Об аппроксимируемости фундаментальных групп некоторых графов групп

(Некоторые аппроксимационные свойства фундаментальных групп графов групп)

Соколов Евгений Викторович

Ивановский государственный университет

Вторая конференция Математических центров России,
7–11 ноября 2022 г.

Всюду далее, если $\mathcal{C}$ — некоторый класс групп и X — группа, то $\mathcal{C}^*(X)$ — семейство всех нормальных подгрупп группы X, фактор-группы по которым принадлежат классу $\mathcal{C}$.

Группа X называется аппроксимируемой классом групп $\mathcal{C}$, если

$$\bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(X)} N = 1$$

или, что то же самое, для любого элемента $x \in X \setminus \{1\}$ существует гомоморфизм σ группы X на группу из класса $\mathcal{C}$ такой, что $x\sigma \neq 1$.

Подгруппа Y группы X называется отделимой в этой группе классом $\mathcal{C}$, если

$$\bigcap_{N \in \mathcal{C}^*(X)} YN = Y,$$

т. е. для любого элемента $x \in X \setminus Y$ найдется гомоморфизм σ группы X на группу из класса $\mathcal{C}$ такой, что $x\sigma \notin Y\sigma$.

Аппроксимируемость и отделимость классом всех конечных групп называются финитными.

Фундаментальная группа графа групп

Пусть Γ — непустой связный неориентированный граф с множеством вершин $\mathcal{V}$ и множеством ребер $\mathcal{E}$ (допускаются петли и кратные ребра). Определим ориентированный граф групп $\mathcal{G}(\Gamma)$ над Γ, сопоставляя

- каждой вершине $v \in \mathcal{V}$ некоторую (вершинную) группу G_v,
- каждому ребру $e \in \mathcal{E}$ — направление, (реберную) группу H_e и инъективные гомоморфизмы

$$\varphi_{+e} \colon H_e \to G_{e(1)}, \quad \varphi_{-e} \colon H_e \to G_{e(-1)}$$

(где $e(1)$ и $e(-1)$ — вершины графа Γ, являющиеся концами ребра e).

Подгруппы $H_e\varphi_{+e}$ и $H_e\varphi_{-e}$ будем называть реберными.

Пусть $\mathcal{T}$ — некоторое максимальное дерево в (неориентированном) графе Γ и $\mathcal{E}_\mathcal{T}$ — множество его ребер. Фундаментальной группой графа групп $\mathcal{G}(\Gamma)$ называется группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ с представлением

$$\left\langle \begin{array}{l} G_v \ (v \in \mathcal{V}), \\ t_e \ (e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_\mathcal{T}) \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{r} h_e\varphi_{+e} = h_e\varphi_{-e} \ (e \in \mathcal{E}_\mathcal{T},\ h_e \in H_e), \\ t_e^{-1}(h_e\varphi_{+e})t_e = h_e\varphi_{-e} \ (e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_\mathcal{T},\ h_e \in H_e) \end{array} \right\rangle.$$

Пусть Γ — непустой связный неориентированный граф с множеством вершин $\mathcal{V}$ и множеством ребер $\mathcal{E}$ (допускаются петли и кратные ребра). Определим ориентированный граф групп $\mathcal{G}(\Gamma)$ над Γ, сопоставляя

- каждой вершине $v \in \mathcal{V}$ некоторую (вершинную) группу G_v,
- каждому ребру $e \in \mathcal{E}$ — направление, (реберную) группу H_e и инъективные гомоморфизмы

$$\varphi_{+e}\colon H_e \to G_{e(1)}, \quad \varphi_{-e}\colon H_e \to G_{e(-1)}$$

(где $e(1)$ и $e(-1)$ — вершины графа Γ, являющиеся концами ребра e).

Подгруппы $H_e\varphi_{+e}$ и $H_e\varphi_{-e}$ будем называть реберными.

