

Группы йорданова типа

Алексей Старолетов

Новосибирский государственный университет
Математический центр в Академгородке

Москва, 10.11.2022

Определение

Через $\mathbb{F}$ обозначается поле, при этом $\text{char } \mathbb{F} \neq 2$.

A – коммутативная $\mathbb{F}$ -алгебра.

Определение

Идемпотент $a \in A$ называется осью, если оператор (левого) сдвига ad_a полупрост:

$$A = \bigoplus_{\lambda \in \text{Spec}(ad_a)} A_\lambda(a), \text{ где } A_\lambda(a) = \{b \in A \mid ab = \lambda b\}.$$

Замечание: $a^2 = a \Rightarrow 1 \in \text{Spec}(ad_a)$.

Определение

Ось a называется примитивной, если $\dim(A_1(a)) = 1$, т.е. $A_1(a) = \langle a \rangle$.

Определение

A называется (примитивной) аксиальной алгеброй, если она порождается множеством (примитивных) осей.

Пример

$M_2(\mathbb{F})^+$ – алгебра матриц относительно йорданова произведения $\circ$: $X \circ Y = \frac{XY+YX}{2}$.

Она порождается идемпотентами

$$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{12} + e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_{11} + e_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

поскольку $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$e_{11} \circ e_{11} = e_{11}, \quad e_{11} \circ e_{12} = \frac{1}{2}e_{12}, \quad e_{11} \circ e_{21} = \frac{1}{2}e_{21}, \quad e_{11} \circ e_{22} = 0.$$

Таким образом, $[ad_{e_{11}}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Поскольку все порождающие идемпотенты подобны, то все они полупросты и имеют спектр $\{0, 1, \frac{1}{2}\}$.

Таблица слияния

Предположим, что $\eta \in \mathbb{F}$ и $\eta \neq \{0, 1\}$.

Определение (Ререн, Холл, Шпекторов, 2015)

A называется аксиальной алгеброй йорданова типа η , если она порождается множеством осей X таким, что произведение собственных векторов оператора ad_a для каждой оси $a \in X$ подчиняются закону слияния $\mathcal{J}(\eta)$:

*	1	0	η
1	1		η
0		0	η
η	η	η	1, 0

Это означает, что $\text{Spec}(ad_a) \subseteq \{1, 0, \eta\}$ и произведение векторов из $A_\lambda(a)$ и $A_\mu(a)$ лежит в сумме подпространств по элементам множества $\lambda * \mu$.

Примеры: $A_1(a)A_0(a) = \{0\}$, $A_\eta(a)A_\eta(a) \subseteq A_1(a) + A_0(a)$

Пример 1: йордановы алгебры

Определение

A – йорданова алгебра, если $x^2(yx) = (x^2y)x$ для всех $x, y \in A$.

Свойства

Если a – идемпотент в A , то хорошо известно, что

- $\text{Spec}(ad_a) \subseteq \{0, 1, \frac{1}{2}\}$;
- $A = A_1(a) \oplus A_0(a) \oplus A_{\frac{1}{2}}(a)$ (разложение Пирса);
- произведение элементов $A_i(a)$ и $A_j(a)$ соответствует таблице слияния $\mathcal{J}(\frac{1}{2})$.

Если A порождается множеством идемпотентов, то A – аксиальная алгебра йорданова типа $\frac{1}{2}$.

Пример: Если B – ассоциативная алгебра, то B^+ с умножением $x \circ y = \frac{xy + yx}{2}$ является йордановой.

Группы 3-транспозиций

Определение

Пара (G, D) называется группой 3-транспозиций, если

- G – группа;
- D – нормальное множество инволюций в G ;
- $G = \langle D \rangle$;
- $|de| \leq 3$ для любых $d, e \in D$.

Примеры

$G = S_n$, $D = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$,

$G = Sp_{2n}(2)$, $n \geq 3$, D – класс симплектических транспозиций;

G – одна из групп Фишера Fi_{22} , Fi_{23} , Fi_{24} .

Замечание

Если в определении заменить $|de| \leq 3$ на $|de| \leq n$, то получится определение группы n -транспозиций.

Пример 2: алгебры Мацуо

Определение

Пусть (G, D) – группа 3-транспозиций и $\eta \in \mathbb{F} \setminus \{0, 1\}$.

Алгебра Мацуо $M_\eta(G, D)$ над полем $\mathbb{F}$ имеет D в качестве своего базиса, умножение на котором задаётся следующим образом:

$$c \cdot d = \begin{cases} c, & \text{если } c = d; \\ 0, & \text{если } |cd| = 2; \\ \frac{\eta}{2}(c + d - e), & \text{если } |cd| = 3 \text{ и } e = c^d = d^c. \end{cases}$$

Теорема (Ререн, Холл, Шпекторов, 2015)

Алгебра Мацуо – примитивная аксиальная алгебра йорданова типа η , элементы D – порождающие примитивные оси.

Случай $\eta \neq \frac{1}{2}$

Теорема (РХШ2015, СХШ2018)

Если $\eta \neq \frac{1}{2}$, то аксиальная алгебра йорданова типа является фактором некоторой алгебры Мацуо.

Поэтому наиболее интересный случай – $\eta = \frac{1}{2}$.

Есть два основных примера алгебр: йордановы алгебры, порождённые идемпотентами и алгебры Мацуо для $\eta = \frac{1}{2}$.

