Коммутаторная длина степеней в свободном произведении групп

Вадим Березнюк

Московский государственный университет имени М. В. Ломосносова
Московский центр фундаментальной и прикладной математики

Москва, 2022

Вопрос

Для данных свободного произведения групп $G = *_{j \in J} A_j$ и натурального числа n, какова минимальная возможная коммутаторная длина элемента $g^n \in G$, не сопряженного элементам свободных сомножителей?

Вопрос

Для данных свободного произведения групп $G = *_{j \in J} A_j$ и натурального числа n, какова минимальная возможная коммутаторная длина элемента $g^n \in G$, не сопряженного элементам свободных сомножителей?

При каких k и n уравнение

$$u^n = [v_1, w_1] \dots [v_k, w_k]$$

имеет решение в $G = *_{j \in J} A_j$, такое что u не сопряжен элементам свободных сомножителей?

Обозначения

$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ — коммутатор элементов x и y.

Обозначения

$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ — коммутатор элементов x и y.

Для элемента g группы G коммутаторная длина $\mathrm{cl}(g)$ элемента g — это минимальное количество коммутаторов, в произведение которых раскладывается элемент g.

Обозначения

$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ — коммутатор элементов x и y.

Для элемента g группы G коммутаторная длина $\mathrm{cl}(g)$ элемента g — это минимальное количество коммутаторов, в произведение которых раскладывается элемент g.

Для данных свободного произведения групп $G = *_{j \in J} A_j$ и натурального числа n определим

$$k(G, n) = \min(\{\mathrm{cl}(g^n) \mid g \in \hat{G}\}),$$

где $\hat{G}$ — это множество всех элементов G, не сопряженных элементам свободных сомножителей.

Обозначения

$[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ — коммутатор элементов x и y.

Для элемента g группы G коммутаторная длина $\mathrm{cl}(g)$ элемента g — это минимальное количество коммутаторов, в произведение которых раскладывается элемент g.

Для данных свободного произведения групп $G = *_{j \in J} A_j$ и натурального числа n определим

$$k(G, n) = \min(\{\mathrm{cl}(g^n) \mid g \in \hat{G}\}),$$

где $\hat{G}$ — это множество всех элементов G, не сопряженных элементам свободных сомножителей.

Также определим $N(G)$ как минимальный возможный порядок неединичного элемента группы G.

История

- Неединичный коммутатор не может быть истинной степенью в свободной группе (Schützenberger 1959)

История

- Неединичный коммутатор не может быть истинной степенью в свободной группе (Schützenberger 1959)
- $[x, y]^3 = [x^{-1}yx, x^{-2}yxy^{-1}][yxy^{-1}, y^2]$ (Culler 1981)

История

- Неединичный коммутатор не может быть истинной степенью в свободной группе (Schützenberger 1959)
- $[x, y]^3 = [x^{-1}yx, x^{-2}yxy^{-1}][yxy^{-1}, y^2]$ (Culler 1981)
- $[x, y]^n$ раскладывается в произведение k коммутаторов, если $n \leqslant 2k - 1$ (Culler 1981)

История

- Неединичный коммутатор не может быть истинной степенью в свободной группе (Schützenberger 1959)
- $[x, y]^3 = [x^{-1}yx, x^{-2}yxy^{-1}][yxy^{-1}, y^2]$ (Culler 1981)
- $[x, y]^n$ раскладывается в произведение k коммутаторов, если $n \leqslant 2k - 1$ (Culler 1981)
- Если в свободной группе $u^n = [v_1, w_1][v_2, w_2]$ и $n \geqslant 4$, то u — единичный элемент (Comerford, Comerford Jr. & Edmunds 1991)

История

- Неединичный коммутатор не может быть истинной степенью в свободной группе (Schützenberger 1959)
- $[x, y]^3 = [x^{-1}yx, x^{-2}yxy^{-1}][yxy^{-1}, y^2]$ (Culler 1981)
- $[x, y]^n$ раскладывается в произведение k коммутаторов, если $n \leqslant 2k - 1$ (Culler 1981)
- Если в свободной группе $u^n = [v_1, w_1][v_2, w_2]$ и $n \geqslant 4$, то u — единичный элемент (Comerford, Comerford Jr. & Edmunds 1991)
- Если в свободном произведения локально индикабельных групп $u^n = [v_1, w_1] \dots [v_k, w_k]$ и $n \geqslant 2k$, то u сопряжен элементу одного из свободных сомножителей (Duncan & Howie 1991)

История

Из теоремы Дункана-Хауи и примеров Каллера следует, что если G — это свободное произведение локально индикабельных групп, то

$$k(G, n) = \left[\frac{n}{2}\right] + 1.$$

То же самое верно и для свободных произведений произвольных групп без кручения. Это было доказано Ивановым и Клячко и независимо Ченом в 2018 году.

