О периодических группах, насыщенных конечными группами Фробениуса

Дураков Б. Е.

Сибирский федеральный университет

Москва, 2022 г.

В докладе рассматриваются периодические группы (то есть группы, порядки всех элементов которых конечны) с некоторыми условиями конечности, введёнными красноярскими математиками.

Определение

Условием конечности называется всякое свойство группы, которым обладают все конечные группы и не обладает хотя бы одна бесконечная.

Например, таким является условие насыщенности, которое впервые появилось в работе [1] А. К. Шлёпкина в 1993 г.

---

[1] А. К. Шлепкин, «Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы», *Третья международная конференция по алгебре, 23-28 августа 1993. Сб. тезисов, с. 363, 1993*.

Определение

Группа G насыщена группами некоторого множества конечных групп $\mathfrak{X}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{X}$.

Множество $\mathfrak{X}$ называется *насыщающим* для группы G.

[3] А. И. Созутов, «О группах, насыщенных конечными группами Фробениуса», *Матем. заметки*, т. 109, № 2, с. 264—275, 2021.

Определение

Группа G насыщена группами некоторого множества конечных групп $\mathfrak{X}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{X}$.

Множество $\mathfrak{X}$ называется *насыщающим* для группы G.

Группы с условием насыщенности изучались во многих работах, приведём лишь некоторые из опубликованных за последние 5 лет [2—7].

В большинстве исследований, посвящённых этой теме, насыщающее множество $\mathfrak{X}$ состоит из конечных простых неабелевых групп, их несложных расширений и прямых произведений. В них устанавливается либо локальная конечность исследуемой периодической группы, либо существование локально конечной периодической части в группе Шункова [3].

---

[3] А. И. Созутов, «О группах, насыщенных конечными группами Фробениуса», *Матем. заметки*, т. 109, № 2, с. 264—275, 2021.

Есть несколько работ, выпадающих из этого ряда (см., например, [8][9]. В этих работах изучались группы, насыщенные конечными группами диэдра, или обобщенно полудиэдральными группами. Но в конечном итоге исследуемые периодические группы также оказывались локально конечными.

В статье [3] начаты исследования бесконечных групп, насыщенных конечными группами Фробениуса. Как в ней отмечено, среди групп с таким условием есть периодические не локально конечные группы.

[8] А. А. Шлепкин, «О периодических группах и группах Шункова, насыщенных группами диэдра и A_5», *Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика*, 2017.
[9] B. Amberg и L. Kazarin, «Periodic groups saturated with dihedral subgroups», *Book of abstracts of the international algebraic conference dedicated to70-th birthday of Anatoly Yakovlev, Saint-Petersburg*, с. 79—80, 2010.
[3] А. И. Созутов, «О группах, насыщенных конечными группами Фробениуса», *Матем. заметки*, т. 109, № 2, с. 264—275, 2021.

Группа Фробениуса

Группу G называем *группой Фробениуса с дополнением* H *и ядром* F, если выполнены условия [10]:

1. $G = F \leftthreetimes H$, где F и H — собственные подгруппы группы G;
2. H обособлена в G, т.е. H нетривиальна и $H \cap H^g = 1$ для любого элемента $g \in G \setminus H$;
3. $G \setminus F^{\#} = \bigcup\limits_{g \in G} H^g$.

[10] А. И. Созутов и В. П. Шунков, «Об одном обобщении теоремы Фробениуса на бесконечные группы», *Матем. сб.*, т. 100, № 4, с. 495—506, 1976.

Группа Фробениуса

Группу G называем *группой Фробениуса с дополнением* H *и ядром* F, если выполнены условия [10]:

1. $G = F \rtimes H$, где F и H — собственные подгруппы группы G;
2. H обособлена в G, т.е. H нетривиальна и $H \cap H^g = 1$ для любого элемента $g \in G \setminus H$;
3. $G \setminus F^{\#} = \bigcup\limits_{g \in G} H^g$.

Теорема (Фробениус, 1901 г.)

Если G — конечная группа с обособленной подгруппой H, то G — группа Фробениуса.

Бернсайду принадлежит элементарное доказательство теоремы Фробениуса в случае, если H содержит инволюцию i (1911 г.).