Теорема (Горшков, С., 2020)

Если A имеет йорданов тип $\frac{1}{2}$ и порождается тремя примитивными осями, то A – йорданова алгебра размерности не более 9.

Основные задачи

Вопрос

Верно ли, что всякая алгебра йорданова типа $\frac{1}{2}$ является либо йордановой алгеброй, либо фактором некоторой алгебры Мацуо?

Замечание: алгебры Мацуо для $\eta = 1/2$ могут быть нейордановыми.

Вопрос

Верно ли, что конечно порождённая аксиальная алгебра йорданова типа является конечномерной?

Наблюдение

Ключевой случай – 4-порождённые алгебры, поскольку линейризованное тождество йордана выглядит так:

$$(xz, y, w) + (zw, y, x) + (wx, y, z) = 0,$$

где $(a, b, c) := (ab)c - a(bc)$ – ассоциатор.

Инволюции Миямото

Определение

Пусть A – аксиальная алгебра йорданова типа η . Поскольку таблица слияния $\mathcal{J}(\eta)$ является $\mathbb{Z}_2$ -градуированной, для каждой оси $a \in A$ можно построить инволютивный автоморфизм τ_a :

Определим $X_+ = A_1(a) \oplus A_0(a)$ и $X_- = A_\eta(a)$, то $\tau_a|_{X_+} = 1_{X_+}$, $\tau_a|_{X_-} = -1_{X_-}$.

Аutomорфизм τ_a называется инволюцией Миямото.

Пример: $A = M_\eta(G, D)$ – алгебра Мацуо. Если $a, b \in D$, то $a^{\tau_b} = a^b$.

Лемма

Если $\alpha \in \text{Aut}(A)$, то $(\tau_a)^\alpha = \tau_{a^\alpha}$.

Твёрдая подалгебра

Определение

Пусть A порождается множеством осей X . Подалгебра, $B = \langle a, b \rangle$, порождённая двумя осями a и $b \in X$ такими, что $\dim B = 3$ и $|\tau_a \tau_b| > 4$, называется твёрдой.

Теорема (Горшков, С., Шпекторов, 2022–)

Если B – твёрдая подалгебра, то каждый примитивный идемпотент из B является осью в A .

Группы йорданова типа

Определение

Если A порождается множеством осей X , то $G = \langle \tau_x \mid x \in X \rangle$ называется группой йорданова типа.

Пример

Группы 3-транспозиций без центра – группы йорданова типа.

Задача

Какие группы являются группами йорданова типа?

Результаты

Теорема

Пусть A порождается тремя осями a, b, c . Определим $G = \langle \tau_a, \tau_b, \tau_c \rangle$ и $D = \tau_a^G \cup \tau_b^G \cup \tau_c^G$. Предположим, что (G, D) является группой 4-транспозиций, и G не порождается двумя элементами из D . Тогда выполнено одно из следующих условий:

- $\dim A = 9$ и $G \in \{PSL_2(7), ((\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) : \mathbb{Z}_3) : \mathbb{Z}_2, (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) : \mathbb{Z}_2\}$;
- $\dim A = 6$ и $G = S_4$;
- $\dim A = 4$ и $G = S_4, D_{12}$.

Лемма

Пусть a, b, c – три оси в A и $G = \langle \tau_a, \tau_b, \tau_c \rangle$. Обозначим $B = \langle\langle a, b, c \rangle\rangle$ – подалгебра, порождённая a, b и c . Тогда B инвариантна относительно действия τ_a, τ_b, τ_c и ядро гомоморфизма из G в группу, получающуюся сужением элементов G на B , лежит в $Z(G)$.

Результаты

Теорема

Пусть $G = \langle \tau_a, \tau_b, \tau_c \rangle$ для трёх осей a, b, c алгебры A . Пусть H порождается сужениями τ_a, τ_b, τ_c на подалгебру, порождённую a, b и c . Тогда

- если $H = PSL_2(7)$, то $G \in \{PSL_2(7), \mathbb{Z}_2 \times PSL_2(7)\}$;
- если $H = ((\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4) : \mathbb{Z}_3) : \mathbb{Z}_2$, то $G = H$;
- если $H = (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) : \mathbb{Z}_2$, то $G \in \{H, ((\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3) : \mathbb{Z}_3) : \mathbb{Z}_2\}$;
- если $H = S_4$, то $G \in \{S_4, \mathbb{Z}_2 \times S_4\}$;
- если $H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, то $G \in \{H, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, (\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2) : \mathbb{Z}_2\}$;
- если $H = D_{12}$, то $G \in \{D_{12}, (\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2) : \mathbb{Z}_2\}$.

Что дальше

Шпекторов и Макинрой предложили в 2020 году алгоритм построения по данной группе всевозможных аксиальных алгебр йорданова типа, базис которых совпадает с множеством инволюций из сопряжённого класса.

Задача

Описать все 4-порождённые группы 4-транспозиций с ограничениями на 3-порождённые подгруппы из теоремы.

Литература

[PXШ2015] J.Hall, F.Rehren, S.Shpectorov, *Primitive axial algebras of Jordan type*. J. Algebra 437 (2015), 79–115.

[CXШ2018] J.Hall, Y.Segev, S.Shpectorov, *Miyamoto involutions in axial algebras of Jordan type half*. Israel J. Math. 223 (2018), no. 1, 261–308.

[ГС2020] I.Gorshkov, A.Staroletov, *On primitive 3-generated axial algebras of Jordan type*. J. Algebra 563 (2020), 74–99.