Пусть $\mathcal{T}$ — некоторое максимальное дерево в (неориентированном) графе Γ и $\mathcal{E}_\mathcal{T}$ — множество его ребер. Фундаментальной группой графа групп $\mathcal{G}(\Gamma)$ называется группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ с представлением

$$\left\langle \begin{matrix} G_v \ (v \in \mathcal{V}), \\ t_e \ (e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_\mathcal{T}) \end{matrix} \ \middle|\ \begin{matrix} h_e\varphi_{+e} = h_e\varphi_{-e} \ (e \in \mathcal{E}_\mathcal{T},\ h_e \in H_e), \\ t_e^{-1}(h_e\varphi_{+e})t_e = h_e\varphi_{-e} \ (e \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{E}_\mathcal{T},\ h_e \in H_e) \end{matrix} \right\rangle.$$

Обобщенное свободное произведение двух групп

Если $\mathcal{E} = \{e\}$ и $e(1) \neq e(-1)$, то группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ называется обобщенным свободным произведением групп $G_{e(1)}$ и $G_{e(-1)}$ с подгруппами $H_e\varphi_{+e}$ и $H_e\varphi_{-e}$, объединенными в соответствии с изоморфизмом $\varphi_{+e}^{-1}\varphi_{-e}$.
Для данной конструкции будем использовать более простое обозначение:

$$P = \langle A * B;\ H = K,\ \varphi \rangle,$$

где $A = G_{e(1)}$, $B = G_{e(-1)}$, $H = H_e\varphi_{+e}$, $K = H_e\varphi_{-e}$, и $\varphi = \varphi_{+e}^{-1}\varphi_{-e}$.

Любой элемент $x \in P$ обладает несократимой записью вида

$$x = x_1 x_2 \ldots x_n,$$

где $x_i \in A \cup B$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и, если $n > 1$, то $x_i \in A \setminus H$, $x_{i+1} \in B \setminus K$ или $x_i \in B \setminus K$, $x_{i+1} \in A \setminus H$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$.

Теорема 1 (О. Шрейер, 1927)

Если элемент $x \in P$ обладает несократимой записью длины $n > 1$, то он отличен от 1.

Обобщенное свободное произведение двух групп

Если $\mathcal{E} = \{e\}$ и $e(1) \neq e(-1)$, то группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ называется обобщенным свободным произведением групп $G_{e(1)}$ и $G_{e(-1)}$ с подгруппами $H_e\varphi_{+e}$ и $H_e\varphi_{-e}$, объединенными в соответствии с изоморфизмом $\varphi_{+e}^{-1}\varphi_{-e}$.
Для данной конструкции будем использовать более простое обозначение:

$$P = \langle A * B;\ H = K,\ \varphi\rangle,$$

где $A = G_{e(1)}$, $B = G_{e(-1)}$, $H = H_e\varphi_{+e}$, $K = H_e\varphi_{-e}$, и $\varphi = \varphi_{+e}^{-1}\varphi_{-e}$.

Любой элемент $x \in P$ обладает несократимой записью вида

$$x = x_1 x_2 \ldots x_n,$$

где $x_i \in A \cup B$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и, если $n > 1$, то $x_i \in A \setminus H$, $x_{i+1} \in B \setminus K$ или $x_i \in B \setminus K$, $x_{i+1} \in A \setminus H$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$.

Теорема 1 (О. Шрейер, 1927)

Если элемент $x \in P$ обладает несократимой записью длины $n > 1$, то он отличен от 1.

Фильтрационный метод Г. Баумслага

Общий вопрос

Если группы, из которых составлена та или иная свободная конструкция, аппроксимируются некоторым классом групп $\mathcal{C}$, то что можно сказать об аппроксимируемости этим классом конструкции в целом?

Пусть $P = \langle A * B;\ H = K,\ \varphi \rangle$.

Теорема 2 (Г. Баумслаг, 1963)

Если группы A и B конечны, то группа P финитно аппроксимируема.