В этом случае F абелева и инвертируется каждой инволюцией группы G, и в $H = C_G(i)$ инволюция единственна.

---

[10] А. И. Созутов и В. П. Шунков, «Об одном обобщении теоремы Фробениуса на бесконечные группы», *Матем. сб.*, т. 100, № 4, с. 495—506, 1976.

Целью наших исследований является нахождение условий, при которых насыщенная конечными группами Фробениуса (периодическая) группа сама является группой Фробениуса, а также описание структуры её ядра и дополнения.

Целью наших исследований является нахождение условий, при которых насыщенная конечными группами Фробениуса (периодическая) группа сама является группой Фробениуса, а также описание структуры её ядра и дополнения.

Мотивация исследований, вопросы из Коуровской тетради [11]:

Вопрос 6.56 б), В. П. Шунков

Пусть $G = F \rightthreetimes \langle a \rangle$ — группа Фробениуса, причем дополнение $\langle a \rangle$ имеет простой порядок. Если группы $\langle a, a^g \rangle$ конечны для всех $g \in G$, то будет ли ядро F локально конечной группой?

Вопрос 20.94, А. И. Созутов

Существует ли бесконечная периодическая простая группа, насыщенная конечными группами Фробениуса?

Вопрос 20.95, А. И. Созутов

Будет ли группой Фробениуса периодическая группа, содержащая инволюцию и насыщенная конечными группами Фробениуса, если в ней нет четверных подгрупп Клейна?

В наших исследованиях используются следующие условия конечности. В их формулировках a и b — элементы группы G.

Определение

В группе G выполняется (a, b)-условие конечности, если в G конечны все подгруппы $\langle a, b^g \rangle$, где $g \in G$.

В наших исследованиях используются следующие условия конечности. В их формулировках a и b — элементы группы G.

Определение

В группе G выполняется (a, b)-условие конечности, если в G конечны все подгруппы $\langle a, b^g \rangle$, где $g \in G$.

Определение

Элемент a называется конечным в группе G, если в G конечны все подгруппы $\langle a, a^g \rangle$, где $g \in G$.

Заметим, что конечность элемента a в группе G равносильна выполнению (a, a)-условия конечности в ней.

В наших исследованиях используются следующие условия конечности. В их формулировках a и b — элементы группы G.

Определение

В группе G выполняется (a, b)-условие конечности, если в G конечны все подгруппы $\langle a, b^g \rangle$, где $g \in G$.

Определение

Элемент a называется конечным в группе G, если в G конечны все подгруппы $\langle a, a^g \rangle$, где $g \in G$.

Заметим, что конечность элемента a в группе G равносильна выполнению (a, a)-условия конечности в ней.

Определение

Группа G называется слабо сопряженно бипримитивно конечной, если в ней конечны все элементы простых порядков.

В наших исследованиях используются следующие условия конечности. В их формулировках a и b — элементы группы G.

Определение

В группе G выполняется (a, b)-условие конечности, если в G конечны все подгруппы $\langle a, b^g \rangle$, где $g \in G$.

Определение

Элемент a называется конечным в группе G, если в G конечны все подгруппы $\langle a, a^g \rangle$, где $g \in G$.

Заметим, что конечность элемента a в группе G равносильна выполнению (a, a)-условия конечности в ней.

Определение

Группа G называется слабо сопряженно бипримитивно конечной, если в ней конечны все элементы простых порядков.

Определение

Группа G называется группой Шункова, если для каждой её конечной подгруппы H в фактор-группе $N_G(H)/H$ все элементы простых порядков конечны.

Теорема 1

Пусть G — периодическая группа, насыщенная конечными группами Фробениуса с дополнениями чётных порядков, i — её инволюция.

Если для некоторых элементов $a, b \in G$ с условием $|a| \cdot |b| > 4$ все подгруппы $\langle a, b^g \rangle$, где $g \in G$, конечны, то $G = A \leftthreetimes C_G(i)$ — группа Фробениуса с абелевым ядром A и дополнением $C_G(i)$, все элементарные абелевы подгруппы которого циклические.

