Условия конечной базируемости тождеств мультипликативных векторных пространств и совпадения T- и L-идеалов

Кислицин А.В.

Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского;
Алтайский государственный педагогический университет

11.11.2022

Основные определения и конструкции

Пусть E — векторное пространство над полем F, являющееся подпространством ассоциативной F-алгебры A, причем A порождается пространством E как алгебра (в этом случае будем говорить о мультипликативном векторном пространстве, или *L-пространстве* E, а алгебру A называть *обертывающей* для E).

Тождеством L-пространства E (пары (A, E)) назовем ассоциативный многочлен, который обращается в нуль в алгебре A на элементах пространства E.

Понятие тождества векторного пространства является в некоторым смысле аналогом понятия слабого тождества пары (A, L) (здесь L – алгебра Ли, A – ее ассоциативная обертывающая алгебра), рассмотренного в 1973 году Ю. П. Размысловым.

Пусть E — векторное пространство над полем F, являющееся подпространством ассоциативной F-алгебры A, причем A порождается пространством E как алгебра (в этом случае будем говорить о мультипликативном векторном пространстве, или *L-пространстве* E, а алгебру A называть *обертывающей* для E).

Тождеством L-пространства E (пары (A, E)) назовем ассоциативный многочлен, который обращается в нуль в алгебре A на элементах пространства E.

Понятие тождества векторного пространства является в некотором смысле аналогом понятия слабого тождества пары (A, L) (здесь L – алгебра Ли, A – ее ассоциативная обертывающая алгебра), рассмотренного в 1973 году Ю. П. Размысловым.

Пусть E — векторное пространство над полем F, являющееся подпространством ассоциативной F-алгебры A, причем A порождается пространством E как алгебра (в этом случае будем говорить о мультипликативном векторном пространстве, или *L-пространстве* E, а алгебру A называть *обертывающей* для E).

Тождеством L-пространства E (пары (A, E)) назовем ассоциативный многочлен, который обращается в нуль в алгебре A на элементах пространства E.

Понятие тождества векторного пространства является в некотором смысле аналогом понятия слабого тождества пары (A, L) (здесь L – алгебра Ли, A – ее ассоциативная обертывающая алгебра), рассмотренного в 1973 году Ю. П. Размысловым.

Также тождества векторных пространств, вложенных в ассоциативные алгебры, имеют тесную связь с тождествами многообразия линейных алгебр $\mathfrak{P} = \mathrm{Var}\langle x(yz) = 0\rangle$, которое рассматривалось С. В. Полиным (1976), И. В. Львовым (1978), И. М. Исаевым (1989).

А именно, если рассмотреть алгебру $\overline{V} = V \oplus E$, где V – векторное пространство, $E \subseteq \mathrm{End}_F V$, с умножением $(v_1 + e_1)(v_2 + e_2) = e_2(v_1)$, то $\overline{V} \in \mathfrak{P}$, и ассоциативный многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является тождеством векторного пространства E тогда и только тогда, когда неассоциативный многочлен $zf(R_{x_1}, R_{x_2}, \dots, R_{x_n})$ является тождеством $\overline{V}$.

Также тождества векторных пространств, вложенных в ассоциативные алгебры, имеют тесную связь с тождествами многообразия линейных алгебр $\mathfrak{P} = \mathrm{Var}\langle x(yz) = 0\rangle$, которое рассматривалось С. В. Полиным (1976), И. В. Львовым (1978), И. М. Исаевым (1989).

А именно, если рассмотреть алгебру $\overline{V} = V \oplus E$, где V – векторное пространство, $E \subseteq \mathrm{End}_F V$, с умножением $(v_1 + e_1)(v_2 + e_2) = e_2(v_1)$, то $\overline{V} \in \mathfrak{P}$, и ассоциативный многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является тождеством векторного пространства E тогда и только тогда, когда неассоциативный многочлен $zf(R_{x_1}, R_{x_2}, \ldots, R_{x_n})$ является тождеством $\overline{V}$.

Примеры мультипликативных векторных пространств:

- пространство $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in F \right\}$ и антиизоморфное пространство $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in F \right\}$, совпадающие со своими обертывающими алгебрами;
- любая алгебра над полем F, рассматриваемая как мультипликативное векторное пространство над этим полем;
- пространство $E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in F \right\}$ с обертывающей алгеброй $T_2(F)$ верхних треугольных матриц второго порядка.