Подгруппы $R \leqslant A$ и $S \leqslant B$ будем называть (H, K, φ)-совместимыми, если R нормальна в группе A, S нормальна в группе B и $(R \cap H)\varphi = S \cap K$. Для таких подгрупп определено обобщенное свободное произведение

$$P_{R,S} = \langle A/R * B/S;\ HR/R = KS/S,\ \varphi_{R,S} \rangle,$$

где

$$\varphi_{R,S} \colon HR/R \to KS/S, \quad hR \mapsto (h\varphi)S \quad (h \in H),$$

и тождественное отображение образующих группы P в группу $P_{R,S}$ продолжается до сюръективного гомоморфизма $\rho_{R,S} \colon P \to P_{R,S}$.

Общий вопрос

Если группы, из которых составлена та или иная свободная конструкция, аппроксимируются некоторым классом групп $\mathcal{C}$, то что можно сказать об аппроксимируемости этим классом конструкции в целом?

Пусть $P = \langle A * B;\ H = K,\ \varphi \rangle$.

Теорема 2 (Г. Баумслаг, 1963)

Если группы A и B конечны, то группа P финитно аппроксимируема.

Подгруппы $R \leqslant A$ и $S \leqslant B$ будем называть (H, K, φ)-совместимыми, если R нормальна в группе A, S нормальна в группе B и $(R \cap H)\varphi = S \cap K$. Для таких подгрупп определено обобщенное свободное произведение

$$P_{R,S} = \langle A/R * B/S;\ HR/R = KS/S,\ \varphi_{R,S} \rangle,$$

где

$$\varphi_{R,S} \colon HR/R \to KS/S, \quad hR \mapsto (h\varphi)S \quad (h \in H),$$

и тождественное отображение образующих группы P в группу $P_{R,S}$ продолжается до сюръективного гомоморфизма $\rho_{R,S} \colon P \to P_{R,S}$.

Общий вопрос

Если группы, из которых составлена та или иная свободная конструкция, аппроксимируются некоторым классом групп $\mathcal{C}$, то что можно сказать об аппроксимируемости этим классом конструкции в целом?

Пусть $P = \langle A * B;\ H = K,\ \varphi \rangle$.

Теорема 2 (Г. Баумслаг, 1963)

Если группы A и B конечны, то группа P финитно аппроксимируема.

Подгруппы $R \leqslant A$ и $S \leqslant B$ будем называть (H, K, φ)-совместимыми, если R нормальна в группе A, S нормальна в группе B и $(R \cap H)\varphi = S \cap K$. Для таких подгрупп определено обобщенное свободное произведение

$$P_{R,S} = \langle A/R * B/S;\ HR/R = KS/S,\ \varphi_{R,S} \rangle,$$

где

$$\varphi_{R,S}\colon HR/R \to KS/S, \quad hR \mapsto (h\varphi)S \quad (h \in H),$$

и тождественное отображение образующих группы P в группу $P_{R,S}$ продолжается до сюръективного гомоморфизма $\rho_{R,S}\colon P \to P_{R,S}$.

Фильтрационный метод Г. Баумслага

Если σ — гомоморфизм группы P на конечную группу, то подгруппы

$$R = \ker\sigma \cap A, \quad S = \ker\sigma \cap B$$

(H, K, φ)-совместимы и имеют конечные индексы в группах A и B соответственно, а отображение σ продолжает гомоморфизм $\rho_{R,S}$.

Теорема 3 (Г. Баумслаг, 1963)

Пусть Ω — семейство всех пар (H, K, φ)-совместимых подгрупп групп A и B, имеющих в этих группах конечные индексы.
Если выполняются следующие условия

(i) $$\bigcap_{(R,S)\in\Omega} R = 1, \qquad \bigcap_{(R,S)\in\Omega} S = 1,$$

(ii) $$\bigcap_{(R,S)\in\Omega} HR = H, \qquad \bigcap_{(R,S)\in\Omega} KS = K,$$

то группа P финитно аппроксимируема.

Фильтрационный метод Г. Баумслага

Если σ — гомоморфизм группы P на конечную группу, то подгруппы

$$R = \ker\sigma \cap A, \quad S = \ker\sigma \cap B$$

(H, K, φ)-совместимы и имеют конечные индексы в группах A и B соответственно, а отображение σ продолжает гомоморфизм $\rho_{R,S}$.