Теорема 1

Пусть G — периодическая группа, насыщенная конечными группами Фробениуса с дополнениями чётных порядков, i — её инволюция.

Если для некоторых элементов $a, b \in G$ с условием $|a| \cdot |b| > 4$ все подгруппы $\langle a, b^g \rangle$, где $g \in G$, конечны, то $G = A \leftthreetimes C_G(i)$ — группа Фробениуса с абелевым ядром A и дополнением $C_G(i)$, все элементарные абелевы подгруппы которого циклические.

Напомним, что группой Шункова называется группа G, в которой для любой подгруппы H в подгруппе $N_G(H)/H$ любые два сопряжённых элемента простого порядка порождают конечную подгруппу.

Следствие 1

Периодическая группа Шункова, насыщенная конечными группами Фробениуса с дополнениями чётных порядков, является локально конечной группой Фробениуса с абелевым ядром и дополнением с инволюцией.

Напомним, что (a, b)-условие конечности в G обозначает конечность всех подгрупп $\langle a, b^g \rangle$, где $g \in G$. Если в группе G выполнено (a, a)-условие конечности, элемент a называется конечным.

Напомним, что (a, b)-условие конечности в G обозначает конечность всех подгрупп $\langle a, b^g \rangle$, где $g \in G$. Если в группе G выполнено (a, a)-условие конечности, элемент a называется конечным.

Схема доказательства

1. G не содержит четверных подгрупп Клейна и $C_G(i)$ обособлена в G.

Напомним, что (a,b)-условие конечности в G обозначает конечность всех подгрупп $\langle a, b^g \rangle$, где $g \in G$. Если в группе G выполнено (a,a)-условие конечности, элемент a называется конечным.

Схема доказательства

1. G не содержит четверных подгрупп Клейна и $C_G(i)$ обособлена в G.
2. G является объединением своих попарно пересекающихся по 1 подгрупп $C_G(b)$ и $C_G(k)$, где k пробегает все инволюции и b не перестановочен ни с одной из инволюций.

Напомним, что (a, b)-условие конечности в G обозначает конечность всех подгрупп $\langle a, b^g \rangle$, где $g \in G$. Если в группе G выполнено (a, a)-условие конечности, элемент a называется конечным.

Схема доказательства

1. G не содержит четверных подгрупп Клейна и $C_G(i)$ обособлена в G.
2. G является объединением своих попарно пересекающихся по 1 подгрупп $C_G(b)$ и $C_G(k)$, где k пробегает все инволюции и b не перестановочен ни с одной из инволюций.
3. Компоненты $C_G(b)$ абелевы и содержат централизаторы всех своих элементов, компоненты $C_G(k)$ могут быть не локально конечными.

Напомним, что (a, b)-условие конечности в G обозначает конечность всех подгрупп $\langle a, b^g \rangle$, где $g \in G$. Если в группе G выполнено (a, a)-условие конечности, элемент a называется конечным.

Схема доказательства

1. G не содержит четверных подгрупп Клейна и $C_G(i)$ обособлена в G.
2. G является объединением своих попарно пересекающихся по 1 подгрупп $C_G(b)$ и $C_G(k)$, где k пробегает все инволюции и b не перестановочен ни с одной из инволюций.
3. Компоненты $C_G(b)$ абелевы и содержат централизаторы всех своих элементов, компоненты $C_G(k)$ могут быть не локально конечными.
4. Рассматриваются следующие случаи:
   - G содержит конечный элемент a порядка > 2;
   - G удовлетворяет (i, a)-условию конечности, i — инволюция, $|a| > 2$;
   - G удовлетворяет (a, b)-условию конечности, элементы a и b имеют простые нечётные порядки.

