

ТЕНЗОРИЕ СТЕПЕНИ ВЕКТОРНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

$$V_g(s|2)$$

В КОРНЯХ ИЗ ЕДИНИЦЫ

9 декабря 2022

О. Постнова

по совместной работе с А. Ашковой, Н. Решетихиным, Д. Соловьевым

План

1) $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ - «большая» квантовая группа с раздельными степенями»
в корнях из 1.

2) Косые модули

3) Задача разложения тензорных степеней косых модулей

4) $u_q(\mathfrak{sl}_2)$ - малая квантовая группа

I. Рациональная форма $V_r^{Q(v)}(sl_2)$ — деформация универсальной
 (Дринкелса, Димитрова) деформирующей алгебры $U(sl_2)$

v — формальный параметр

Рассмотрим $Q(v)$ -алгебру с генераторами: $E, F, K^{\pm 1}$
 (или полем рац. функций)

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1 \quad KE = v^2 EK \quad KF = -v^{-2} FK$$

$$EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{v - v^{-1}}$$

Это Алгебра Хопфа:

$$\Delta(E) = E \otimes 1 + K \otimes E$$

$$\Delta(F) = F \otimes K^{-1} + 1 \otimes F$$

$$\Delta(K^{\pm 1}) = K^{\pm 1} \otimes K^{\pm 1}$$

$$\varepsilon(E) = \varepsilon(F) = 0 \quad \varepsilon(K^{\pm 1}) = 1$$

$$S(E) = -K^{-1}E \quad S(F) = -FK \quad S(K) = K^{-1}$$

II Люстиговская интегральная форма с разделимыми степенями

$$V_A(\mathfrak{sl}_2)$$

$A = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ - кольцо Полимов Лорачо

Определим $V_A(\mathfrak{sl}_2)$ - A -подалгебру в $V_v(\mathfrak{sl}_2)$, генерируемую:
разделимыми степенями

$$E^{(n)} = \frac{E^n}{[n]!}$$

$$F^{(n)} = \frac{F^n}{[n]!}$$

$$K, K^{-1}$$

$$\text{где } [n] = \frac{v^n - v^{-n}}{v - v^{-1}} \quad [n]! = \prod_{j=1}^n [j] \quad \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} = \frac{[m]!}{[n]! [m-n]!}$$

это подалгебра Хопфа рациональной формы, и существует и/или алгебра Хопфа над $Q(v)$

$$V_v^{Q(v)}(\mathfrak{sl}_2) \cong V_A \otimes_A Q(v)$$

Сотношения:

$$E^{(n)} E^{(m)} = \begin{bmatrix} n+m \\ m \end{bmatrix} E^{(n+m)}$$

$$F^{(n)} F^{(m)} = \begin{bmatrix} n+m \\ m \end{bmatrix} F^{(n+m)}$$

$$E^{(p)} F^{(r)} = \sum_{0 \leq t \leq p, r} F^{(n-t)} \begin{bmatrix} K; 2t-p-r \\ t \end{bmatrix} E^{(p-t)},$$

$p, r \geq 0$

$$\text{rde} \begin{bmatrix} K; c \\ t \end{bmatrix} = \prod_{s=1}^t \frac{K v^{c-s+1} - K^{-1} v^{-c+s-1}}{v^s - v^{-s}}$$

III. Люстиговская Квантовая Группа с Разделёнными Степенями (RESTRICTED SPECIALIZATION)

$$U_q(\mathfrak{sl}_2)$$

Рассмотрим генераторы: $E, F, K, E^{(e)}, F^{(e)}$

Специализируем: $v \rightarrow q$

$$q = e^{\pi i k / e}$$

$2e$ -й корень из 1

$$q^e = -1 \quad q^{2e} = 1$$

Определим: Квантовая группа с разделёнными степенями:

$$U_q(\mathfrak{sl}_2) := U_A(\mathfrak{sl}_2) \otimes_A \mathbb{Q}[q, q^{-1}]$$

$$(E)^e = [e]! E^{(e)} = 0 \quad K^{2e} = 1 \quad K^e \text{ — централен} \quad F = F^{(1)} \quad E = E^{(1)}$$

МАЛАЯ КВАДРАТОВАЯ ТРУПНА $u_q(S(2))$

ГЕНЕРИРУЕТСЯ E, F, K, K^{-1} и соотношениями:

$$EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}} \quad KE = q^2 EK \quad KF = q^{-2} FK$$

и дополнительные соотношения:

$$K^{2\ell} = 1 \quad E^\ell = F^\ell = 0$$

$E\bar{E}$ центр: $C = EF + \frac{q^{-1}K + qK^{-1}}{(q - q^{-1})^2} = FE + \frac{qK + q^{-1}K^{-1}}{(q - q^{-1})^2}$

$K^\sim$

Представления $U_q(SL_2)$

① Неприводимый модуль $L_a(m_0)$

$m_0 + 1$ — мерный

базис: $\{e_j^{m_0}(a)\}$

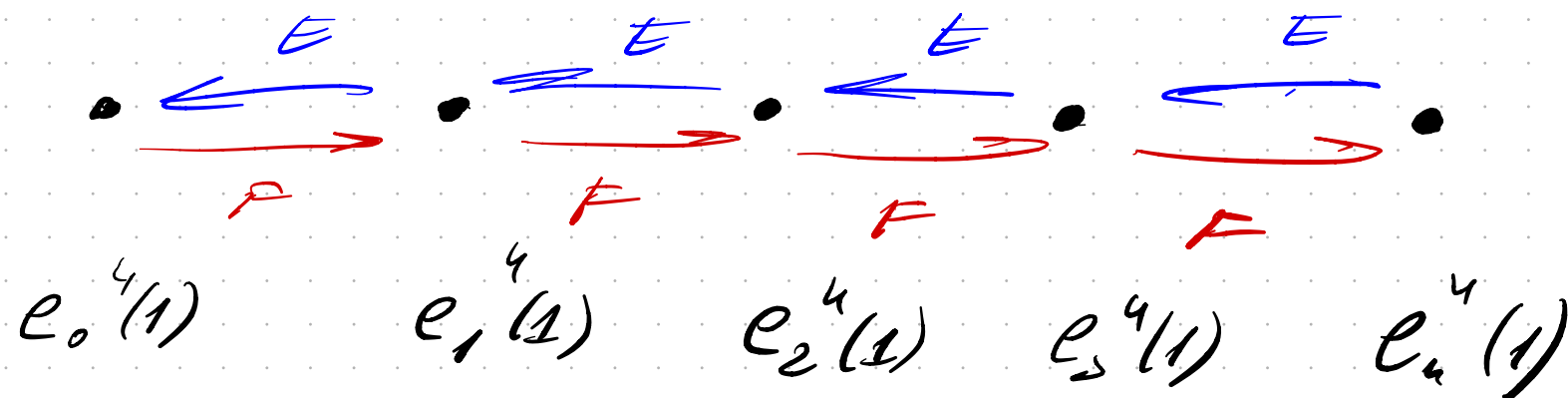
Действие генераторов:

$$\pi(K) e_j^{m_0}(a) = a q^{m_0 - 2j} e_j^{m_0}(a)$$

$$\pi(E) e_j^{m_0}(a) = a[j][m_0 - j + 1] e_{j-1}^{m_0}(a)$$

$$\pi(F) e_j^{m_0}(a) = e_{j+1}^{m_0}(a)$$

Весовая диаграмма $L_a(m_0)$ для $m_0 = 4$ и $\ell = 7$



② Модули Вейля

Пусть U_v^- — подпространство, генерируемое $\{F^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$

Модуль Вейля

Положим

$$W_A(\lambda) = U_v^- / \langle F^{(r)}, r > \lambda \rangle$$

Квадрат простого
коллинеарного
модуля над $U(\mathfrak{g})$

Положим

$$W(\lambda) = W_A(\lambda) \otimes \mathbb{Q}(q)$$

$v \rightarrow q$

$\Rightarrow W(\lambda)$ — модуль Вейля
старшего веса λ
над $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