История

В обеих работах были приведены оценки и для случая наличия кручения в свободных сомножителях:

$$k(G,n) \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 1, \quad \text{если } n < N(G) \qquad \text{Ivanov \& Klyachko 2018,}$$

$$k(G,n) \geqslant \left[\frac{n - \left[\frac{2n}{N(G)}\right]}{2}\right] + 1 \qquad \text{Chen 2018.}$$

История

В обеих работах были приведены оценки и для случая наличия кручения в свободных сомножителях:

$$k(G,n) \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] + 1, \quad \text{если } n < N(G) \qquad \text{Ivanov \& Klyachko 2018,}$$

$$k(G,n) \geqslant \left[\frac{n - \left[\frac{2n}{N(G)}\right]}{2}\right] + 1 \qquad \text{Chen 2018.}$$

Эти оценки были обобщены докладчиком и Клячко:

$$k(G,n) \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{N(G)}\right] + 1 \qquad \text{Bereznyuk \& Klyachko 2022.}$$

История

Для элемента $g \in \hat{G}$, имеющего циклически приведенную форму $a_1 \dots a_m$, положим

$$N(g) = \min(\mathrm{ord}(a_1), \dots, \mathrm{ord}(a_m)).$$

Для $N \in \{N(g) \mid g \in \hat{G}\}$ положим

$$k(G, n, N) = \min(\{\mathrm{cl}(g^n) \mid g^n \in \hat{G},\ N(g) = N\}).$$

В Bereznyuk & Klyachko 2022 в частности было доказано, что

$$k(G, n, N) \geqslant \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{N}\right] + 1.$$

Результаты

Теорема 1

Пусть $G = *_{j \in J} A_j$ — это свободное произведение нетривиальных групп и n — положительное целое число. Тогда

$$k(G, n) = \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{N(G)}\right] + 1.$$

Результаты

Теорема 2

Пусть $G = *_{j\in J} A_j$ — это свободное произведение нетривиальных групп и n — положительное целое число. Если $N \in \{N(g) \mid g \in \hat{G}\}$, то

$$k(G, n, N) = \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{N}\right] + 1.$$

Результаты

Теорема 3

Пусть $G = *_{j \in J} A_j$ — это свободное произведение нетривиальных групп и n — положительное целое число. Если $a \in A_{j_1}$ и $t \in A_{j_2}$ два неединичных элемента из различных свободных сомножителей, такие что $\mathrm{ord}(a) \leq \mathrm{ord}(t)$, то

$$\mathrm{cl}([a, t]^n) = \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{\mathrm{ord}(a)}\right] + 1.$$

Следствие 1

Если a и b — это 2 неединичных элемента произвольной группы G и n — положительное целое число, то

$$\mathrm{cl}([a, b]^n) \leq \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n}{\mathrm{ord}(a)}\right] + 1.$$

Идея доказательства

Оценки снизу были получены в Bereznyuk & Klyachko 2022. Для доказательства точности этих оценок используется геометрический язык: для каждых a, t и n мы строим диаграмму Хауи D на замкнутой ориентированной поверхности рода $[n\,/\,2]-[n\,/\,\mathrm{ord}(a)]+1$, такую что D имеет только одну грань, метка этой грани равна $[a,t]^n$ и все вершины D внутренние.