Строение дополнений в некоторых группах Фробениуса

Предложение 1 [12, теорема 1]

Если группа H с конечными элементами простых порядков действует свободно на абелевой группе, то её подгруппа $\Omega_1(H)$, порождённая всеми элементами простых порядков, есть группа одного из типов:

1. $\Omega_1(H)$ — (локально) циклическая группа;
2. $\Omega_1(H) = V \times L$, где V — (локально) циклическая $\{2,3\}'$-группа, $L \simeq SL_2(3)$.
3. $\Omega_1(H) = V \times L$, где V — (локально) циклическая $\{2,3,5\}'$-группа, $L \simeq SL_2(5)$;

Строение дополнений в некоторых группах Фробениуса

Предложение 1 [12, теорема 1]

Если группа H с конечными элементами простых порядков действует свободно на абелевой группе, то её подгруппа $\Omega_1(H)$, порождённая всеми элементами простых порядков, есть группа одного из типов:

1. $\Omega_1(H)$ — (локально) циклическая группа;
2. $\Omega_1(H) = V \times L$, где V — (локально) циклическая $\{2,3\}'$-группа, $L \simeq SL_2(3)$.
3. $\Omega_1(H) = V \times L$, где V — (локально) циклическая $\{2,3,5\}'$-группа, $L \simeq SL_2(5)$;

Таким образом, если группа $G = F \rtimes H$ — конечная группа Фробениуса, то либо $\Omega_1(H)$ — циклическая группа, либо содержит подгруппу, изоморфную $SL_2(3)$ или $SL_2(5)$.

Готовится к печати следующая теорема.

Теорема 2

Пусть G — периодическая группа с конечным элементом a простого порядка $p > 2$, насыщенная конечными группами Фробениуса, порядки дополнений которых кратны числу p.

Тогда $G = F \leftthreetimes H$ — группа Фробениуса с ядром F и дополнением H. Если в G есть перестановочная с a инволюция i, то $H = C_G(i)$ и F абелева, иначе $H = N_G(\langle a \rangle)$.

Готовится к печати следующая теорема.

Теорема 2

Пусть G — периодическая группа с конечным элементом a простого порядка $p > 2$, насыщенная конечными группами Фробениуса, порядки дополнений которых кратны числу p.

Тогда $G = F \leftthreetimes H$ — группа Фробениуса с ядром F и дополнением H. Если в G есть перестановочная с a инволюция i, то $H = C_G(i)$ и F абелева, иначе $H = N_G(\langle a \rangle)$.

Как следует из формулировки теоремы, доказательство этой разбивается на два случая.

Случай 1. В G есть инволюция i, перестановочная с a.

Готовится к печати следующая теорема.

Теорема 2

Пусть G — периодическая группа с конечным элементом a простого порядка $p > 2$, насыщенная конечными группами Фробениуса, порядки дополнений которых кратны числу p.

Тогда $G = F \leftthreetimes H$ — группа Фробениуса с ядром F и дополнением H. Если в G есть перестановочная с a инволюция i, то $H = C_G(i)$ и F абелева, иначе $H = N_G(\langle a \rangle)$.

Как следует из формулировки теоремы, доказательство этой разбивается на два случая.

Случай 1. В G есть инволюция i, перестановочная с a.

1. G не содержит четверных подгрупп Клейна.

Готовится к печати следующая теорема.

Теорема 2

Пусть G — периодическая группа с конечным элементом a простого порядка $p > 2$, насыщенная конечными группами Фробениуса, порядки дополнений которых кратны числу p.

Тогда $G = F \rtimes H$ — группа Фробениуса с ядром F и дополнением H. Если в G есть перестановочная с a инволюция i, то $H = C_G(i)$ и F абелева, иначе $H = N_G(\langle a \rangle)$.

Как следует из формулировки теоремы, доказательство этой разбивается на два случая.

Случай 1. В G есть инволюция i, перестановочная с a.

1. G не содержит четверных подгрупп Клейна.
2. $H = C_G(i)$ обособлена в G, доказательство завершается применением [13, теорема 2.12].

Случай 2. Элемент a не перестановочен ни с одной инволюцией из G.

[13] А. М. Попов и др., *Группы с системами фробениусовых подгрупп*. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004, с. 211.

Случай 2. Элемент a не перестановочен ни с одной инволюцией из G.

1. Если b — элемент порядка p группы G, то подгруппа $N_G(\langle b \rangle)$ не содержит элементарных абелевых подгрупп ранга $\geqslant 2$.

[13] А. М. Попов и др., *Группы с системами фробениусовых подгрупп*. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004, с. 211.

