

Вещественные алгебраические многообразия, гомологичные нулю в комплексификации

В.И. Звонилов

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И.
Лобачевского

Москва 8.10.2022

Содержание

- 1 Введение и исторические замечания
 - Плоские кривые
 - Кривые на поверхностях
 - Кривые с особенностями
 - Обобщения комплексных ориентаций
- 2 Определения
- 3 Примеры
- 4 Основные результаты
 - Многообразия чётной размерности
 - Многообразия нечётной размерности
 - Почти комплексные многообразия
 - Абсолютный случай
 - Относительный случай.

Резюме

- Формула Рохлина для комплексных ориентаций неособой плоской вещественной алгебраической кривой чётной степени, разбивающей свою комплексификацию, распространяется на случай неособой нечётномерной проективной вещественной алгебраической гиперповерхности чётной степени, гомологичной нулю в комплексификации, и шире, на случай пары $4n$ - и $(4n - 2)$ -мерных почти комплексных многообразий $Y \supset X$, на которых действует гладкая инволюция conj , антиголоморфная относительно почти комплексной структуры, причём множество $\mathbb{R}X = \text{fix } \text{conj}|_X$ гомологично нулю как в X , так и в $\mathbb{R}Y$.
- Приводятся примеры вещественных алгебраических многообразий любой размерности, гомологичных нулю в своей комплексификации.

Резюме

- Формула Рохлина для комплексных ориентаций неособой плоской вещественной алгебраической кривой чётной степени, разбивающей свою комплексификацию, распространяется на случай неособой нечётномерной проективной вещественной алгебраической гиперповерхности чётной степени, гомологичной нулю в комплексификации, и шире, на случай пары $4n$ - и $(4n - 2)$ -мерных почти комплексных многообразий $Y \supset X$, на которых действует гладкая инволюция conj , антиголоморфная относительно почти комплексной структуры, причём множество $\mathbb{R}X = \text{fix } \text{conj}|_X$ гомологично нулю как в X , так и в $\mathbb{R}Y$.
- Приводятся примеры вещественных алгебраических многообразий любой размерности, гомологичных нулю в своей комплексификации.

Введение

- Предмет доклада связан с 1-й частью 16-й проблемы Гильберта: изучением топологии вещественных алгебраических многообразий, включающим ограничения на топологию и построения таких многообразий.
- Неособая вещественная алгебраическая кривая A принадлежит типу

$$\begin{cases} I, & \text{если } \mathbb{C}A \setminus \mathbb{R}A \text{ несвязно (разбивающая кривая)} \\ II, & \text{если } \mathbb{C}A \setminus \mathbb{R}A \text{ связно,} \end{cases}$$
 где $\mathbb{C}A$ – множество комплексных точек кривой A .

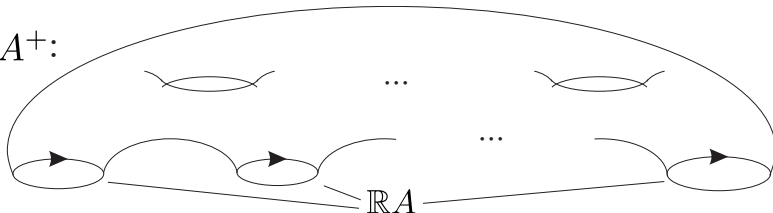
Кривая типа I имеет комплексные ориентации.

Введение

- Предмет доклада связан с 1-й частью 16-й проблемы Гильберта: изучением топологии вещественных алгебраических многообразий, включающим ограничения на топологию и построения таких многообразий.
- Неособая вещественная алгебраическая кривая A принадлежит типу

$$\begin{cases} I, & \text{если } \mathbb{C}A \setminus \mathbb{R}A \text{ несвязно (разбивающая кривая)} \\ II, & \text{если } \mathbb{C}A \setminus \mathbb{R}A \text{ связно,} \end{cases}$$
 где $\mathbb{C}A$ – множество комплексных точек кривой A .

$\mathbb{C}A^+$:



Кривая типа I имеет комплексные ориентации.

Введение

- Понятие типа кривой ввёл Ф. Клейн (1876), а комплексные ориентации – В.А. Рохлин (1974 – для M -кривых, 1978 – для кривых типа I).
- Рохлин получил формулу комплексных ориентаций – ограничение на связь расположений RA в CA и RA в RP^2 .
- $RA \subset RP^2$:

Введение

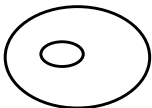
- Понятие типа кривой ввёл Ф. Клейн (1876), а комплексные ориентации – В.А. Рохлин (1974 – для M -кривых, 1978 – для кривых типа I).
- Рохлин получил формулу комплексных ориентаций – ограничение на связь расположений $\mathbb{R}A$ в $\mathbb{C}A$ и $\mathbb{R}A$ в $\mathbb{R}P^2$.
- $\mathbb{R}A \subset \mathbb{R}P^2$:

Введение

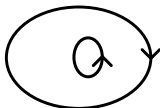
- Понятие типа кривой ввёл Ф. Клейн (1876), а комплексные ориентации – В.А. Рохлин (1974 – для M -кривых, 1978 – для кривых типа I).
- Рохлин получил формулу комплексных ориентаций – ограничение на связь расположений RA в CA и RA в $\mathbb{RP}^2$.
- $RA \subset \mathbb{RP}^2$:



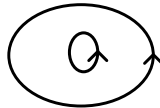
Определения



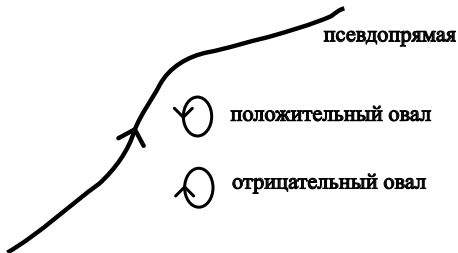
инъективная пара овалов



положительная пара



отрицательная пара



Формулы Рохлина и Рохлина-Мишачёва

- Пусть m – степень неособой вещественной алгебраической кривой типа I , и l – число овалов кривой.
- Формула Рохлина (Рохлин 1978):
для чётного $m = 2k$

$$l + 2(\Pi^- - \Pi^+) = k^2,$$

где Π^+ (Π^-) – число положительных (отрицательных) пар овалов.