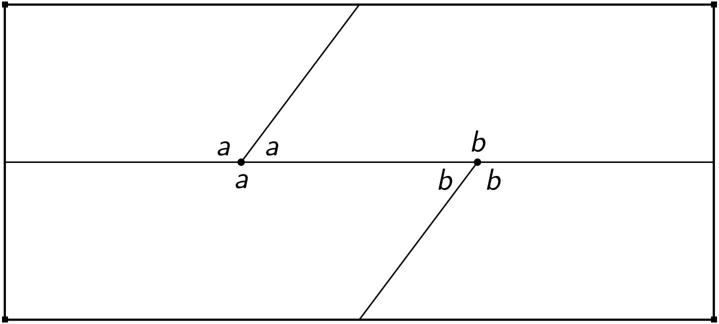
Диаграммы Хауи

Пусть в замкнутую ориентированную поверхность S вложен неориентированный граф Γ, разбивающий S на односвязные области, называемые клетками. Такая поверхность вместе с вложенным в неё графом называется диаграммой Хауи D над свободным произведением $A * B$, если:

1. Граф Γ является двудольным. Вершины одной доли называются A-вершинами, а вершины второй доли B-вершинами.
2. Каждый угол A-вершины помечен элементом из A, и каждый угол B-вершины помечен элементом из B.
3. Каждая вершина является либо внешней, либо внутренней. Метка каждой внутренней вершины равняется единице, где метка вершины — это произведение меток её углов, взятых по часовой стрелке.

Метка клетки диаграммы D определяется как произведение меток углов, лежащих на границе этой клетки, взятых при её обходе против часовой стрелки.

Диаграммы Хауи



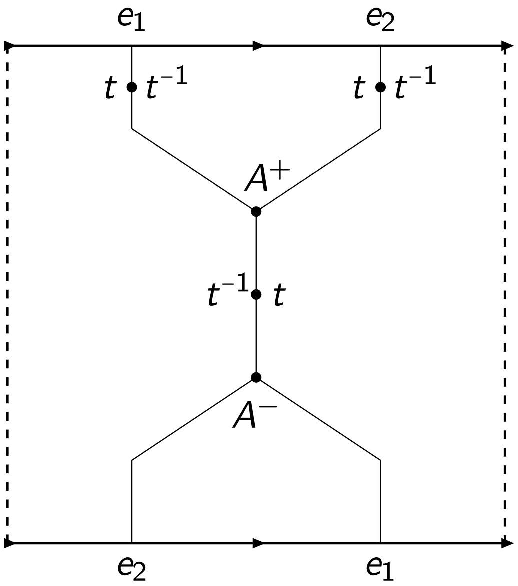
Пример диаграммы Хауи на торе над группой $\langle a \rangle_3 * \langle b \rangle_3$. Метка единственной клетки равняется $(ab)^3$.

Диаграммы Хауи

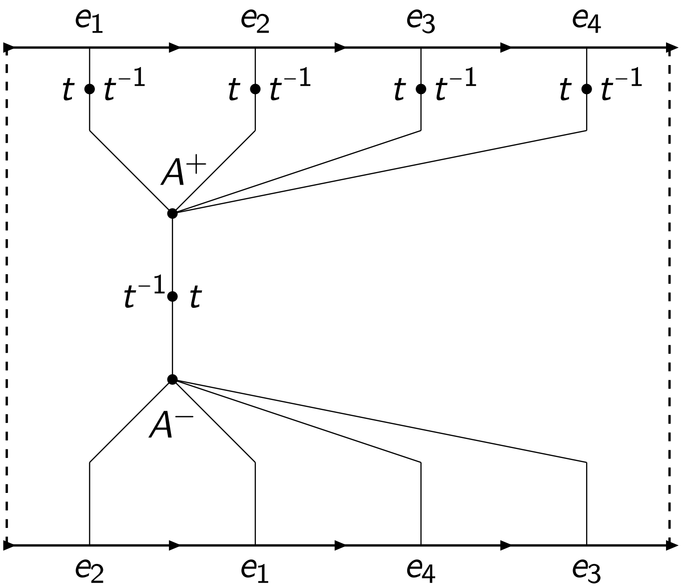
Лемма о геометрическом соответствии

Пусть u — это циклические приведенный элемент свободного произведения $A * B$, не сопряженный элементам свободных сомножителей. Если существует диаграмма D над $A * B$ на замкнутой ориентированной поверхности рода k, такая что D имеет только одну грань, метка этой грани равняется u, и все вершины D внутренние, то u является произведением k коммутаторов.