Примеры мультипликативных векторных пространств:

- пространство $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, \alpha, \beta \in F \right\}$ и антиизоморфное пространство $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \middle| \, \alpha, \beta \in F \right\}$, совпадающие со своими обертывающими алгебрами;
- любая алгебра над полем F, рассматриваемая как мультипликативное векторное пространство над этим полем;
- пространство $E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \middle| \, \alpha, \beta \in F \right\}$ с обертывающей алгеброй $T_2(F)$ верхних треугольных матриц второго порядка.

Примеры мультипликативных векторных пространств:

- пространство $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, \alpha, \beta \in F \right\}$ и антиизоморфное пространство $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \middle| \, \alpha, \beta \in F \right\}$, совпадающие со своими обертывающими алгебрами;
- любая алгебра над полем F, рассматриваемая как мультипликативное векторное пространство над этим полем;
- пространство $E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \middle| \, \alpha, \beta \in F \right\}$ с обертывающей алгеброй $T_2(F)$ верхних треугольных матриц второго порядка.

Примеры мультипликативных векторных пространств:

- пространство $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in F \right\}$ и антиизоморфное пространство $E_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in F \right\}$, совпадающие со своими обертывающими алгебрами;
- любая алгебра над полем F, рассматриваемая как мультипликативное векторное пространство над этим полем;
- пространство $E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \middle| \alpha, \beta \in F \right\}$ с обертывающей алгеброй $T_2(F)$ верхних треугольных матриц второго порядка.

В мультипликативном векторном пространстве по сути определена операция умножения. Однако, результат применения этой операции к элементам мультипликативного векторного пространства может не быть элементом исходного пространства, находясь за его пределами в обертывающей алгебре.

Это можно легко проследить на примере мультипликативного векторного пространства $E_0 = \langle e_{11} + e_{12}, e_{22} \rangle_F$ над произвольным полем F.

Отметим также, что в пространстве E_0 над произвольном полем F выполняется стандартное тождество третьей степени $\mathrm{St}_3(x, y, z) = 0$. При этом легко проверить, что в обертывающей алгебре $T_2(F)$ оно не выполняется.

В мультипликативном векторном пространстве по сути определена операция умножения. Однако, результат применения этой операции к элементам мультипликативного векторного пространства может не быть элементом исходного пространства, находясь за его пределами в обертывающей алгебре.

Это можно легко проследить на примере мультипликативного векторного пространства $E_0 = \langle e_{11} + e_{12}, e_{22} \rangle_F$ над произвольным полем F.

Отметим также, что в пространстве E_0 над произвольном полем F выполняется стандартное тождество третьей степени $\mathrm{St}_3(x, y, z) = 0$. При этом легко проверить, что в обертывающей алгебре $T_2(F)$ оно не выполняется.

В мультипликативном векторном пространстве по сути определена операция умножения. Однако, результат применения этой операции к элементам мультипликативного векторного пространства может не быть элементом исходного пространства, находясь за его пределами в обертывающей алгебре.

Это можно легко проследить на примере мультипликативного векторного пространства $E_0 = \langle e_{11} + e_{12}, e_{22} \rangle_F$ над произвольным полем F.

Отметим также, что в пространстве E_0 над произвольном полем F выполняется стандартное тождество третьей степени $\mathrm{St}_3(x, y, z) = 0$. При этом легко проверить, что в обертывающей алгебре $T_2(F)$ оно не выполняется.

Для тождеств мультипликативных векторных пространств могут быть введены многие определения по аналогии с соответствующими определениями для линейных алгебр.

Идеал свободной ассоциативной алгебры, замкнутый относительно линейных комбинаций переменных, будем называть *L-идеалом.* Ясно, что все тождества некоторого мультипликативного векторного пространства образуют L-идеал алгебры $F\langle X\rangle$.

L-идеалы для мультипликативных векторных пространств являются аналогом T-идеалов для линейных алгебр.

Для тождеств мультипликативных векторных пространств могут быть введены многие определения по аналогии с соответствующими определениями для линейных алгебр.

Идеал свободной ассоциативной алгебры, замкнутый относительно линейных комбинаций переменных, будем называть *L-идеалом.* Ясно, что все тождества некоторого мультипликативного векторного пространства образуют L-идеал алгебры $F\langle X\rangle$.

L-идеалы для мультипликативных векторных пространств являются аналогом T-идеалов для линейных алгебр.

Для тождеств мультипликативных векторных пространств могут быть введены многие определения по аналогии с соответствующими определениями для линейных алгебр.

