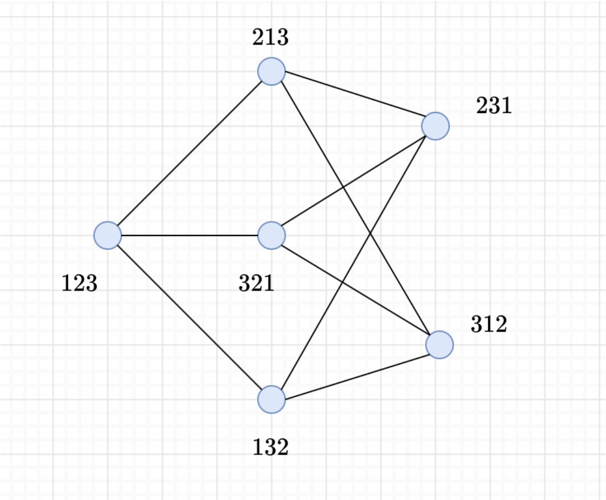
Рассмотрим конечную группу G с порождающим множеством $S \subset G$. S свободно от единичного элемента, т.е. $e \notin S$ и симметрично, т.е. из $s \in S$ следует $s^{-1} \in S$. Графом Кэли $\Gamma = Cay(G, S) = (V, E)$ на группе G относительно порождающего множества S называется граф с множеством вершин $V = G$ и множеством ребер $E = \{\{g, h\} : g, h \in G, g^{-1}h \in S\}$.

Определение

Транспозиционный граф $T_n = Cay(Sym_n, T)$ на группе Sym_n определяется относительно порождающего множества T всех транспозиций, т.е. $T = \{t_{ij} \in Sym_n, 1 \leq i < j \leq n\}$.

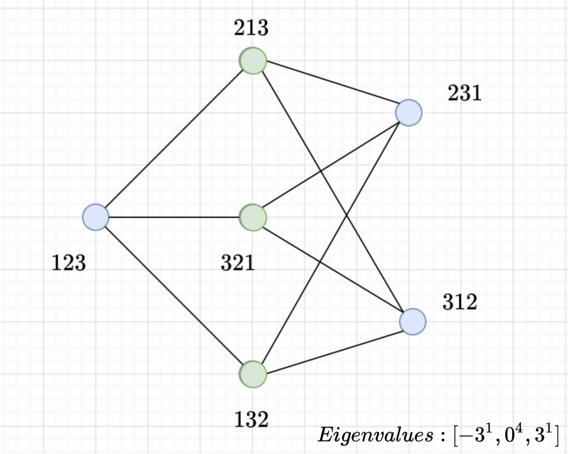
Введение

Пример: граф T_3 на симметрической группе Sym_3 относительно порождающего множества $T = \{(12), (13), (23)\}$.



Свойства T_n[1]

- Связный
- Двудольный
- $\binom{n}{2}$-регулярный
- Порядок $n!$
- Целочисленный



[1] E. V. Konstantinova, Some problems on Cayley graphs, *Linear Algebra and its Applications*, **429** (11-12) (2008) 2754-2769.

Введение

Определение

Разбиением натурального числа n называется представление $(n_1, \ldots, n_k)$, $n_i \in \mathbb{N}$ числа n такое, что $n = n_1 + \cdots + n_k$ и $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k$. Обозначается как $(n_1, \ldots, n_k) \vdash n$.

Теорема

Пусть $\mathbf{i} = (n_1, \ldots, n_k) \vdash n$. Тогда

$$\lambda_{\mathbf{i}} = \sum_{j=1}^{k} \frac{n_j(n_j - 2j + 1)}{2} \in Spec(T_n) \tag{1}$$

Теорема [2]

Спектр транспозиционного графа $T_n, n \geqslant 2$ состоит из целых чисел, наибольшее собственное значение равно $\frac{n(n-1)}{2}$ с кратностью 1; второе по величине собственное значение равно $\frac{n(n-3)}{2}$ с кратностью $(n-1)^2$; для каждого $k, 3 \leqslant k \leqslant n$, значение $\frac{n(n-2k+1)}{2}$ лежит в спектре T_n с кратностью не меньше $\frac{n!}{n(n-k)!(k-i)!}$.