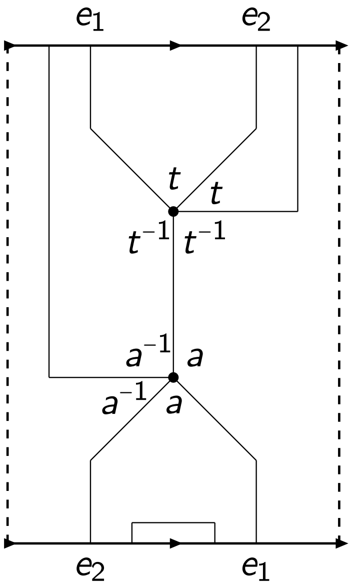
Примеры диаграмм, $n = 3$, $N = 3$



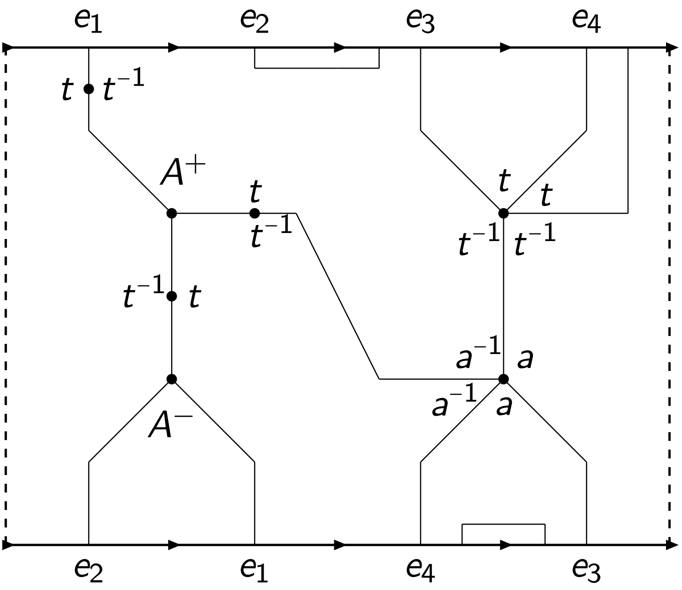
Примеры диаграмм, $n = 5$, $N = 5$



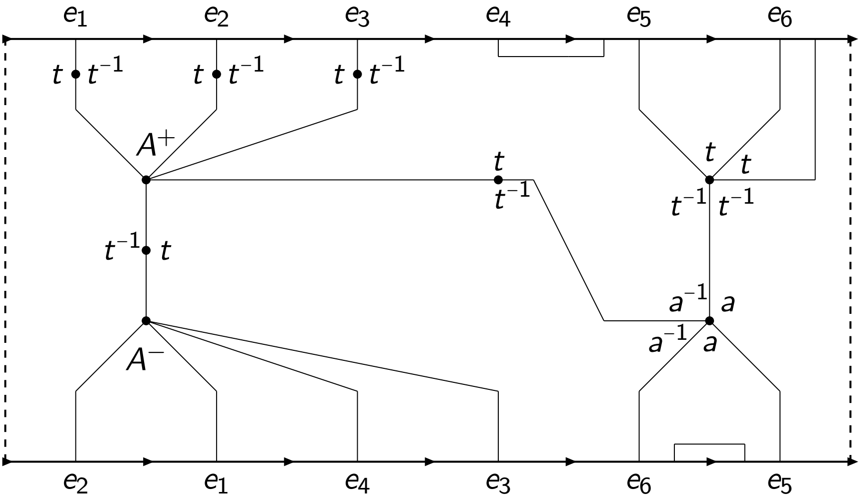
Примеры диаграмм, $+2$



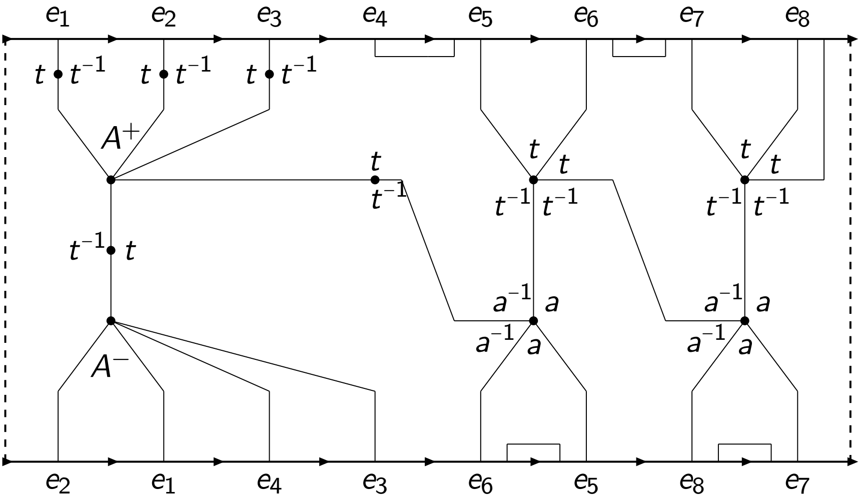
Примеры диаграмм, $n = 5$, $N = 3$



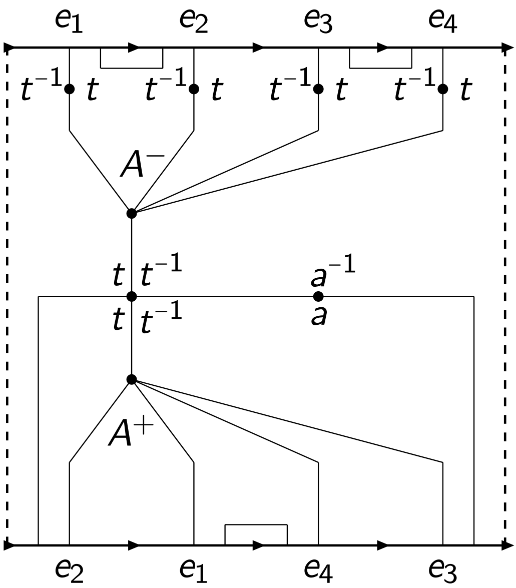
Примеры диаграмм, $n = 7$, $N = 5$



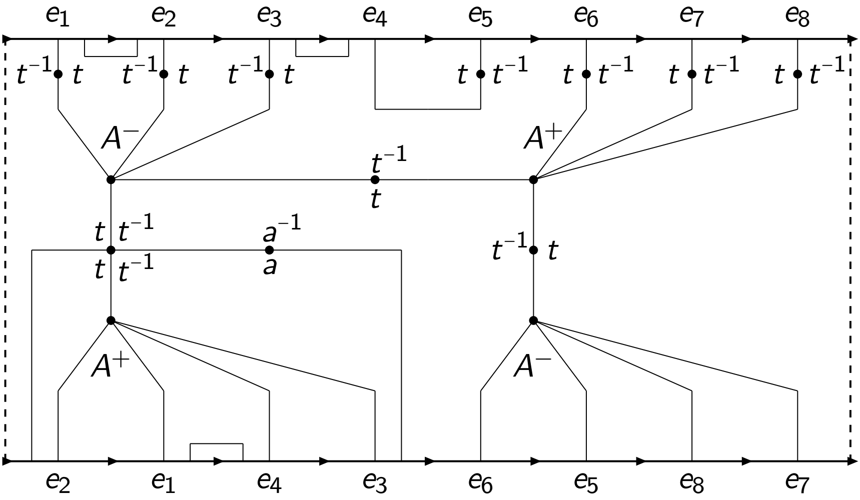
Примеры диаграмм, $n = 9$, $N = 5$



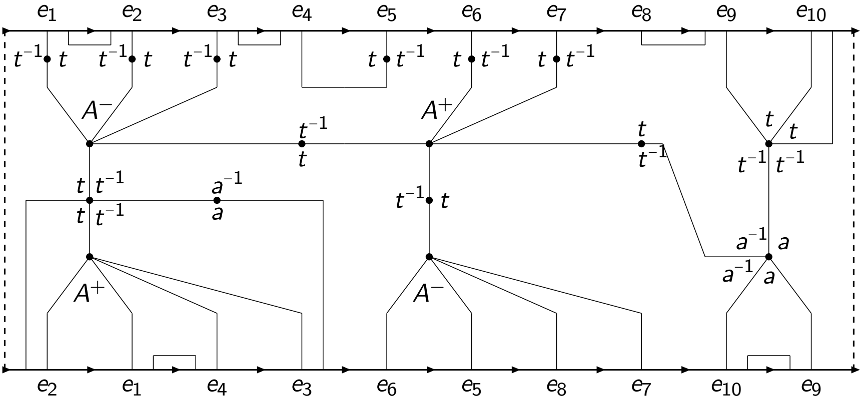
Примеры диаграмм, $+N+1$, $N=5$



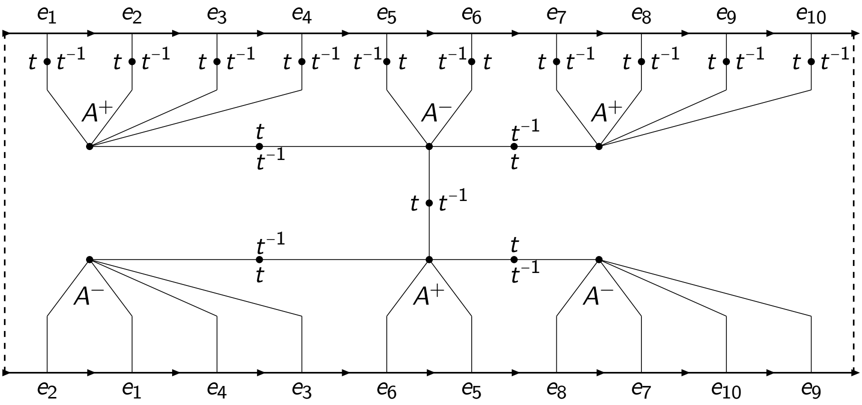
Примеры диаграмм, $n = 11$, $N = 5$



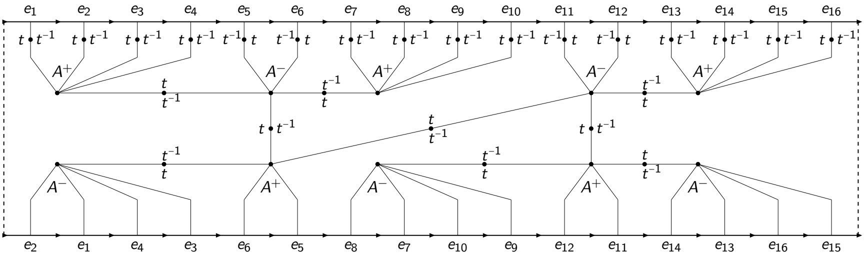
Примеры диаграмм, $n = 13$, $N = 5$