Модуль Вейля $W_a(m_0)$

базис $\{e_j^{m_0}(a)\}_{j=0}^{m_0}$

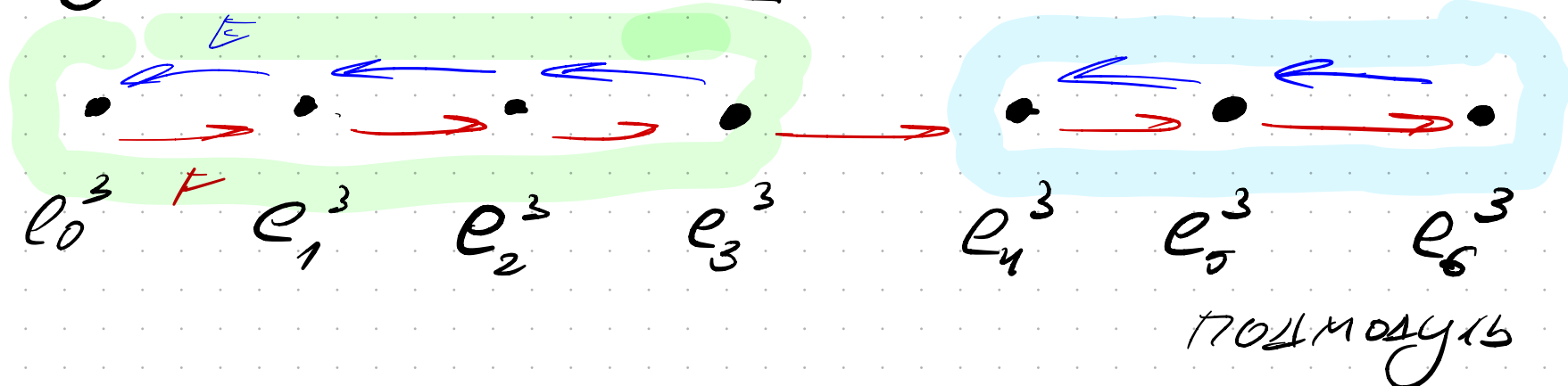
$$a = (-1)^{m_1}$$

$$m = \ell m_1 + m_0$$

ℓ -мерный

$$\begin{cases} \pi(K) e_j^{m_0}(a) = a q^{m_0 - 2j} e_j^{m_0}(a) \\ \pi(K) e_j^{m_0}(a) = a[j][m_0 - j + 1] e_{j-1}^{m_0}(a) \\ \pi(F) e_j^{m_0}(a) = e_{j+1}^{m_0}(a) \end{cases}$$

Модуль Вейля $W_a(m_0)$ для $m_0=3$, $\ell=7$



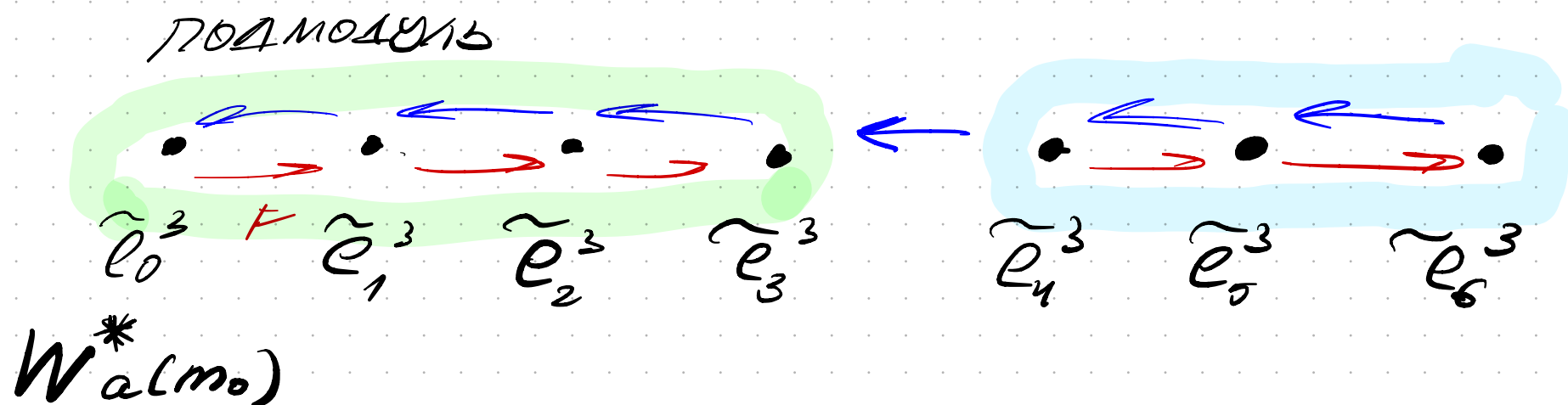
$W_a(m_0)$

Двойственный Модуль Вейля $W_a^*(m_0)$, ℓ -мерный

базис $\{\tilde{e}_j^{m_0}(a)\}_{j=0}^{m_0}$

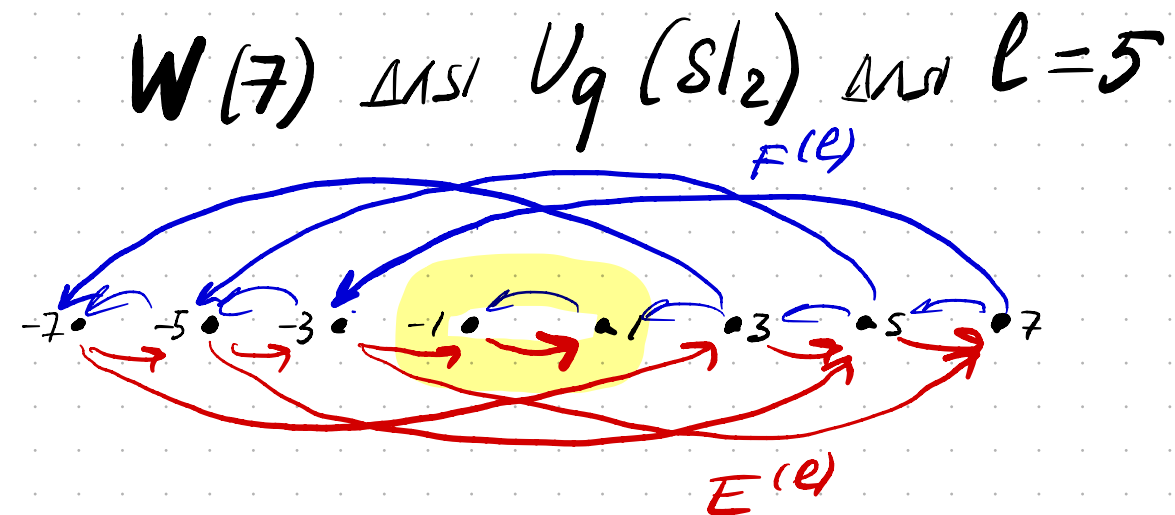
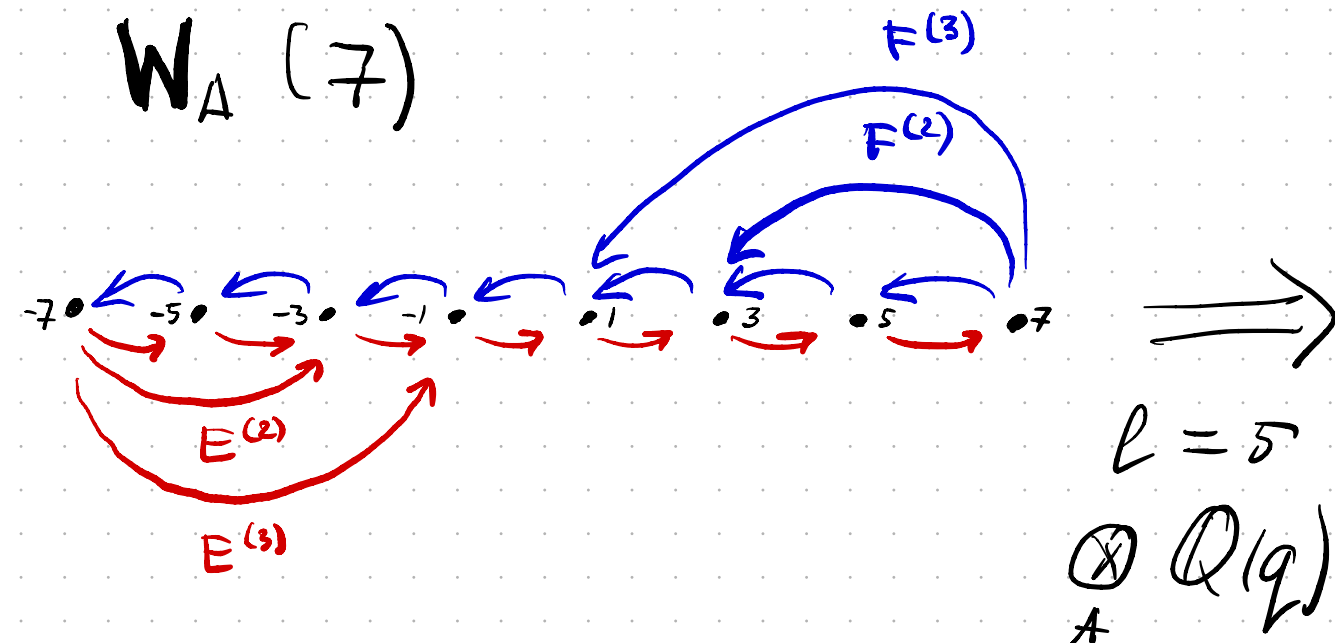
Двойственный модуль Вейля для $m_0=3$, $\ell=7$