Случай 2. Элемент a не перестановочен ни с одной инволюцией из G.

1. Если b — элемент порядка p группы G, то подгруппа $N_G(\langle b \rangle)$ не содержит элементарных абелевых подгрупп ранга $\geqslant 2$.
2. Для всякого $g \in G$ подгруппа $L_g = \langle a, a^g \rangle$ — конечная группа Фробениуса с дополнением $\langle a \rangle$. В силу теоремы 2.11 из [13] получаем $G = F \rightthreetimes H$.

---

[13] А. М. Попов и др., *Группы с системами фробениусовых подгрупп*. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004, с. 211.

Случай 2. Элемент a не перестановочен ни с одной инволюцией из G.

1. Если b — элемент порядка p группы G, то подгруппа $N_G(\langle b \rangle)$ не содержит элементарных абелевых подгрупп ранга $\geqslant 2$.
2. Для всякого $g \in G$ подгруппа $L_g = \langle a, a^g \rangle$ — конечная группа Фробениуса с дополнением $\langle a \rangle$. В силу теоремы 2.11 из [13] получаем $G = F \rightthreetimes H$.
3. H обособлена в G.

[13] А. М. Попов и др., *Группы с системами фробениусовых подгрупп*. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004, с. 211.

Случай 2. Элемент a не перестановочен ни с одной инволюцией из G.

1. Если b — элемент порядка p группы G, то подгруппа $N_G(\langle b \rangle)$ не содержит элементарных абелевых подгрупп ранга $\geqslant 2$.
2. Для всякого $g \in G$ подгруппа $L_g = \langle a, a^g \rangle$ — конечная группа Фробениуса с дополнением $\langle a \rangle$. В силу теоремы 2.11 из [13] получаем $G = F \leftthreetimes H$.
3. H обособлена в G.
4. Все подгруппы порядка p группы G сопряжены в ней.

[13] А. М. Попов и др., *Группы с системами фробениусовых подгрупп*. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004, с. 211.

Случай 2. Элемент a не перестановочен ни с одной инволюцией из G.

1. Если b — элемент порядка p группы G, то подгруппа $N_G(\langle b\rangle)$ не содержит элементарных абелевых подгрупп ранга $\geqslant 2$.
2. Для всякого $g \in G$ подгруппа $L_g = \langle a, a^g\rangle$ — конечная группа Фробениуса с дополнением $\langle a\rangle$. В силу теоремы 2.11 из [13] получаем $G = F \rtimes H$.
3. H обособлена в G.
4. Все подгруппы порядка p группы G сопряжены в ней.
5. Всякий элемент $x \in G \setminus F$ лежит в одной из сопряжённых с H подгрупп.

[13] А. М. Попов и др., *Группы с системами фробениусовых подгрупп*. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004, с. 211.

Случай 2. Элемент a не перестановочен ни с одной инволюцией из G.

1. Если b — элемент порядка p группы G, то подгруппа $N_G(\langle b \rangle)$ не содержит элементарных абелевых подгрупп ранга $\geqslant 2$.
2. Для всякого $g \in G$ подгруппа $L_g = \langle a, a^g \rangle$ — конечная группа Фробениуса с дополнением $\langle a \rangle$. В силу теоремы 2.11 из [13] получаем $G = F \leftthreetimes H$.
3. H обособлена в G.
4. Все подгруппы порядка p группы G сопряжены в ней.
5. Всякий элемент $x \in G \setminus F$ лежит в одной из сопряжённых с H подгрупп.

В дальнейшем цель заменить условие наличия в G конечного элемента a на (a, b)-условие конечности, как в теореме 1.

---

[13] А. М. Попов и др., *Группы с системами фробениусовых подгрупп*. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004, с. 211.

Приведём также результаты, которые доказываются с использованием методов статьи [3]. Они опубликованы в статье [14] с более детальным описанием строения группы G.

[14] B. E. Durakov and A. I. Sozutov, "On periodic groups saturated with finite frobenius groups", *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, vol. 35, pp. 73–86, 2021. DOI: `https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.35.73`.