[2] K. Kalpakis, Y. Yesha, On the bisection Width of the Transposition network (Lemma 3), *Networks*, **29** (1997) 69–76.

О первых собственных значениях T_n

Теорема 1 [3]

Для любого целого $k \geqslant 0$ существует целое $n(k)$, такое что для любого целого $n \geqslant n(k)$ и любого $m \in \{0, \ldots, k\}$, $m \in Spec(T_n)$.

[3] *Elena V. Konstantinova, Artem Kravchuk*, Spectrum of the Transposition graph, *Linear Algebra and its Applications*, **654** (2022) 379–389

О первых собственных значениях T_n

Лемма 1 [Собственное значение 0]

Для любого нечетного целого $n \geqslant 1$ разбиение $\left(\frac{n+1}{2}, 1 \times \frac{n-1}{2}\right)$ соответствует собственному числу 0 графа T_n. Для любого четного целого $n \geqslant 4$ разбиение $\left(\frac{n}{2}, 2, 1 \times \frac{n-4}{2}\right)$ соответствует собственному числу 0 графа T_n.

Лемма 2 [Собственное значение 1]

Для любого нечетного целого $n \geqslant 7$ разбиение $\left(\frac{n-1}{2}, 3, 1 \times \frac{n-5}{2}\right)$ соответствует собственному значению 1 графа T_n. Для любого четного $n \geqslant 14$ разбиение $\left(\frac{n-6}{2}, 4, 4, 2, 1 \times \frac{n-14}{2}\right)$ соответствует собственному значению 1 графа T_n.

О первых собственных значениях T_n

Лемма 3

Если $n \geqslant 7$ нечетное, то разбиение $(\frac{n-2\lambda+1}{2}, \lambda+2, 2\times(\lambda-1), 1\times\frac{n-4\lambda-1}{2})$ соответствует собственному значению $\lambda \in \mathbb{N}$ при $1 \leqslant \lambda \leqslant \frac{n-3}{4}$.

Лемма 4

Если $n \geqslant 14$ четное, разбиение $(\frac{n-6\lambda}{2}, 2\lambda+2, \lambda+3, 3\times(\lambda-1), 2\times\lambda, 1\times\frac{n-10\lambda-4}{2})$ соответствует собственному значению $\lambda \in \mathbb{N}$, при $1 \leqslant \lambda \leqslant \frac{n-4}{10}$.

О первых собственных значениях T_n

Теорема 1

Для любого целого $k \geqslant 0$ существует целое $n(k)$, такое что для любого целого $n \geqslant n(k)$ и любого $m \in \{0, \ldots, k\}$, $m \in Spec(T_n)$.

Эскиз доказательства

- Фиксируем произвольное целое k;
- $0 \in Spec(T_n)$ по Лемме 1;
- Выбираем $n(k)$ такое что леммы 3 и 4 будут выполняться для любого $m \in \{1, \ldots, k\}$ $(n(k) = 10k + 4)$;
- Если $n \geq n(k)$ нечетное, используем лемму 3, чтобы показать, что $m \in \{1, \ldots, k\}, m \in Spec(T_n)$;
- Если $n \geq n(k)$ четное, используем лемму 4, чтобы показать, что $m \in \{1, \ldots, k\}, m \in Spec(T_n)$.

Третье и четвертое собственные значения T_n

Теорема[4]

$T_n, n \geqslant 2$, это целочисленный граф и его наибольшее с.з. равно $\frac{n(n-1)}{2}$ с кратностью 1; его второе с.з. равно $\frac{n(n-3)}{2}$ с кратностью $(n-1)^2$.