$$\begin{cases} \pi(K) \tilde{e}_j^{m_0}(a) = a q^{-m_0 + 2j} \tilde{e}_j^{m_0}(a) \\ \pi(K) \tilde{e}_j^{m_0}(a) = a[j+1][m_0 - j] \tilde{e}_{j-1}^{m_0}(a) \\ \pi(F) \tilde{e}_j^{m_0}(a) = \tilde{e}_{j-1}^{m_0}(a) \end{cases}$$



$W_a^*(m_0)$

Модуль Вейля над $U_q(\mathfrak{sl}_2)$



x_0 - вектор старшего веса

$$W(7) = \{x_0, F^{(1)}x_0, \dots, F^{(7)}x_0\}$$

def

Двойственный модуль Вейля:

$$W(\lambda)^* = \text{Hom}(W(\lambda), \mathbb{Q}(q))$$

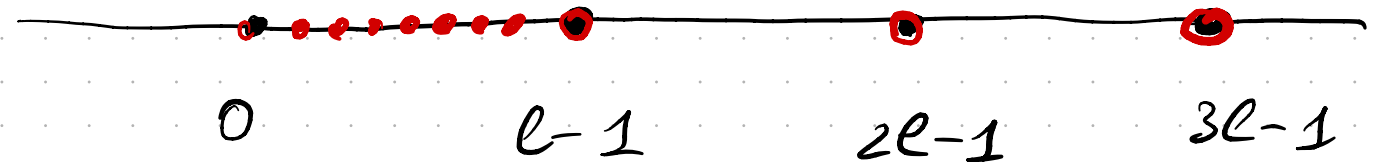
имеет тот же
характер что
 $W(\lambda)$

ТЕОРЕМА [Andersen, Polo, Wen]

Модуль Вейля или двойственный модуль Вейля является простым тогда и только тогда когда

$$1) \quad 0 \leq k \leq \ell - 1$$

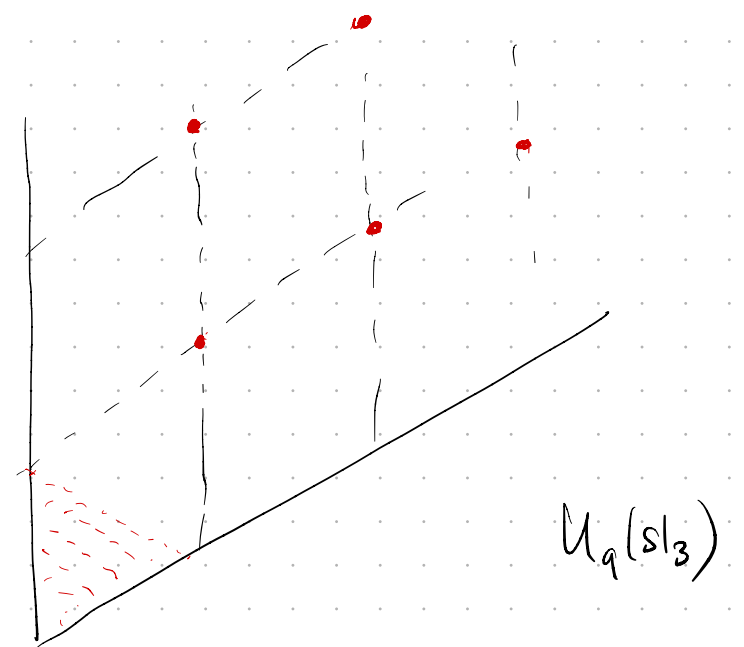
$$2) \quad k = \ell k_1 - 1 \quad k_1 \in \mathbb{N}$$



Для $U_q(\mathfrak{g})$

$$1) \quad \langle \lambda + \rho, \alpha \rangle \leq \ell \quad \text{для всех положительных корней } \alpha \in \Delta^+, \quad \rho = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$$

$$2) \quad \lambda \in (\ell - 1)\rho + \ell\mathbb{Z}\mu \quad \mu - \text{доминантный вес}$$



Косые модули (Tilting modules)

(def) Косой модуль T над $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ имеет фильтрацию Модулями Бекле
и Изоморфизм Модулей Бекле

$$0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots \subset M_n = T : \quad \frac{M_i}{M_{i-1}} \simeq W(\lambda_i) \text{ для некоторого } \lambda_i$$

$$0 \subset Q_1 \subset Q_2 \subset \dots \subset Q_n = T : \quad \frac{Q_i}{Q_{i-1}} \simeq H(m_i) \text{ для некоторого } m_i$$