Приведём также результаты, которые доказываются с использованием методов статьи [3]. Они опубликованы в статье [14] с более детальным описанием строения группы G.

Теорема 3

Периодическая слабо сопряженно бипримитивно конечная группа G с нетривиальным локально конечным радикалом R, насыщенная конечными группами Фробениуса, является группой Фробениуса с ядром $F \neq R$ и дополнением H, при этом либо $F < R$, либо $F > R$.

---

[14] B. E. Durakov and A. I. Sozutov, "On periodic groups saturated with finite frobenius groups", *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, vol. 35, pp. 73–86, 2021. DOI: https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.35.73.

Приведём также результаты, которые доказываются с использованием методов статьи [3]. Они опубликованы в статье [14] с более детальным описанием строения группы G.

Теорема 3

Периодическая слабо сопряженно бипримитивно конечная группа G с нетривиальным локально конечным радикалом R, насыщенная конечными группами Фробениуса, является группой Фробениуса с ядром $F \neq R$ и дополнением H, при этом либо $F < R$, либо $F > R$.

Группа G называется бинарно конечной, если каждые два её элемента порождают конечную подгруппу.

[14] B. E. Durakov and A. I. Sozutov, "On periodic groups saturated with finite frobenius groups", *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, vol. 35, pp. 73–86, 2021. DOI: `https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.35.73`.

Приведём также результаты, которые доказываются с использованием методов статьи [3]. Они опубликованы в статье [14] с более детальным описанием строения группы G.

Теорема 3

Периодическая слабо сопряженно бипримитивно конечная группа G с нетривиальным локально конечным радикалом R, насыщенная конечными группами Фробениуса, является группой Фробениуса с ядром $F \neq R$ и дополнением H, при этом либо $F < R$, либо $F > R$.

Группа G называется бинарно конечной, если каждые два её элемента порождают конечную подгруппу.

Теорема 4

Бинарно конечная группа G с нетривиальным локально конечным радикалом R, насыщенная конечными группами Фробениуса, является группой Фробениуса с локально конечным дополнением H. Если G не локально конечна, то $R < F$.

---

[14] B. E. Durakov and A. I. Sozutov, "On periodic groups saturated with finite frobenius groups", *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, vol. 35, pp. 73–86, 2021. DOI: https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.35.73.

Следующие результаты о группах 2-ранга 1 отправлены в печать [15]. Под 2-рангом группы здесь и далее понимается максимум рангов её элементарных абелевых 2-подгрупп.

[15] Б. Е. Дураков и А. И. Созутов, «О группах с инволюциями, насыщенных конечными группами Фробениуса», *Сибирский математический журнал*, 2022.

Следующие результаты о группах 2-ранга 1 отправлены в печать [15]. Под 2-рангом группы здесь и далее понимается максимум рангов её элементарных абелевых 2-подгрупп.

Теорема 5

Пусть в насыщенной конечными группами Фробениуса группе G 2-ранга один есть конечный элемент a четного порядка, большего двух. Тогда $G = F \leftthreetimes C_G(i)$, где i — инволюция из $\langle a \rangle$, F — периодическая абелева группа, инвертируемая инволюцией i, и для любой периодической подгруппы $T \leq C_G(i)$ произведение $F \leftthreetimes T$ является группой Фробениуса с ядром F и дополнением T.

---

[15] Б. Е. Дураков и А. И. Созутов, «О группах с инволюциями, насыщенных конечными группами Фробениуса», *Сибирский математический журнал*, 2022.

Через $\Omega_1(G)$ обозначается подгруппа группы G, порожденная всеми элементами простых порядков из G.

Произвольную группу $G = F \leftthreetimes H$, в которой $\Omega_1(G) = F \leftthreetimes \Omega_1(H)$ — локально конечная группа Фробениуса назовём ΩFA-группой, если F абелева.

Через $\Omega_1(G)$ обозначается подгруппа группы G, порожденная всеми элементами простых порядков из G.

Произвольную группу $G = F \leftthreetimes H$, в которой $\Omega_1(G) = F \leftthreetimes \Omega_1(H)$ — локально конечная группа Фробениуса назовём ΩFA-группой, если F абелева.