Теорема 3 (Г. Баумслаг, 1963)

Пусть Ω — семейство всех пар (H, K, φ)-совместимых подгрупп групп A и B, имеющих в этих группах конечные индексы.
Если выполняются следующие условия

(i) $$\bigcap_{(R,S)\in\Omega} R = 1, \qquad \bigcap_{(R,S)\in\Omega} S = 1,$$

(ii) $$\bigcap_{(R,S)\in\Omega} HR = H, \qquad \bigcap_{(R,S)\in\Omega} KS = K,$$

то группа P финитно аппроксимируема.

Традиционная схема изучения аппроксимируемости

Дополнительные ограничения	Конструкция и аппроксимирующий класс			
	GFP $\mathcal{F}$	GFP $\mathcal{F}_p$	HNN $\mathcal{F}$	HNN $\mathcal{F}_p$
Реберные подгруппы конечны				
–– являются циклическими				
–– центральны в вершинных группах				
–– нормальны в вершинных группах				
...				
Вершинные группы свободны				
–– являются к. п. абелевыми				
–– являются к. п. нильпотентными				
...				

Здесь: GFP = Generalized Free Product, HNN = HNN-extension,
$\mathcal{F}$ — класс всех конечных групп, $\mathcal{F}_p$ — класс конечных p-групп

Традиционная схема изучения аппроксимируемости

Дополнительные ограничения	Конструкция и аппроксимирующий класс			
	GFP $\mathcal{F}$	GFP $\mathcal{F}_p$	HNN $\mathcal{F}$	HNN $\mathcal{F}_p$
Реберные подгруппы конечны				
–– являются циклическими				
–– центральны в вершинных группах				
–– нормальны в вершинных группах				
...				
Вершинные группы свободны				
–– являются к. п. абелевыми				
–– являются к. п. нильпотентными				
...				

Здесь: GFP = Generalized Free Product, HNN = HNN-extension,
$\mathcal{F}$ — класс всех конечных групп, $\mathcal{F}_p$ — класс конечных p-групп

Корневые классы групп

Нетривиальный (т. е. содержащий хотя бы одну неединичную группу) класс групп $\mathcal{C}$ называется корневым, если он замкнут относительно взятия подгрупп, расширений и декартовых произведений вида $\prod_{y \in Y} X_y$, где $X, Y \in \mathcal{C}$ и X_y — изоморфная копия группы X для каждого $y \in Y$.

Примеры корневых классов

- Класс всех конечных групп
- Класс конечных p-групп, где p — простое число
- Класс периодических $\mathfrak{P}$-групп конечного периода, где $\mathfrak{P}$ — непустое множество простых чисел
- Класс всех разрешимых групп
- Класс всех групп без кручения

Нетривиальное пересечение корневых классов — снова корневой класс.

Теорема 4 (К. Грюнберг, 1957, modulo Д. Н. Азаров, Д. Тьеджо, 2002)

Свободное произведение любого числа групп, аппроксимируемых корневым классом $\mathcal{C}$, в свою очередь аппроксимируется этим классом.

Корневые классы групп

Нетривиальный (т. е. содержащий хотя бы одну неединичную группу) класс групп $\mathcal{C}$ называется корневым, если он замкнут относительно взятия подгрупп, расширений и декартовых произведений вида $\prod_{y \in Y} X_y$, где $X, Y \in \mathcal{C}$ и X_y — изоморфная копия группы X для каждого $y \in Y$.

Примеры корневых классов

- Класс всех конечных групп
- Класс конечных p-групп, где p — простое число
- Класс периодических $\mathfrak{P}$-групп конечного периода, где $\mathfrak{P}$ — непустое множество простых чисел
- Класс всех разрешимых групп
- Класс всех групп без кручения

Нетривиальное пересечение корневых классов — снова корневой класс.

Теорема 4 (К. Грюнберг, 1957, modulo Д. Н. Азаров, Д. Тьеджо, 2002)

Свободное произведение любого числа групп, аппроксимируемых корневым классом $\mathcal{C}$, в свою очередь аппроксимируется этим классом.