Косой модуль $T_a(m_0)$

2-мерный

$$m_0 = 3$$

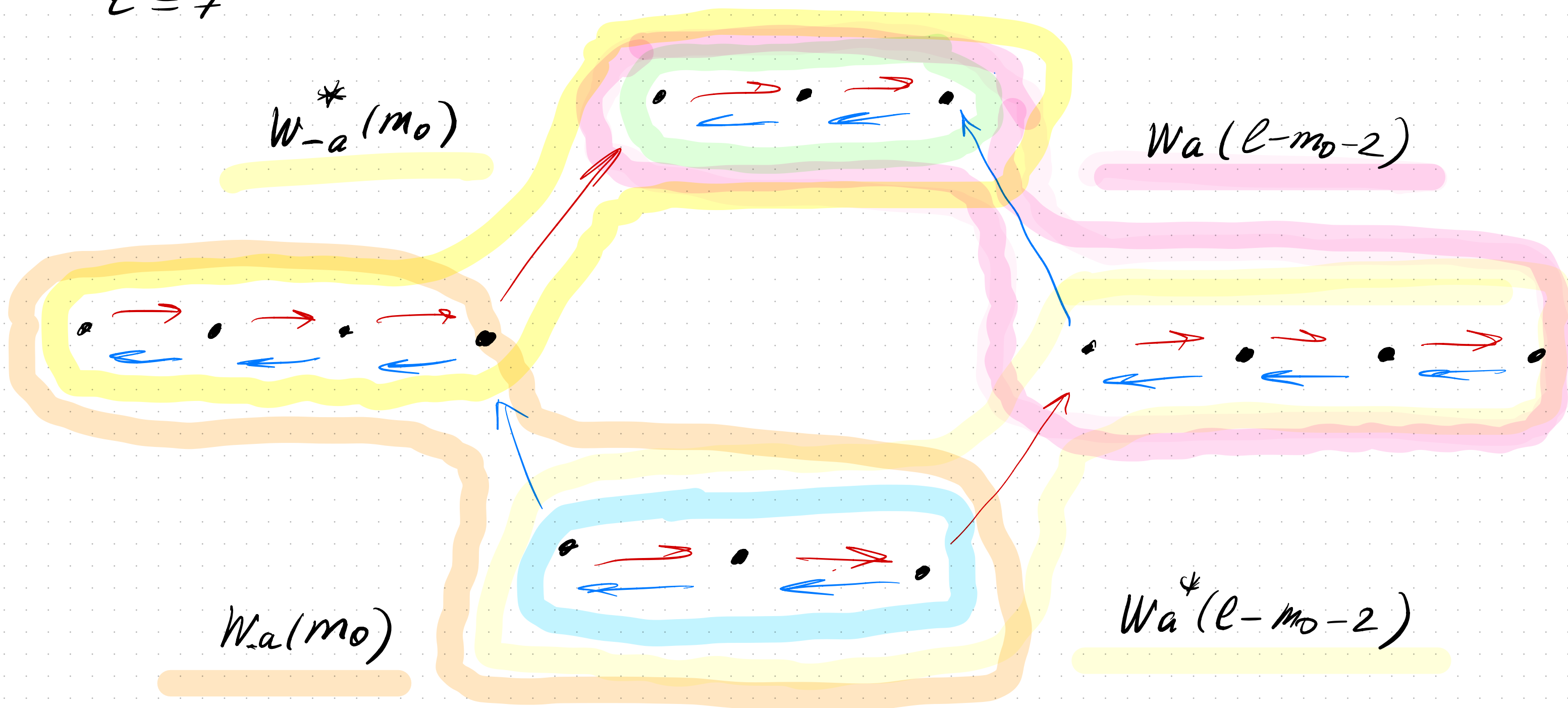
$$l = 7$$

$W_a^*(m_0)$

$W_a(l-m_0-2)$

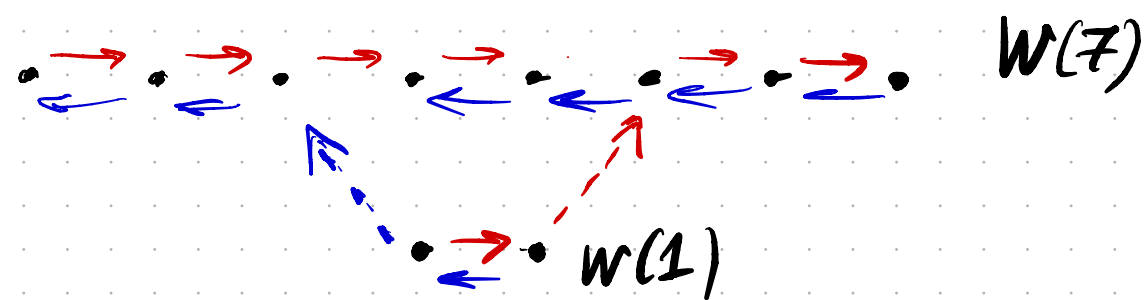
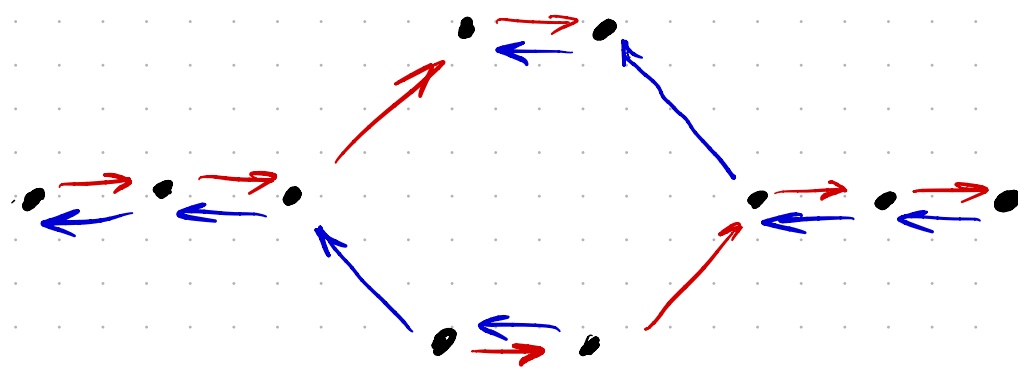
$W_a(m_0)$

$W_a^*(l-m_0-2)$

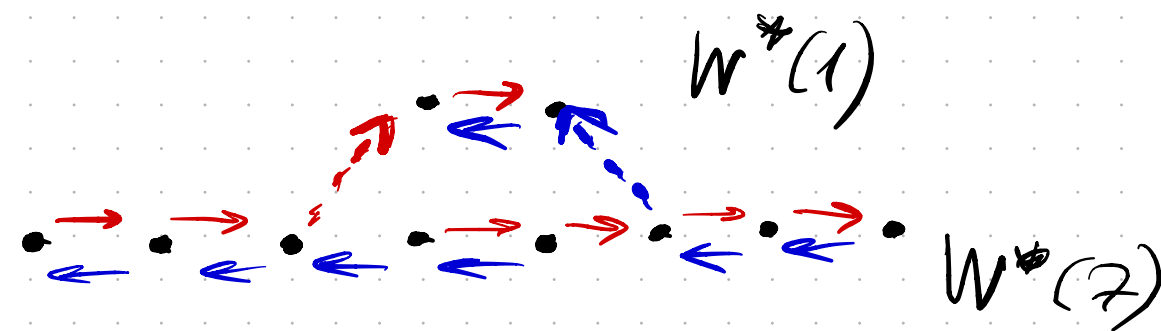


Пример Косого Модуля над $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ $\Delta_{151} \quad l=5$

$T(7)$



$$0 \rightarrow W(7) \rightarrow T(7) \rightarrow W(1) \rightarrow 0$$



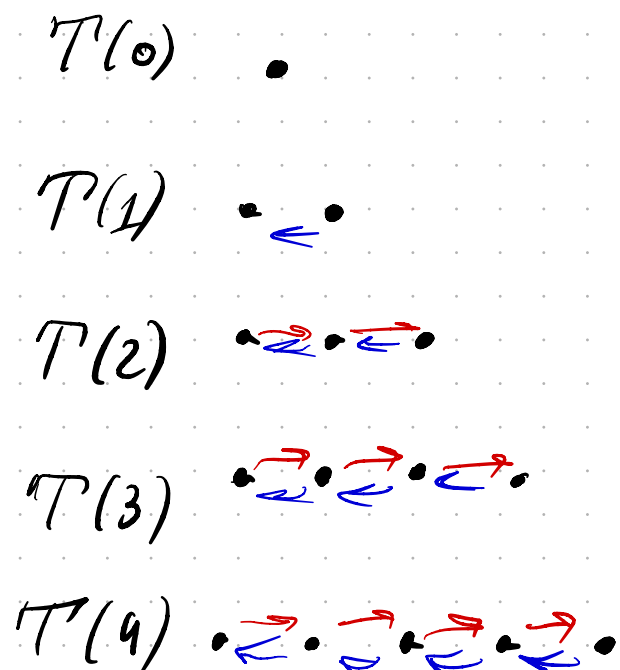
$$0 \rightarrow W^*(1) \rightarrow T(7) \rightarrow W^*(7) \rightarrow 0$$

ТЕОРЕМА (Andersen et al)