Идеал свободной ассоциативной алгебры, замкнутый относительно линейных комбинаций переменных, будем называть *L-идеалом*. Ясно, что все тождества некоторого мультипликативного векторного пространства образуют L-идеал алгебры $F\langle X\rangle$.

L-идеалы для мультипликативных векторных пространств являются аналогом T-идеалов для линейных алгебр.

Скажем, что тождество f пространства E *следует* из множества тождеств $f_1, f_2, \ldots$, если $f \in L(f_1, f_2, \ldots)$.

Множество $G \subseteq F\langle X\rangle$ называется *базисом тождеств* пространства E если все тождества E следуют из G.

Если для пространства E существует конечный базис тождеств G, то E называют *конечно базируемым* (*КБ-пространством*). В противном случае говорят, что пространство E *бесконечно базируемо* или *не конечно базируемо* (*НКБ-пространство*).

Скажем, что тождество f пространства E *следует* из множества тождеств $f_1, f_2, \ldots$, если $f \in L(f_1, f_2, \ldots)$.

Множество $G \subseteq F\langle X\rangle$ называется *базисом тождеств* пространства E если все тождества E следуют из G.

Если для пространства E существует конечный базис тождеств G, то E называют *конечно базируемым* (*КБ-пространством*). В противном случае говорят, что пространство E *бесконечно базируемо* или *не конечно базируемо* (*НКБ-пространство*).

Скажем, что тождество f пространства E *следует* из множества тождеств $f_1, f_2, \dots$, если $f \in L(f_1, f_2, \dots)$.

Множество $G \subseteq F\langle X\rangle$ называется *базисом тождеств* пространства E если все тождества E следуют из G.

Если для пространства E существует конечный базис тождеств G, то E называют *конечно базируемым* (*КБ-пространством*). В противном случае говорят, что пространство E *бесконечно базируемо* или *не конечно базируемо* (*НКБ-пространство*).

Понятие следствия тождеств для мультипликативных векторных пространств внешне похоже на соответствующее понятие для ассоциативных линейных алгебр. Однако, эти понятия существенно различаются.

Дело в том, что для получения следствия из тождества $f = 0$ пространства E можно подставлять вместо переменных лишь линейные комбинации переменных. Подстановка вместо переменных произведения переменных может выводить за пределы L-идеала.

Например, в мультипликативном векторном пространстве $E_0 = \langle e_{11} + e_{12}, e_{22} \rangle_F$ выполняется стандартное тождество $\mathrm{St}_3(x, y, z) = 0$. Но при этом в нем выполняется тождество $\mathrm{St}_3(xt, y, z) = 0$.

Понятие следствия тождеств для мультипликативных векторных пространств внешне похоже на соответствующее понятие для ассоциативных линейных алгебр. Однако, эти понятия существенно различаются.

Дело в том, что для получения следствия из тождества $f = 0$ пространства E можно подставлять вместо переменных лишь линейные комбинации переменных. Подстановка вместо переменных произведения переменных может выводить за пределы L-идеала.

Например, в мультипликативном векторном пространстве $E_0 = \langle e_{11} + e_{12}, e_{22} \rangle_F$ выполняется стандартное тождество $\mathrm{St}_3(x, y, z) = 0$. Но при этом в нем выполняется тождество $\mathrm{St}_3(xt, y, z) = 0$.

Понятие следствия тождеств для мультипликативных векторных пространств внешне похоже на соответствующее понятие для ассоциативных линейных алгебр. Однако, эти понятия существенно различаются.

Дело в том, что для получения следствия из тождества $f = 0$ пространства E можно подставлять вместо переменных лишь линейные комбинации переменных. Подстановка вместо переменных произведения переменных может выводить за пределы L-идеала.

Например, в мультипликативном векторном пространстве $E_0 = \langle e_{11} + e_{12}, e_{22} \rangle_F$ выполняется стандартное тождество $\mathrm{St}_3(x, y, z) = 0$. Но при этом в нем выполняется тождество $\mathrm{St}_3(xt, y, z) = 0$.

Стоит также отметить, что для пары (A, E) конечная базируемость тождеств обертывающей алгебры A не всегда влечет конечную базируемость тождеств пространства E, даже если A и E совпадают как множества.

Например, L-пространства $E_1 = \langle e_{11}, e_{12} \rangle_F$ и $E_2 = \langle e_{11}, e_{21} \rangle_F$ над произвольным полем F имеют те же базисы тождеств, что и алгебры E_1 и E_2 соответственно.