Снова рассмотрим граф групп

$$\mathcal{G}(\Gamma) = \big(\Gamma,\ G_v\ (v \in \mathcal{V}),\ H_e\ (e \in \mathcal{E}),\ \varphi_{\varepsilon e}\ (e \in \mathcal{E},\ \varepsilon = \pm 1)\big)$$

и для каждой вершины $v \in \mathcal{V}$ зафиксируем в группе G_v некоторую нормальную подгруппу R_v. Семейство $\mathcal{R} = \{R_v \mid v \in \mathcal{V}\}$ будем называть системой совместимых нормальных подгрупп, если для любого ребра $e \in \mathcal{E}$

$$(R_{e(1)} \cap H_e\varphi_{+e})\varphi_{+e}^{-1} = (R_{e(-1)} \cap H_e\varphi_{-e})\varphi_{-e}^{-1}.$$

Для такой системы определен граф групп

$$\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(\Gamma) = \big(\Gamma,\ \overline{G}_v\ (v \in \mathcal{V}),\ \overline{H}_e\ (e \in \mathcal{E}),\ \overline{\varphi}_{\varepsilon e}\ (e \in \mathcal{E},\ \varepsilon = \pm 1)\big),$$

где

$$\overline{G}_v = G_v/R_v, \quad \overline{H}_e = H_e/R_e, \quad R_e = (R_{e(\pm 1)} \cap H_e\varphi_{\pm e})\varphi_{\pm e}^{-1},$$
$$\overline{\varphi}_{\varepsilon e}\colon \overline{H}_e \to \overline{G}_{e(\varepsilon)}, \quad hR_e \mapsto (h\varphi_{\varepsilon e})R_{e(\varepsilon)} \quad (h \in H_e)$$

и ребра имеют те же направления, что и в графе $\mathcal{G}(\Gamma)$. Тождественное отображение образующих группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ в группу $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(\Gamma))$ может быть продолжено до сюръективного гомоморфизма $\rho_{\mathcal{R}}$.

Общие условия аппроксимируемости группы $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$

Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный корневой класс групп. Назовем систему $\mathcal{R} = \{R_v \mid v \in \mathcal{V}\}$ совместимых нормальных подгрупп $\mathcal{C}$-допустимой, если выполняется любое из следующих двух равносильных утверждений:

1) существует подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)))$ такая, что $R_v = N \cap G_v$ для всех $v \in \mathcal{V}$;
2) существует гомоморфизм группы $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathcal{C}$, инъективный на всех вершинных группах $\overline{G}_v = G_v/R_v$ $(v \in \mathcal{V})$.

Теорема 5 (С., 2021)

Пусть $\mathfrak{R}$ — совокупность всех $\mathcal{C}$-допустимых систем совместимых нормальных подгрупп и, если $\mathcal{R} = \{R_v \mid v \in \mathcal{V}\} \in \mathfrak{R}$, то $\mathcal{R}(v)$ обозначает подгруппу R_v. Если выполняются следующие условия:

(i) $$\forall v \in \mathcal{V} \quad \bigcap_{\mathcal{R} \in \mathfrak{R}} \mathcal{R}(v) = 1,$$

(ii) $$\forall e \in \mathcal{E},\ \varepsilon = \pm 1 \quad \bigcap_{\mathcal{R} \in \mathfrak{R}} H_e\varphi_{\varepsilon e}\mathcal{R}(e(\varepsilon)) = H_e\varphi_{\varepsilon e},$$

то группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема.

Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный корневой класс групп. Назовем систему $\mathcal{R} = \{R_v \mid v \in \mathcal{V}\}$ совместимых нормальных подгрупп $\mathcal{C}$-допустимой, если выполняется любое из следующих двух равносильных утверждений:

1) существует подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma)))$ такая, что $R_v = N \cap G_v$ для всех $v \in \mathcal{V}$;
2) существует гомоморфизм группы $\pi_1(\mathcal{G}_{\mathcal{R}}(\Gamma))$ на группу из класса $\mathcal{C}$, инъективный на всех вершинных группах $\overline{G}_v = G_v/R_v$ $(v \in \mathcal{V})$.