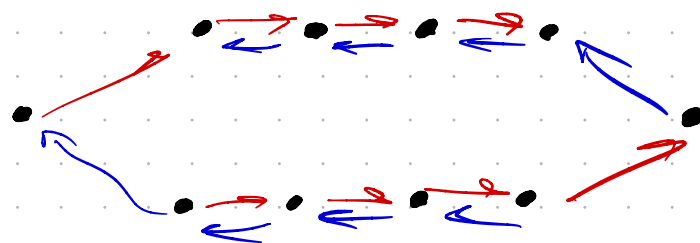
- 1) Для $\forall$ доминантного веса $\lambda \exists$ единственный неразложимый косой модуль $T(\lambda)$ со старшим весом $\lambda = k\psi$
- 2) $T_1 \otimes T_2$ и $T_1 \oplus T_2$ косые модули если T_1, T_2 - косые модули
- 3) Косой модуль является простым $\iff T(k) \cong W(k) \cong W(k)^* \cong L(k)$ т.е. т.т. когда $0 \leq k \leq \ell-2$ или $k = \ell k_1 - 1$

Можно $\triangleleft$ тензорную категорию косых модулей над $U_q(\mathfrak{g})$

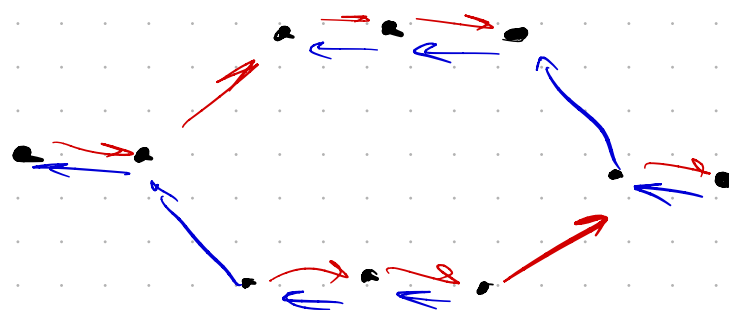
$$\mathcal{T} = \{ \text{прим. суммы } T(\lambda), \lambda \text{ - домин.} \}$$



$T(5)$



$T(6)$



4.7.9

Задача:

Рассмотреть тензорную степень косого модуля $V \in \mathcal{T}$

$$V^{\otimes N} = \bigoplus_{\lambda} T(\lambda) \oplus m_{\lambda}(V, N)$$

Найти явные выражения для $m_{\lambda}(V, N)$
и изучить их асимптотику при $N \rightarrow \infty$

— Для квантовой группы $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ с разделимыми степенями

— Для малой квантовой группы $u_q(\mathfrak{sl}_2)$

(подгруппа $U_q(\mathfrak{sl}_2)$, где периферия
 E, F, K)

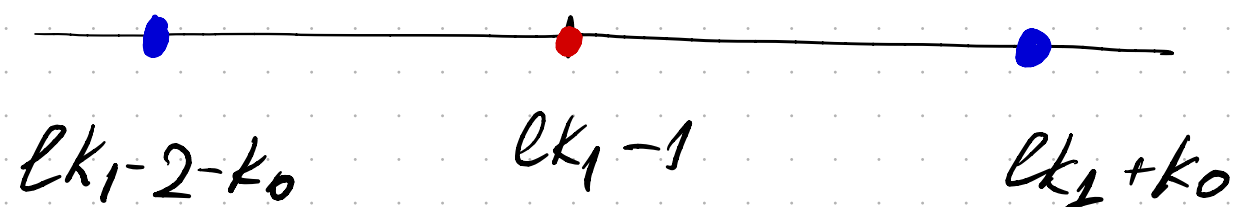
Кратности для $V_g(\delta/2)$ $g^{2\ell}=1$

Пусть $T(k)$ — неразложимый косой модуль старшего веса k

Тогда: $T(k) \simeq W(k)$ для $0 \leq k \leq \ell-1$ и $k = \ell k_1 - 1$ $k_1 \in \mathbb{N}$

Для $k = \ell k_1 + k_0$ имеем короткую точную последовательность:

$$0 \rightarrow W(\ell k_1 + k_0) \rightarrow T(\ell k_1 + k_0) \rightarrow W(\ell k_1 - 2 - k_0) \rightarrow 0$$



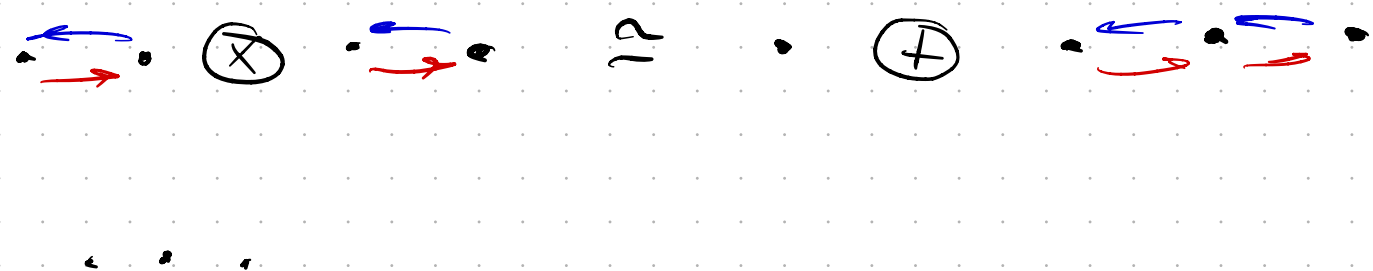
$$0 \rightarrow W^*(\ell k_1 - 2 - k_0) \rightarrow T(\ell k_1 + k_0) \rightarrow W^*(\ell k_1 + k_0) \rightarrow 0$$

$\Rightarrow$ Мы можем сослаться на разложение $\Pi \simeq \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \Pi_k^{\oplus m_k}$

Рассмотрим $T = L(1)^{\otimes N}_{N \in \mathbb{N}}$

$T(1) \simeq L(1) \simeq W(1)$ - точн могут

$$T(1) \otimes T(1) \simeq T(0) \oplus T(2)$$



$$T(l-1) \otimes T(1) \simeq T(l)$$



Кратности $T(k)$ в $L(1)^{\otimes N}$

ТЕОРЕМА [Postnova, Reshetikhin, Solovyeu]

1) Если $1 \leq N \leq \ell-1$ тогда

$$L(1)^{\otimes N} = \bigoplus_{0 \leq k \leq N} T(k)^{\oplus m_k^N}, \text{ где}$$

m_k^N

кратности разложения
в классическом случае

2) Если $N \geq \ell$, тогда положим $k = k_1 \ell + k_0$ $k_1 \in \mathbb{N}$
 $0 \leq k_0 \leq \ell-1$

$$L(1)^{\otimes N} = \bigoplus_{0 \leq k \leq N} T(k)^{\oplus p_k^N}$$

N

$$p_k^N = \sum_{0 \leq n \leq \left\lfloor \frac{N-k}{2\ell} \right\rfloor} m_{(k_1+2n)\ell+k_0}^N - \sum_{0 \leq n \leq \left\lfloor \frac{N-(k_1+2)\ell+k_0+2}{2\ell} \right\rfloor} m_{(k_1+2n+2)\ell-k_0-2}^N$$

$k_1 \ell + k_0 \leq N$
 $k_1 \in \mathbb{N}$
 $0 \leq k_0 \leq \ell-2$

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МЕРЫ:

МЕРА „ПАУЛШЕРЕА“

$$P_{\text{Zob}}(K) = \frac{P_K^N \dim T(K)}{(\dim L(1))^N}$$

МЕРА ХАРАКТЕРОВ

$$P_{\text{Zob}}(K, X) = \frac{P_K^N \text{ch } T(K)(X)}{(X + X^{-1})^N}$$

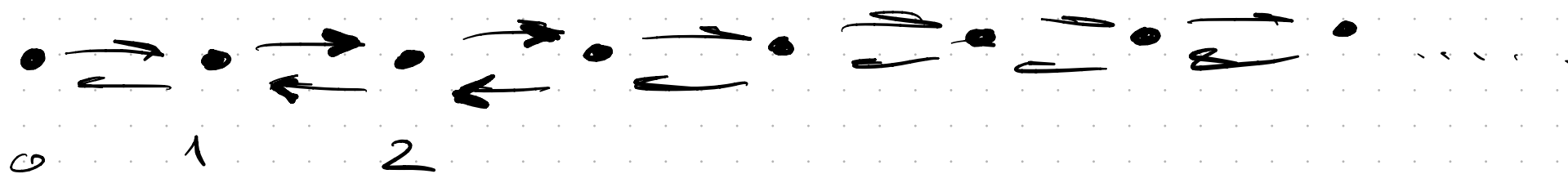
Плюс: Изучить асимптотич. распределение.