Однако, алгебра $E_1 \oplus E_2$ имеет конечный базис тождеств над любым полем, а векторное пространство $E_1 \oplus E_2$ не имеет конечного базиса тождеств даже над полем нулевой характеристики.

Стоит также отметить, что для пары (A, E) конечная базируемость тождеств обертывающей алгебры A не всегда влечет конечную базируемость тождеств пространства E, даже если A и E совпадают как множества.

Например, L-пространства $E_1 = \langle e_{11}, e_{12} \rangle_F$ и $E_2 = \langle e_{11}, e_{21} \rangle_F$ над произвольным полем F имеют те же базисы тождеств, что и алгебры E_1 и E_2 соответственно.

Однако, алгебра $E_1 \oplus E_2$ имеет конечный базис тождеств над любым полем, а векторное пространство $E_1 \oplus E_2$ не имеет конечного базиса тождеств даже над полем нулевой характеристики.

Стоит также отметить, что для пары (A, E) конечная базируемость тождеств обертывающей алгебры A не всегда влечет конечную базируемость тождеств пространства E, даже если A и E совпадают как множества.

Например, L-пространства $E_1 = \langle e_{11}, e_{12} \rangle_F$ и $E_2 = \langle e_{11}, e_{21} \rangle_F$ над произвольным полем F имеют те же базисы тождеств, что и алгебры E_1 и E_2 соответственно.

Однако, алгебра $E_1 \oplus E_2$ имеет конечный базис тождеств над любым полем, а векторное пространство $E_1 \oplus E_2$ не имеет конечного базиса тождеств даже над полем нулевой характеристики.

Предварительные результаты

Для изучения конечной базируемости тождеств мультипликативных векторных пространств представляет интерес поиск условий, влекущих конечную базируемость тождеств этих пространств.

Например, любое L-пространство, удовлетворяющее тождеству нильпотентности, будет КБ-постранством. Всякое пространство над бесконечным полем, удовлетворяющее либо тождеству $[x, y]z = 0$, либо тождеству $x[y, z] = 0$ также будет иметь конечный базис тождеств [К., 2018].

Для изучения конечной базируемости тождеств мультипликативных векторных пространств представляет интерес поиск условий, влекущих конечную базируемость тождеств этих пространств.

Например, любое L-пространство, удовлетворяющее тождеству нильпотентности, будет КБ-постранством. Всякое пространство над бесконечным полем, удовлетворяющее либо тождеству $[x, y]z = 0$, либо тождеству $x[y, z] = 0$ также будет иметь конечный базис тождеств [К., 2018].

Также известно, что если множество $G \subseteq F\langle X\rangle$ содержит либо многочлен $[x, y]z$, либо многочлен $x[y, z]$, то $L(G) = T(G)$ [K., 2018].

В общем случае для произвольного множества многочленов G идеалы $T(G)$ и $L(G)$ связаны включением $L(G) \subseteq T(G)$, но не обязательно совпадают.

Совпадение T- и L-идеалов позволяет свести изучение тождеств мультипликативного векторного пространства к исследованию тождеств линейной алгебры.

В настоящей работе получены новые условия конечной базируемости тождеств L-пространств, а также исследовано совпадение T-идеалов и L-идеалов.

Также известно, что если множество $G \subseteq F\langle X\rangle$ содержит либо многочлен $[x, y]z$, либо многочлен $x[y, z]$, то $L(G) = T(G)$ [K., 2018].

В общем случае для произвольного множества многочленов G идеалы $T(G)$ и $L(G)$ связаны включением $L(G) \subseteq T(G)$, но не обязательно совпадают.

Совпадение T- и L-идеалов позволяет свести изучение тождеств мультипликативного векторного пространства к исследованию тождеств линейной алгебры.

В настоящей работе получены новые условия конечной базируемости тождеств L-пространств, а также исследовано совпадение T-идеалов и L-идеалов.

Также известно, что если множество $G \subseteq F\langle X\rangle$ содержит либо многочлен $[x,y]z$, либо многочлен $x[y,z]$, то $L(G) = T(G)$ [K., 2018].

В общем случае для произвольного множества многочленов G идеалы $T(G)$ и $L(G)$ связаны включением $L(G) \subseteq T(G)$, но не обязательно совпадают.

Совпадение T- и L-идеалов позволяет свести изучение тождеств мультипликативного векторного пространства к исследованию тождеств линейной алгебры.

В настоящей работе получены новые условия конечной базируемости тождеств L-пространств, а также исследовано совпадение T-идеалов и L-идеалов.