Теорема 6

Группа G 2-ранга 1 с конечным элементом четного порядка > 2 и слабо сопряженно бипримитивно конечным централизатором инволюции тогда и только тогда является ΩFA-группой, когда она насыщена конечными группами Фробениуса.

Для групп 2-ранга ≥ 2 доказаны [15]

Теорема 7

Пусть слабо сопряженно бипримитивно конечная группа G содержит четверную группу Клейна и насыщена конечными группами Фробениуса. Тогда $G = F \leftthreetimes H$, где F — периодическая группа, $\Omega_1(H)$ — локально циклическая группа без инволюций, и $\Omega_1(G) = F \leftthreetimes \Omega_1(H)$ группа Фробениуса с ядром F и дополнением $\Omega_1(H)$.

Теорема 8

Пусть группа G из теоремы 7 не содержит локально конечных нормальных подгрупп. Тогда силовская 2-подгруппа T нормальна в G, централизатор $C_G(T)$ содержит подгруппу Q, порожденную всеми элементами простых нечетных порядков из F, и Q является прямым произведением своих силовских p-подгрупп.

---

[15] Б. Е. Дураков и А. И. Созутов, «О группах с инволюциями, насыщенных конечными группами Фробениуса», *Сибирский математический журнал*, 2022.

Список литературы I

[1] А. К. Шлепкин, «Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы», *Третья международная конференция по алгебре, 23-28 августа 1993. Сб. тезисов*, с. 363, 1993.

[2] Д. В. Лыткина, А. И. Созутов и А. А. Шлёпкин, «Периодические группы 2-ранга два, насыщенные конечными простыми группами», *Сиб. электрон. матем. изв.*, т. 15, с. 786—796, 2018.

[3] А. И. Созутов, «О группах, насыщенных конечными группами Фробениуса», *Матем. заметки*, т. 109, № 2, с. 264—275, 2021.

[4] Д. В. Лыткина и А. А. Шлёпкин, «Периодические группы, насыщенные линейными группами степени 2 и унитарными группами степени 3 над конечными полями нечетных характеристик», *Математические труды*, т. 21, № 1, с. 55—72, 2018.

Список литературы II

[5] А. А. Шлепкин, «Периодические группы, насыщенные конечными простыми группами лиева типа ранга 1», *Алгебра и логика*, т. 57, № 1, с. 118—125, 2018.

[6] Д. В. Лыткина и В. Д. Мазуров, «Периодические группы, насыщенные конечными простыми группами лиева типа B_3», *Сиб. матем. журн.*, т. 61, № 3, с. 634—640, 2020.

[7] А. А. Шлепкин, «О группах Шункова, насыщенных конечными простыми группами», *Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика.*, т. 24, с. 51—67, 2018.

[8] А. А. Шлепкин, «О периодических группах и группах Шункова, насыщенных группами диэдра и A_5», *Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика*, 2017.

[9] B. Amberg и L. Kazarin, «Periodic groups saturated with dihedral subgroups», *Book of abstracts of the international algebraic conference dedicated to70-th birthday of Anatoly Yakovlev, Saint-Petersburg*, с. 79—80, 2010.

Список литературы III

[10] А. И. Созутов и В. П. Шунков, «Об одном обобщении теоремы Фробениуса на бесконечные группы», *Матем. сб.*, т. 100, № 4, с. 495—506, 1976.

[11] *Коуровская тетрадь: нерешённые вопросы теории групп*, 15-е изд. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2002.

[12] А. И. Созутов, «О строении неинвариантного множителя в некоторых группах Фробениуса», *Сиб. мат. журн..*, т. 35, № 4, с. 893—901, 1994.

[13] А. М. Попов, А. И. Созутов и В. П. Шунков, *Группы с системами фробениусовых подгрупп*. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004, с. 211.

[14] B. E. Durakov and A. I. Sozutov, “On periodic groups saturated with finite frobenius groups”, *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, vol. 35, pp. 73–86, 2021. DOI: https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.35.73.

Список литературы IV

[15] Б. Е. Дураков и А. И. Созутов, «О группах с инволюциями, насыщенных конечными группами Фробениуса», *Сибирский математический журнал*, 2022.