КВАДРАТЫ РАЗЛОЖЕНИЯ ТЕНЗОРНОЙ СТЕПЕНИ В КЛАССИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

$$L(1) \otimes L(m) \simeq L(m+1) \oplus L(m-1)$$

$L(m)$ — неприводимый
модуль $\mathfrak{sl}_2$
размерности $m+1$

$$(L(1))^{\otimes N} = \bigoplus_m \left(C_N^{\frac{N-m}{2}} - C_N^{\frac{N-m}{2}-1} \right) L(m)$$



Случайные баунданы
в главной камере
Весы $\mathfrak{sl}_2$

Что же будет в случае квантовых групп?

Рекуррентные формулы для тензорных степеней $(T(1))^{\otimes N}$ для $U_q(sl_2)$

$$T(k) \otimes T(1) = T(k-1) \oplus T(k+1)$$

...

$$T(l-1) \otimes T(1) = T(l)$$

$$T(l) \otimes T(1) = T(l+1) \oplus 2T(l-1)$$

$$T(l+1) \otimes T(1) = T(l) \oplus T(l+2)$$

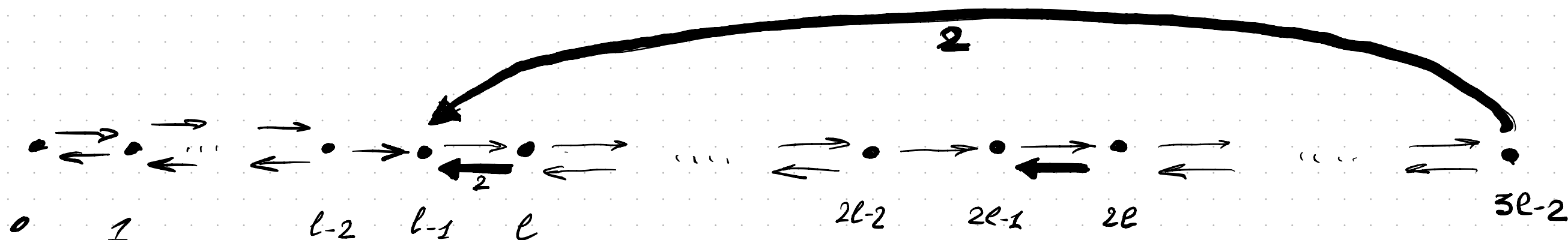
...

$$T(2l-1) \otimes T(1) = T(2l)$$

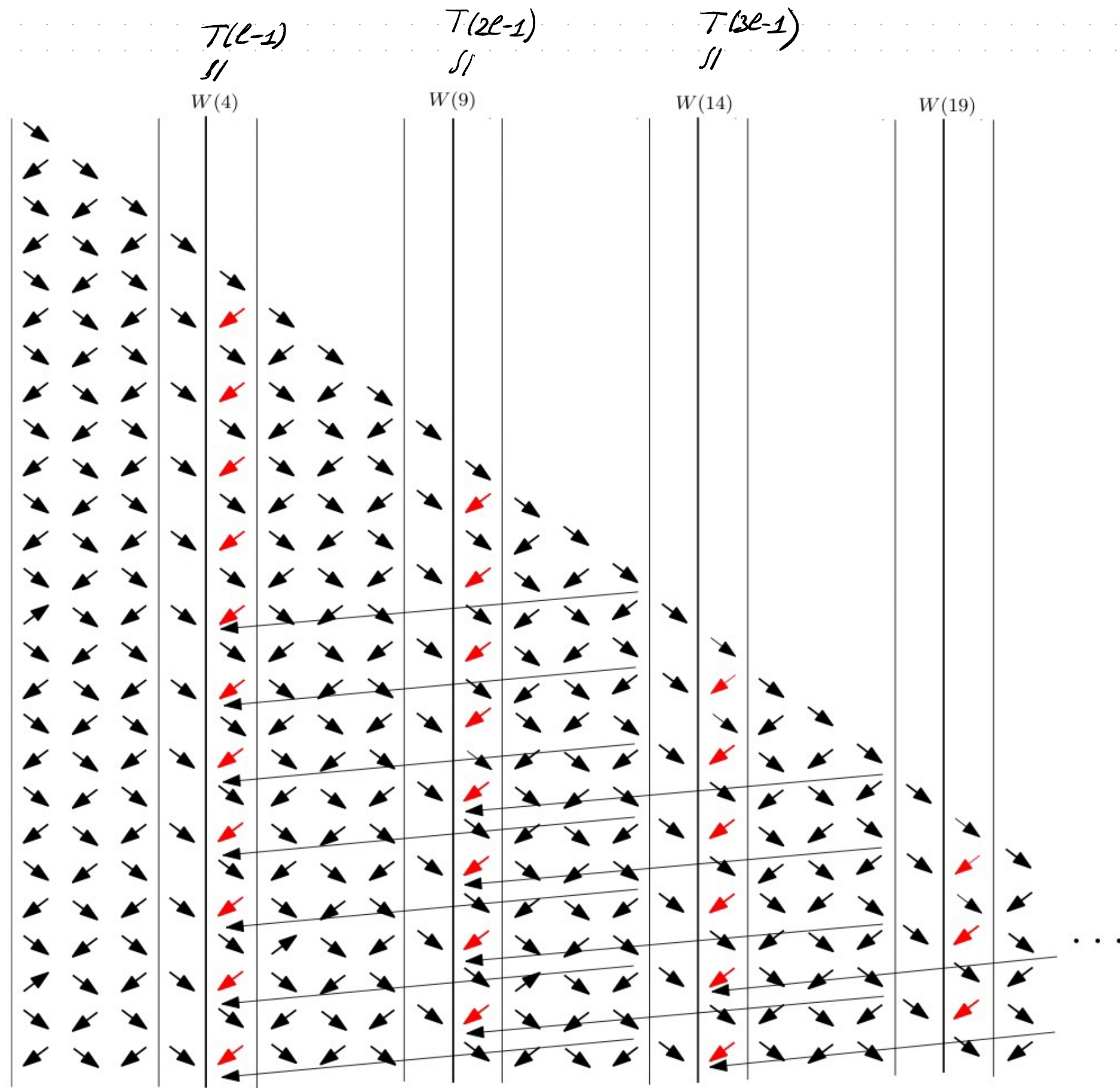
$$T(2l) \otimes T(1) = 2T(2l-1) \oplus T(2l+1)$$

...