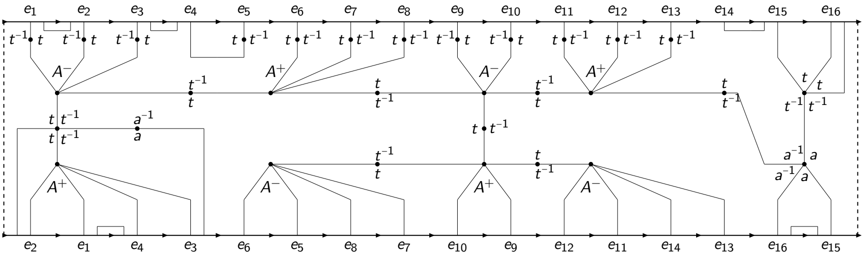
Примеры диаграмм, $n = 15$, $N = 5$



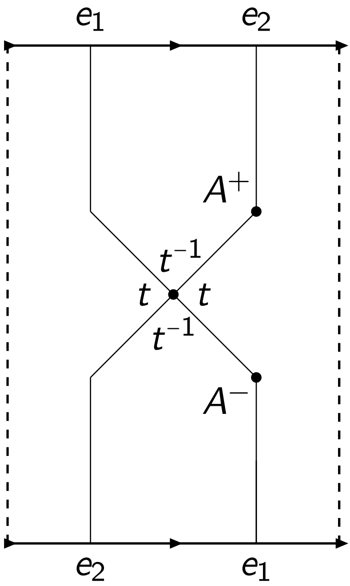
Примеры диаграмм, $n = 25$, $N = 5$



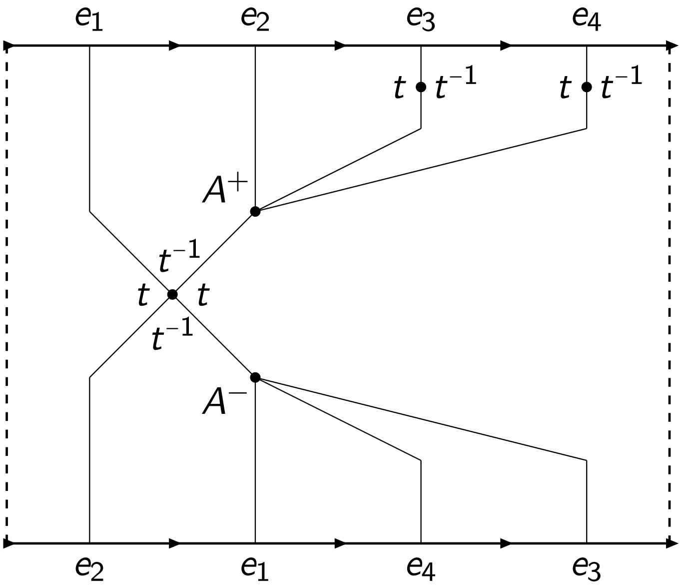
Примеры диаграмм, $n = 23$, $N = 5$



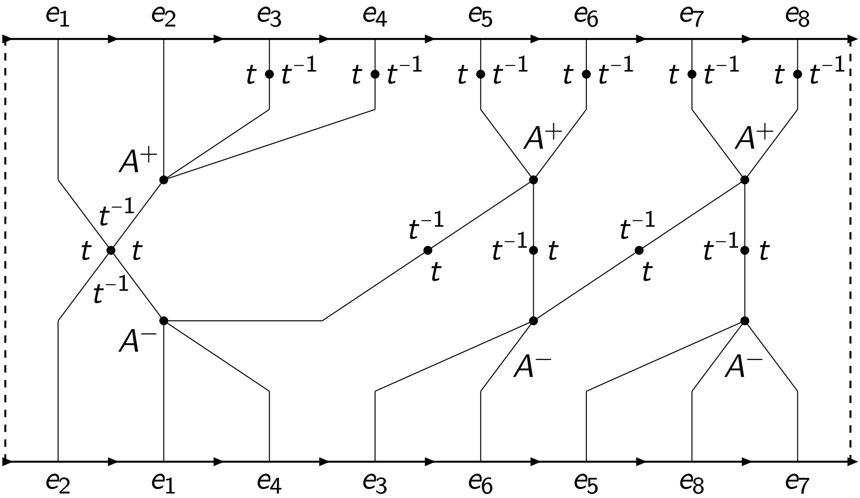
Примеры диаграмм, $n = 2$, $N = 2$



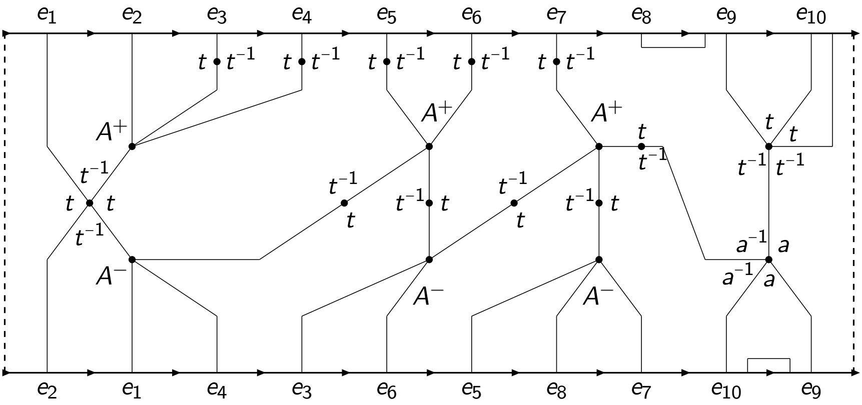
Примеры диаграмм, $n = 4$, $N = 4$



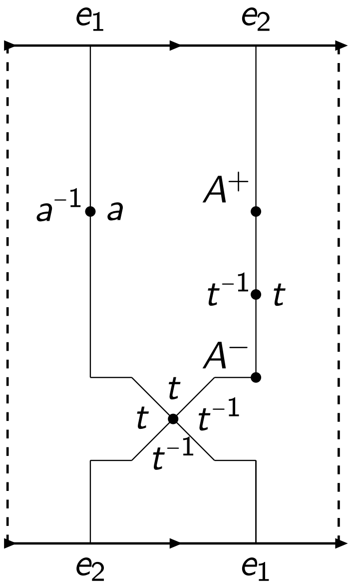
Примеры диаграмм, $n = 12$, $N = 4$



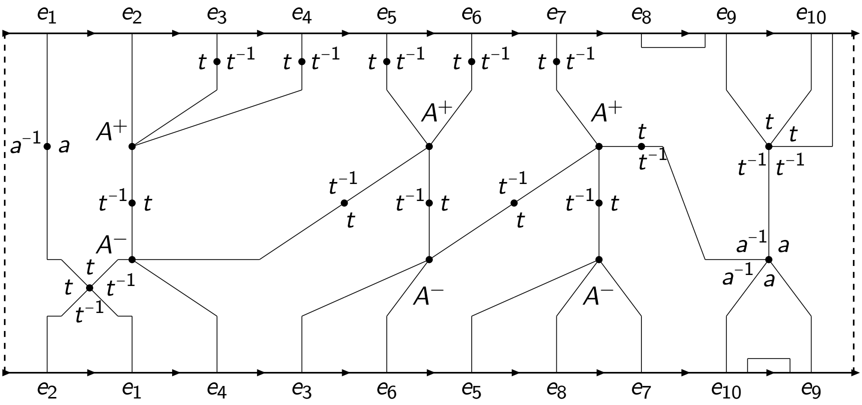
Примеры диаграмм, $n = 14$, $N = 4$



Примеры диаграмм, $n = 3$, $N = 2$



Примеры диаграмм, $n = 15$, $N = 4$



Примеры коммутаторных разложений

$\langle a\rangle_3 * \langle t\rangle$:

$$