Также известно, что если множество $G \subseteq F\langle X\rangle$ содержит либо многочлен $[x, y]z$, либо многочлен $x[y, z]$, то $L(G) = T(G)$ [K., 2018].

В общем случае для произвольного множества многочленов G идеалы $T(G)$ и $L(G)$ связаны включением $L(G) \subseteq T(G)$, но не обязательно совпадают.

Совпадение T- и L-идеалов позволяет свести изучение тождеств мультипликативного векторного пространства к исследованию тождеств линейной алгебры.

В настоящей работе получены новые условия конечной базируемости тождеств L-пространств, а также исследовано совпадение T-идеалов и L-идеалов.

Основные результаты

Теорема 1.

Мультипликативное векторное пространство E над полем F нулевой характеристики, вложенное в ассоциативную F-алгебру A и удовлетворяющее либо тождеству $[x, y]zt = 0$, либо тождеству $xy[z, t] = 0$, имеет конечный базис тождеств.

В случае поля нулевой характеристики доказанная теорема обобщает соответствующий результат о тождествах $[x, y]z = 0$ и $x[y, z] = 0$.

Теорема 1.

Мультипликативное векторное пространство E над полем F нулевой характеристики, вложенное в ассоциативную F-алгебру A и удовлетворяющее либо тождеству $[x, y]zt = 0$, либо тождеству $xy[z, t] = 0$, имеет конечный базис тождеств.

В случае поля нулевой характеристики доказанная теорема обобщает соответствующий результат о тождествах $[x, y]z = 0$ и $x[y, z] = 0$.

Класс всех мультипликативных векторных пар, удовлетворяющих всем тождествам пары (A, E), будем называть L-многообразием, порожденным парой (A, E) и обозначать $\mathrm{Var}_L(A, E)$. Если G — базис тождеств (A, E), то будем писать:
$\mathrm{Var}_L(A, E) = \mathrm{Var}_L\langle g = 0 | g \in G\rangle$.

L-многообразие $\mathcal{M}$ называется *шпехтовым*, если любое векторное пространство $V \in \mathcal{M}$ имеет конечный базис тождеств.

При помощи введенных определений теорему 1 можно переформулировать следующим образом.

Класс всех мультипликативных векторных пар, удовлетворяющих всем тождествам пары (A, E), будем называть L-многообразием, порожденным парой (A, E) и обозначать $\mathrm{Var}_L(A, E)$. Если G — базис тождеств (A, E), то будем писать:
$\mathrm{Var}_L(A, E) = \mathrm{Var}_L\langle g = 0 | g \in G\rangle$.

L-многообразие $\mathcal{M}$ называется *шпехтовым*, если любое векторное пространство $V \in \mathcal{M}$ имеет конечный базис тождеств.

При помощи введенных определений теорему 1 можно переформулировать следующим образом.

Класс всех мультипликативных векторных пар, удовлетворяющих всем тождествам пары (A, E), будем называть L-многообразием, порожденным парой (A, E) и обозначать $\mathrm{Var}_L(A, E)$. Если G — базис тождеств (A, E), то будем писать:
$\mathrm{Var}_L(A, E) = \mathrm{Var}_L\langle g = 0 | g \in G\rangle$.

L-многообразие $\mathcal{M}$ называется *шпехтовым*, если любое векторное пространство $V \in \mathcal{M}$ имеет конечный базис тождеств.

При помощи введенных определений теорему 1 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 1′.

L-многообразия $\mathcal{M}_1 = \mathrm{Var}_L\langle [x,y]zt = 0\rangle$ и $\mathcal{M}_2 = \mathrm{Var}_L\langle xy[z,t] = 0\rangle$ мультипликативных векторных пространств над полем F нулевой характеристики являются шпехтовыми.

Следствие [К., 2018].

L-многообразия $\mathcal{A}_1 = \mathrm{Var}_L\langle [x,y]z = 0\rangle$ и $\mathcal{A}_2 = \mathrm{Var}_L\langle x[y,z] = 0\rangle$ мультипликативных векторных пространств над полем F нулевой характеристики являются шпехтовыми.

В случае бесконечного поля положительной характеристики вопрос остается открытым.

Можно показать, что L-многообразие $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ не задается конечным набором тождеств.

Теорема $1'$.

L-многообразия $\mathcal{M}_1 = \mathrm{Var}_L\langle [x,y]zt = 0\rangle$ и $\mathcal{M}_2 = \mathrm{Var}_L\langle xy[z,t] = 0\rangle$ мультипликативных векторных пространств над полем F нулевой характеристики являются шпехтовыми.