$$T(3l-2) \otimes T(1) = T(3l-3) \oplus T(3l-1) \oplus T(l-1)$$



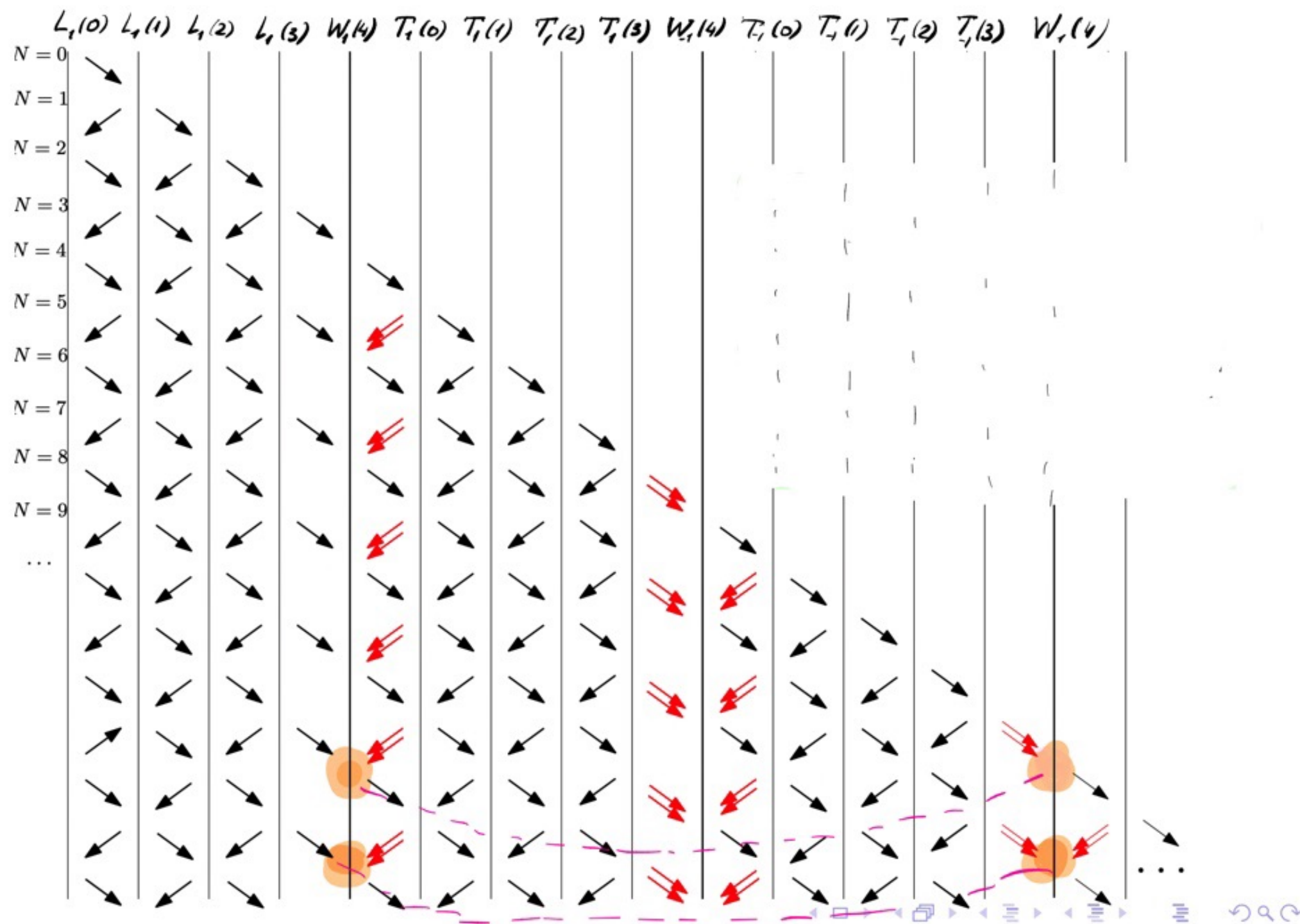
ТЕНЗОРАСЫ
СТЕПЕНЬ



$$l=5$$

Модель путей для большой квантовой группы

Модель путей для малой квантовой группы



Подсчёт путей в полосе:

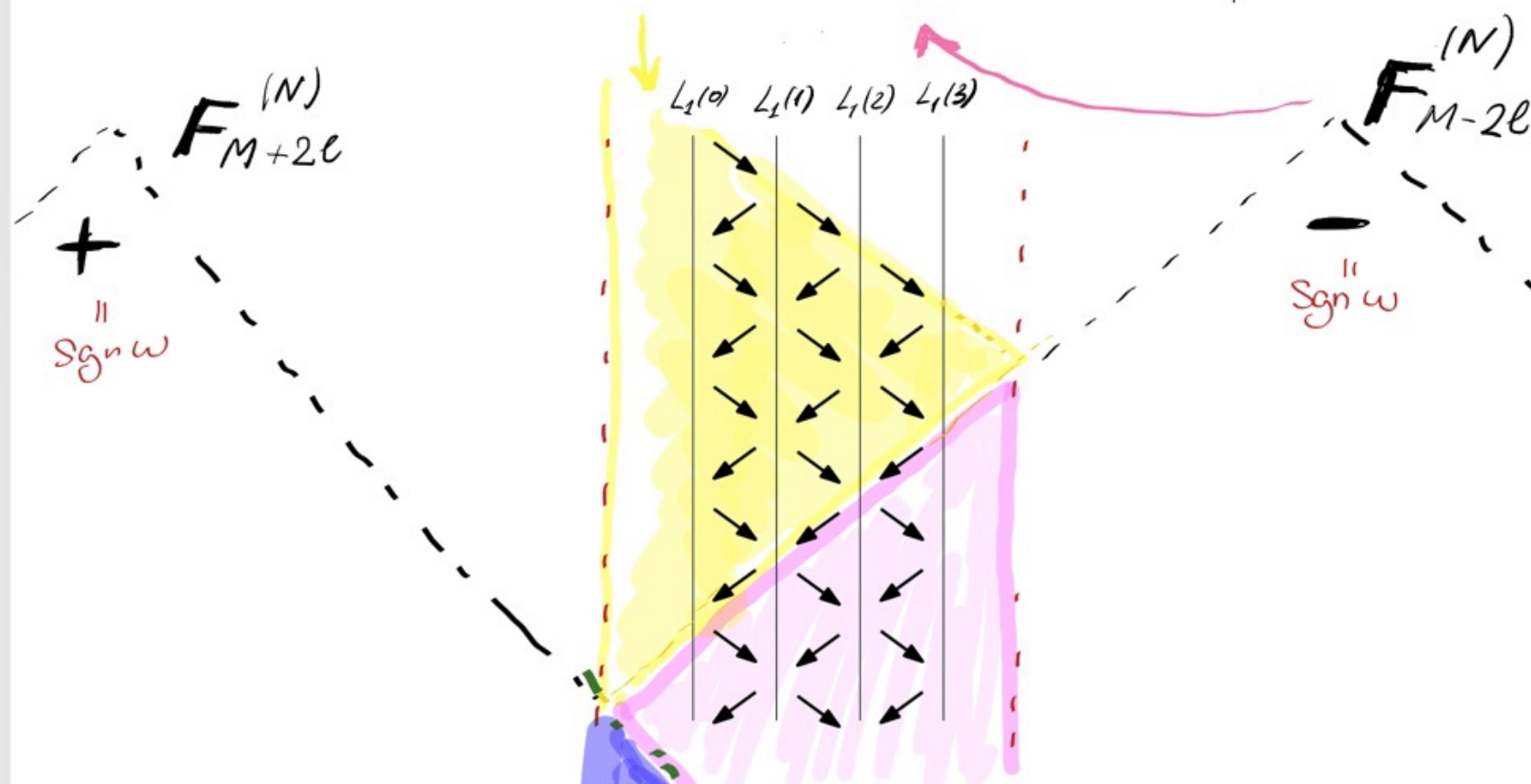
$$F_M^N := \binom{N}{\frac{N-M}{2}} - \binom{N}{\frac{N-M}{2} - 1}$$

Гессель
уайлбергер

Число путей
из $(0,0)$ в (l,N)
с ограничениями

$$= \sum_{w \in W} \text{sgn } w \left(\text{число неор. путей из } (0,0) \text{ в } (l,N) \right)$$

$$M_{L_1}^{(N)} = F_M^{(N)} + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N}{2l} + \frac{1}{2} \rfloor} F_{M-2kl}^{(N)} + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{N}{2l} \rfloor} F_{M+2kl}^{(N)}$$