\begin{aligned}
[a,t]^5 = &\left[t^{-1}a^2ta^2,\ t^{-1}atat^{-1}a^2ta^2t^{-1}at\right] \\
&\left[t^{-1}a^2tat^{-1}ata^2t^{-1}at,\ t^{-1}a^2tat^{-2}ata^2t^{-1}at\right]
\end{aligned}
$$

Примеры коммутаторных разложений

$\langle a\rangle_{2k+1} * \langle b\rangle_{2k+1}$:

$$(ab)^{2k+1} = [A_1, B_1][A_2, B_2]^{A_1 B_1} \dots [A_k, B_k]^{A_{k-1} B_{k-1} \dots A_1 B_1},$$

$$A_i = b^{-2i} a^{-2i+1}, \quad B_i = a^{2i} b^{2i-1}.$$

Примеры коммутаторных разложений

$\langle a\rangle_3 * \langle b\rangle_3$:

$$(ab)^3 = [ba^2, a^2b]$$

$\langle a\rangle_5 * \langle b\rangle_5$:

$$(ab)^5 = [b^3a^4, a^2b][ba^2, a^4b^3]^{b^3ab}$$

$\langle a\rangle_7 * \langle b\rangle_7$:

$$(ab)^7 = [b^5a^6, a^2b][b^3a^4, a^4b^3]^{b^5ab}[ba^2, a^6b^5]^{b^3abab}$$

Библиография

Bereznyuk, V. Yu. (2022). "Powers with minimal commutator length in free products of groups". URL: https://arxiv.org/abs/2206.05795.

Bereznyuk, V. Yu. & A. A. Klyachko (2022). "Commutator length of powers in free products of groups". *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 65:1, 102—119. DOI: 10/htcj.

Chen, L. (2018). "Spectral gap of scl in free products". *Proc. Amer. Math. Soc.* 146:7, 3143—3151. DOI: 10/htck.

Comerford, J. A., L. P. Comerford Jr. & C. C. Edmunds (1991). "Powers as products of commutators". *Comm. Algebra* 19:2, 675—684. DOI: 10/bb2qvb.

Culler, M. (1981). "Using surfaces to solve equations in free groups". *Topology* 20:2, 133—145. DOI: 10/cvcqkk.

Duncan, A. J. & J. Howie (1991). "The genus problem for one-relator products of locally indicable groups". *Math. Z.* 208:1, 225—237. DOI: 10/b7cfpr.

Howie, J. (1983). "The solution of length three equations over groups". *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 26:1, 89—96. DOI: 10/d9jmjz.

Ivanov, S. V. & A. A. Klyachko (2018). "Quasiperiodic and mixed commutator factorizations in free products of groups". *Bull. London Math. Soc.* 50:5, 832—844. DOI: 10/gfc6bq.

Schützenberger, M. P. (1959). "Sur l'equation $a^{2+n} = b^{2+m}c^{2+p}$ dans un groupe libre". *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 248, 2435—2436.