Следствие [К., 2018].

L-многообразия $\mathcal{A}_1 = \mathrm{Var}_L\langle [x,y]z = 0\rangle$ и $\mathcal{A}_2 = \mathrm{Var}_L\langle x[y,z] = 0\rangle$ мультипликативных векторных пространств над полем F нулевой характеристики являются шпехтовыми.

В случае бесконечного поля положительной характеристики вопрос остается открытым.

Можно показать, что L-многообразие $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ не задается конечным набором тождеств.

Теорема 1′.

L-многообразия $\mathcal{M}_1 = \mathrm{Var}_L\langle [x,y]zt = 0\rangle$ и $\mathcal{M}_2 = \mathrm{Var}_L\langle xy[z,t] = 0\rangle$ мультипликативных векторных пространств над полем F нулевой характеристики являются шпехтовыми.

Следствие [К., 2018].

L-многообразия $\mathcal{A}_1 = \mathrm{Var}_L\langle [x,y]z = 0\rangle$ и $\mathcal{A}_2 = \mathrm{Var}_L\langle x[y,z] = 0\rangle$ мультипликативных векторных пространств над полем F нулевой характеристики являются шпехтовыми.

В случае бесконечного поля положительной характеристики вопрос остается открытым.

Можно показать, что L-многообразие $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ не задается конечным набором тождеств.

Теорема 1′.

L-многообразия $\mathcal{M}_1 = \mathrm{Var}_L\langle [x,y]zt = 0\rangle$ и $\mathcal{M}_2 = \mathrm{Var}_L\langle xy[z,t] = 0\rangle$ мультипликативных векторных пространств над полем F нулевой характеристики являются шпехтовыми.

Следствие [К., 2018].

L-многообразия $\mathcal{A}_1 = \mathrm{Var}_L\langle [x,y]z = 0\rangle$ и $\mathcal{A}_2 = \mathrm{Var}_L\langle x[y,z] = 0\rangle$ мультипликативных векторных пространств над полем F нулевой характеристики являются шпехтовыми.

В случае бесконечного поля положительной характеристики вопрос остается открытым.

Можно показать, что L-многообразие $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$ не задается конечным набором тождеств.

Теорема 2.

Пусть F — бесконечное поле и $E = \langle e_{11} + e_{12}, e_{13} + e_{23} \rangle_F$ — мультипликативное векторное пространство с обертывающей алгеброй $A = \langle e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{23} \rangle_F$. Тогда $[x, y]zt \in L(E)$ и $T(E) \neq L(E)$.

Очевидно, что в пространстве E выполняется стандартное тождество $\mathrm{St}_3(x, y, z) = 0$. В этом случае можно показать, что $x[y, z]t \in T(E)$, но $x[y, z]t \notin L(E)$ (либо что многочлен $\mathrm{St}_3(xt, y, z)$ не является тождеством E).

Утверждение аналогичное теореме 2 можно также сформулировать для тождества $xy[z, t] = 0$.

Теорема 2.

Пусть F — бесконечное поле и $E = \langle e_{11} + e_{12}, e_{13} + e_{23} \rangle_F$ — мультипликативное векторное пространство с обертывающей алгеброй $A = \langle e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{23} \rangle_F$. Тогда $[x, y]zt \in L(E)$ и $T(E) \neq L(E)$.

Очевидно, что в пространстве E выполняется стандартное тождество $\mathrm{St}_3(x, y, z) = 0$. В этом случае можно показать, что $x[y, z]t \in T(E)$, но $x[y, z]t \notin L(E)$ (либо что многочлен $\mathrm{St}_3(xt, y, z)$ не является тождеством E).

Утверждение аналогичное теореме 2 можно также сформулировать для тождества $xy[z, t] = 0$.

Теорема 2.

Пусть F — бесконечное поле и $E = \langle e_{11} + e_{12}, e_{13} + e_{23} \rangle_F$ — мультипликативное векторное пространство с обертывающей алгеброй $A = \langle e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{23} \rangle_F$. Тогда $[x, y]zt \in L(E)$ и $T(E) \neq L(E)$.

Очевидно, что в пространстве E выполняется стандартное тождество $\mathrm{St}_3(x, y, z) = 0$. В этом случае можно показать, что $x[y, z]t \in T(E)$, но $x[y, z]t \notin L(E)$ (либо что многочлен $\mathrm{St}_3(xt, y, z)$ не является тождеством E).

Утверждение аналогичное теореме 2 можно также сформулировать для тождества $xy[z, t] = 0$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!