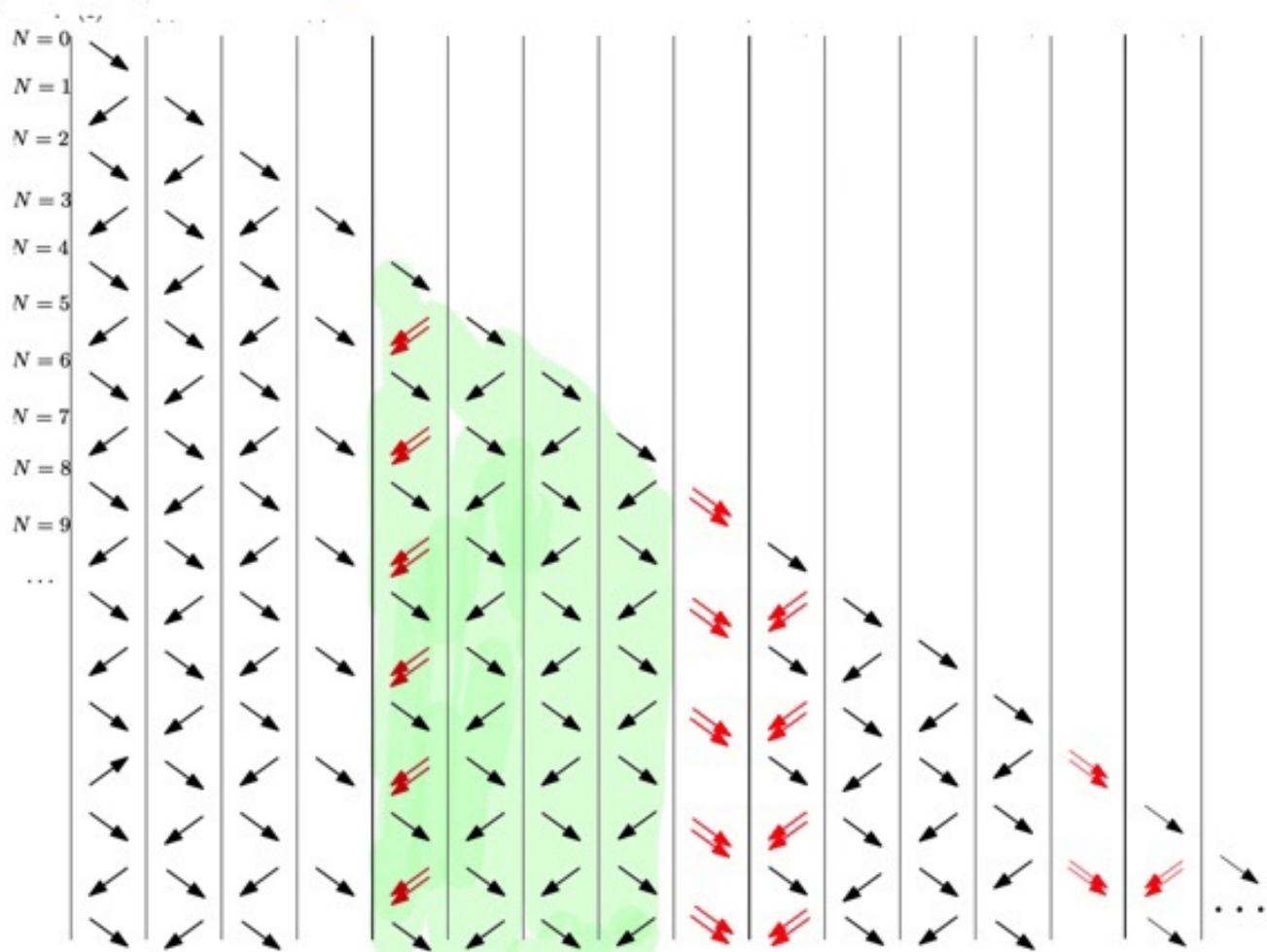


Число путей в j -й полосе:

$$M_{(M,N)}^j = 2^{j-2} \left(\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{N-(j-1)l+1}{4l} \right\rfloor} P_j(k) F_{M+4kl}^{(N)} + \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{N-jl}{4l} \right\rfloor} P_j(k) F_{M-4kl-2jl}^{(N)} - \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{N-(j+1)l+1}{4l} \right\rfloor} Q_j(k) F_{M+2l+4kl}^{(N)} - \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{N-jl-2l}{4l} \right\rfloor} Q_j(k) F_{M-4kl-2(j+1)l}^{(N)} \right),$$

$$P_j(k) = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor} C_{j-2}^{2i} f_{j-2}(k-i), \quad Q_j(k) = \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor} C_{j-2}^{2i+1} f_{j-2}(k-i),$$

$$f_j(k) = \frac{\prod_{i=1}^j (k+i)}{j!}, \quad C_j^i = \frac{j!}{i!(j-i)!}$$



Комбинаторные тождества:

$$(n+1)^2 = \sum_{j=1, j \text{ odd}}^{n+1} 2^{2j-2} p_{2j} \left(\frac{n-j+1}{2} \right) - \sum_{j=2, j \text{ even}}^n 2^{2j-2} Q_{2j} \left(\frac{n-j}{2} \right)$$

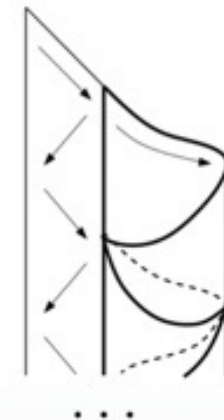
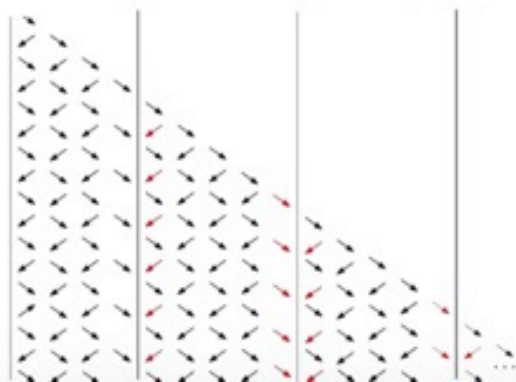
$$(n+1)^2 = \sum_{j=2, j \text{ even}}^{n+1} 2^{2j-2} p_{2j} \left(\frac{n-j+1}{2} \right) - \sum_{j=1, j \text{ odd}}^n 2^{2j-2} Q_{2j} \left(\frac{n-j}{2} \right)$$

КРАТНОСТИ РАЗЛОЖЕНИЯ В ТЕРБОРИИ СТЕПЕНИ $T_1(M)$
 для малой кантовой группы
 $V_9(S/2)$

ТЕОРЕМА КРАТНОСТИ $T_1(M)$ и $T_{-1}(M)$ в $L_1(I)^{\otimes N}$ ЗАДАЮТСЯ ВЫРАЖЕНИЯМИ:

$$M_{T_1(M)}^{(r)}(N) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{N-2}{2l}\right]} k^2 F_{M-l-2kl}^{(N)} + (k+1)^2 F_{M+l+2kl}^{(N)}$$

$$M_{T_{-1}(M)}^{(r)}(N) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{N-2}{2l}\right]} (k^2 + k) F_{M-2l-2kl}^{(N)} + ((k+1)^2 + (k+1)) F_{M+2l+2kl}^{(N)}$$



Кратности разложения в тензорной степени $T_1(M)$

для квантовой группы $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

$$M_{T(k_1 l + k_0)} = F_{k_1 l + k_0}^{(N)} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-k_1 l}{2l} + \frac{1}{2} \rfloor} F_{-k_1 l + k_0 - 2jl}^{(N)} + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{N-k_1 l}{2l} \rfloor} F_{k_1 l + k_0 + 2jl}^{(N)},$$

$$M_{T(k_1 l + l - 1)} = F_{k_1 l + l - 1}^{(N)},$$