Теорема 5 (С., 2021)

Пусть $\mathfrak{R}$ — совокупность всех $\mathcal{C}$-допустимых систем совместимых нормальных подгрупп и, если $\mathcal{R} = \{R_v \mid v \in \mathcal{V}\} \in \mathfrak{R}$, то $\mathcal{R}(v)$ обозначает подгруппу R_v. Если выполняются следующие условия:

(i) $$\forall v \in \mathcal{V} \quad \bigcap_{\mathcal{R} \in \mathfrak{R}} \mathcal{R}(v) = 1,$$

(ii) $$\forall e \in \mathcal{E},\ \varepsilon = \pm 1 \quad \bigcap_{\mathcal{R} \in \mathfrak{R}} H_e\varphi_{\varepsilon e}\mathcal{R}(e(\varepsilon)) = H_e\varphi_{\varepsilon e},$$

то группа $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ $\mathcal{C}$-аппроксимируема.

Дополнительные ограничения	Конструкция				
	GFP	HNN	TP	π_1	$\cdots$
Реберные подгруппы конечны					
—— являются циклическими					
—— центральны в вершинных группах					
—— нормальны в вершинных группах					
...					
Вершинные группы свободны					
—— являются к. п. абелевыми					
—— являются к. п. нильпотентными					
...					

Здесь: GFP = Generalized Free Product, HNN = HNN-extension,
TP = Tree Product, π_1 = фундаментальная группа произвольного графа групп

Схема изучения аппроксимируемости корневыми классами

Дополнительные ограничения	Конструкция				
	GFP	HNN	TP	π_1	$\cdots$
Реберные подгруппы конечны					
–– являются циклическими					
–– центральны в вершинных группах					
–– нормальны в вершинных группах					
...					
Вершинные группы свободны					
–– являются к. п. абелевыми					
–– являются к. п. нильпотентными					
...					

Здесь: GFP = Generalized Free Product, HNN = HNN-extension,
TP = Tree Product, π_1 = фундаментальная группа произвольного графа групп

Пример связанных результатов первого и второго уровней

Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный корневой класс групп, $P = \langle A * B;\ H = K,\ \varphi \rangle$, $A \neq H$, $B \neq K$ и подгруппа H лежит в центре группы A.

Теорема 6 (С., Е. А. Туманова, 2023?)

Если $A/H \in \mathcal{C}$ и $B \in \mathcal{C}$, то существует гомоморфизм группы P на группу из класса $\mathcal{C}$, действующий инъективно на подгруппах A и B.

Пусть X — группа, Y — ее подгруппа. Будем говорить, что группа X

- $\mathcal{C}$-регулярна по подгруппе Y, если для каждой подгруппы $M \in \mathcal{C}^*(Y)$ найдется подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(X)$ такая, что $N \cap Y = M$;
- $\mathcal{C}$-квазирегулярна по подгруппе Y, если для каждой подгруппы $M \in \mathcal{C}^*(Y)$ найдется подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(X)$ такая, что $N \cap Y \leqslant M$.

Теорема 7 (С., Е. А. Туманова, 2023?)

Пусть класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия фактор-групп и группа A $\mathcal{C}$-квазирегулярна по подгруппе H. Если группы A/H и B $\mathcal{C}$-аппроксимируемы, то группа P аппроксимируется классом $\mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда подгруппа K $\mathcal{C}$-отделима в группе B.

Пример связанных результатов первого и второго уровней

Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный корневой класс групп, $P = \langle A * B;\ H = K,\ \varphi \rangle$, $A \neq H$, $B \neq K$ и подгруппа H лежит в центре группы A.

Теорема 6 (С., Е. А. Туманова, 2023?)

Если $A/H \in \mathcal{C}$ и $B \in \mathcal{C}$, то существует гомоморфизм группы P на группу из класса $\mathcal{C}$, действующий инъективно на подгруппах A и B.