Теорема

$$mul(\lambda_i) = \sum_{j=1, \lambda_j = \lambda_i}^{s} \chi_j^2, \tag{2}$$ [5]

$$\text{где } \chi_i = \frac{n!}{\prod_{t=1}^{k} \prod_{j=1}^{n_t} h_{tj}}, \tag{3}$$ [6]

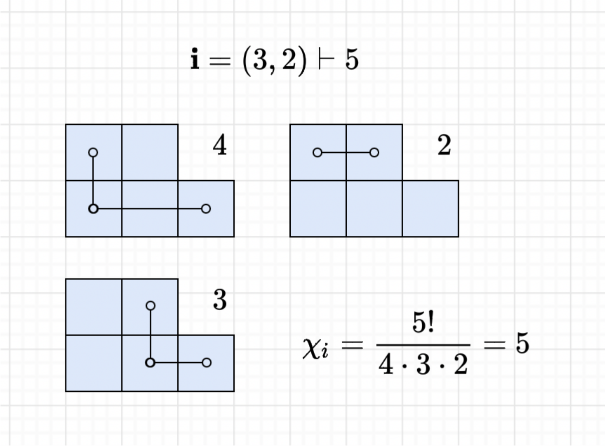
[4] K. Kalpakis, Y. Yesha, On the bisection Width of the Transposition network, *Networks*, **29** (1997) 69–76.

[5] P. Zieschang, Cayley graphs of finite groups. J. Algebra 118 (1988) 447–454.

[6] C. Berge, Principles of Combinatorics. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 72. Academic Press, New York (1971), p. 63

Третье и четвертое собственные значения T_n

Пример: Вычисление χ_i для разбиения $(3, 2) \vdash 5$



Третье и четвертое собственные значения T_n

Теорема 3

Третье по величине собственное значение графа $T_n, n \geqslant 4$ равно $\frac{(n-1)(n-4)}{2}$, а его кратность равна $\left(\frac{n(n-3)}{2}\right)^2$.

Скажем, что разбиение $\mathbf{i_1} = (n_1, n_2, \ldots, n_k) \vdash n$ больше, чем разбиение $\mathbf{i_2} = (m_1, m_2, \ldots, m_l) \vdash n$ и запишем это как $\mathbf{i_1} > \mathbf{i_2}$, если собственное значение $\lambda_{\mathbf{i_1}}$, соответствующее $\mathbf{i_1}$, больше $\lambda_{\mathbf{i_2}}$, соответствующего $\mathbf{i_2}$.

Третье и четвертое собственные значения T_n

Эскиз доказательства

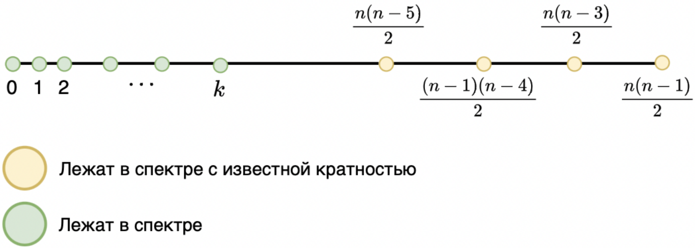
- Выберем разбиение $(n-2,2)$ которому соответствует с.з. $\frac{(n-1)(n-4)}{2}$;
- Покажем, что $(n-2,2)$ больше любого другого разбиения кроме (n), $(n-1,1)$. Это будет означать, что $(n-2,2)$ соответствует третьему наибольшему с.з. и что этому с.з. соответствует единственное разбиение;
  - Покажем, что $(n-2,2) > (n,k)$, если $k > 2$;
  - Покажем, что $(n-2,2) > (n_1,\dots,n_k)$, если $k > 2$.
- Используем формулу крюка для $(n-2,2)$, чтобы найти кратность.

Третье и четвертое собственные значения T_n

Теорема 4

Четвертое наибольшее собственное значение графа $T_n, n > 6$ равно $\frac{n(n-5)}{2}$, а его кратность равна $\left(\frac{(n-1)(n-2)}{2}\right)^2$.

Заключение



Открытые проблемы:

- Кратности наименьших собственных значений;
- Описать собственные числа, которые лежат между наибольшими и наименьшими.

Спасибо за внимание