Пусть X — группа, Y — ее подгруппа. Будем говорить, что группа X

- $\mathcal{C}$-регулярна по подгруппе Y, если для каждой подгруппы $M \in \mathcal{C}^*(Y)$ найдется подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(X)$ такая, что $N \cap Y = M$;
- $\mathcal{C}$-квазирегулярна по подгруппе Y, если для каждой подгруппы $M \in \mathcal{C}^*(Y)$ найдется подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(X)$ такая, что $N \cap Y \leqslant M$.

Теорема 7 (С., Е. А. Туманова, 2023?)

Пусть класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия фактор-групп и группа A $\mathcal{C}$-квазирегулярна по подгруппе H. Если группы A/H и B $\mathcal{C}$-аппроксимируемы, то группа P аппроксимируется классом $\mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда подгруппа K $\mathcal{C}$-отделима в группе B.

Пример связанных результатов первого и второго уровней

Пусть $\mathcal{C}$ — произвольный корневой класс групп, $P = \langle A * B;\ H = K,\ \varphi\rangle$, $A \neq H$, $B \neq K$ и подгруппа H лежит в центре группы A.

Теорема 6 (С., Е. А. Туманова, 2023?)

Если $A/H \in \mathcal{C}$ и $B \in \mathcal{C}$, то существует гомоморфизм группы P на группу из класса $\mathcal{C}$, действующий инъективно на подгруппах A и B.

Пусть X — группа, Y — ее подгруппа. Будем говорить, что группа X

- $\mathcal{C}$-регулярна по подгруппе Y, если для каждой подгруппы $M \in \mathcal{C}^*(Y)$ найдется подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(X)$ такая, что $N \cap Y = M$;
- $\mathcal{C}$-квазирегулярна по подгруппе Y, если для каждой подгруппы $M \in \mathcal{C}^*(Y)$ найдется подгруппа $N \in \mathcal{C}^*(X)$ такая, что $N \cap Y \leqslant M$.

Теорема 7 (С., Е. А. Туманова, 2023?)

Пусть класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия фактор-групп и группа A $\mathcal{C}$-квазирегулярна по подгруппе H. Если группы A/H и B $\mathcal{C}$-аппроксимируемы, то группа P аппроксимируется классом $\mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда подгруппа K $\mathcal{C}$-отделима в группе B.

Основная задача

При выбранных ограничениях на граф групп $\mathcal{G}(\Gamma)$ найти условия, которые достаточно наложить на группу $\pi_1(\mathcal{G}(\Gamma))$ и аппроксимирующий корневой класс групп $\mathcal{C}$ для того, чтобы первая обладала гомоморфизмом на группу из второго, действующим инъективно на всех вершинных группах.

Конструкции, для которых такие условия удалось отыскать:

- обобщенное свободное произведение двух групп, реберные подгруппы которого нормальны в содержащих их вершинных группах (достаточное условие для произвольного класса $\mathcal{C}$; критерий, если класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия фактор-групп);
- HNN-расширение, реберные подгруппы которого совпадают и нормальны в вершинной группе (достаточное условие для произвольного класса $\mathcal{C}$; критерий, если класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия фактор-групп);
- HNN-расширение с конечными циклическими реберными подгруппами, лежащими в центре вершинной группы (критерий, если класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия фактор-групп);

Известные результаты первого уровня

- HNN-расширение с произвольными центральными реберными подгруппами (очень специфическое достаточное условие);
- древесное произведение конечного числа групп, в котором каждая реберная подгруппа служит ретрактом в содержащей ее вершинной группе (критерий);
- древесное произведение, в котором каждая реберная подгруппа лежит в центре содержащей ее вершинной группы (критерий, если дерево конечно; достаточное условие, если класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия фактор-групп);
- фундаментальная группа графа групп, в котором имеется в точности один простой цикл и каждая реберная подгруппа лежит в центре содержащей ее вершинной группы (достаточное условие, если класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия фактор-групп и содержит хотя бы одну непериодическую группу);
- фундаментальная группа графа групп, в котором все реберные подгруппы, содержащиеся в вершинной группе, лежат в ее центре и порождают их прямое произведение (достаточное условие, если класс $\mathcal{C}$ замкнут относительно взятия фактор-групп).