- Формула Рохлина-Мишачёва (Н.М. Мишачёв 1975, Рохлин 1978):
для нечётного $m = 2k + 1$

$$l + (\Lambda^- - \Lambda^+) + 2(\Pi^- - \Pi^+) = k^2 + k,$$

где Λ^+ (Λ^-) – число положительных (отрицательных) овалов.

Формулы Рохлина и Рохлина-Мишачёва

- Пусть m – степень неособой вещественной алгебраической кривой типа I , и l – число овалов кривой.
- Формула Рохлина (Рохлин 1978):
для чётного $m = 2k$

$$l + 2(\Pi^- - \Pi^+) = k^2,$$

где $\Pi^+(\Pi^-)$ – число положительных (отрицательных) пар овалов.

- Формула Рохлина-Мишачёва (Н.М. Мишачёв 1975, Рохлин 1978):
для нечётного $m = 2k + 1$

$$l + (\Lambda^- - \Lambda^+) + 2(\Pi^- - \Pi^+) = k^2 + k,$$

где $\Lambda^+(\Lambda^-)$ – число положительных (отрицательных) овалов.

Формулы Рохлина и Рохлина-Мишачёва

- Пусть m – степень неособой вещественной алгебраической кривой типа I , и l – число овалов кривой.
- Формула Рохлина (Рохлин 1978):
для чётного $m = 2k$

$$l + 2(\Pi^- - \Pi^+) = k^2,$$

где Π^+ (Π^-) – число положительных (отрицательных) пар овалов.

- Формула Рохлина-Мишачёва (Н.М. Мишачёв 1975, Рохлин 1978):
для нечётного $m = 2k + 1$

$$l + (\Lambda^- - \Lambda^+) + 2(\Pi^- - \Pi^+) = k^2 + k,$$

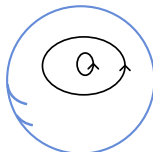
где Λ^+ (Λ^-) – число положительных (отрицательных) овалов.

Формула Оревкова для кривых на сфере

- Пара овалов на сфере положительна, если их ориентации задаются ориентацией кольца между ними, и отрицательна в противном случае:



положительная пара



отрицательная пара

- Кривая $A : \begin{cases} x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 \\ f(x_0, \dots, x_3) = 0 \end{cases}$ на сфере имеет бистепень (m, m) , если $\deg f = m$.
- Формула Оревкова (С.Ю. Оревков 2007): для кривой бистепени (m, m)

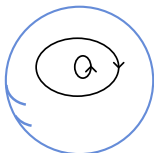
$$l + 2(\Pi^- - \Pi^+) = m^2,$$

где Π^+ (Π^-) – число положительных (отрицательных) пар овалов.

- Пусть $p : S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ – 2-листное накрытие, разветвлённое над мнимой коникой $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$. $A \subset \mathbb{R}P^2$ – разбивающая кривая степени m . Формула Оревкова для $p^{-1}(A)$ равносильна формуле Рохлина для чётного m и формуле Рохлина-Мишачёва для нечётного m .

Формула Оревкова для кривых на сфере

- Пара овалов на сфере положительна, если их ориентации задаются ориентацией кольца между ними, и отрицательна в противном случае:



положительная пара



отрицательная пара

- Кривая $A : \begin{cases} x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 \\ f(x_0, \dots, x_3) = 0 \end{cases}$ на сфере имеет *бистепень* (m, m) , если $\deg f = m$.
- Формула Оревкова (С.Ю. Оревков 2007): для кривой бистепени (m, m)

$$l + 2(\Pi^- - \Pi^+) = m^2,$$

где Π^+ (Π^-) – число положительных (отрицательных) пар овалов.

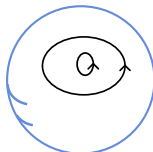
- Пусть $p : S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ – 2-листное накрытие, разветвлённое над мнимой коникой $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$. $A \subset \mathbb{R}P^2$ – разбивающая кривая степени m . Формула Оревкова для $p^{-1}(A)$ равносильна формуле Рохлина для чётного m и формуле Рохлина-Мишачёва для нечётного m .

Формула Оревкова для кривых на сфере

- Пара овалов на сфере положительна, если их ориентации задаются ориентацией кольца между ними, и отрицательна в противном случае:



положительная пара



отрицательная пара

- Кривая $A : \begin{cases} x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 \\ f(x_0, \dots, x_3) = 0 \end{cases}$ на сфере имеет *бистепень* (m, m) , если $\deg f = m$.
- Формула Оревкова (С.Ю. Оревков 2007): для кривой бистепени (m, m)

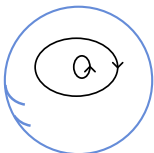
$$l + 2(\Pi^- - \Pi^+) = m^2,$$

где Π^+ (Π^-) – число положительных (отрицательных) пар овалов.

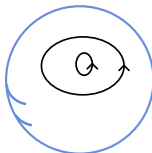
- Пусть $p : S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ – 2-листное накрытие, разветвлённое над мнимой коникой $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$. $A \subset \mathbb{RP}^2$ – разбивающая кривая степени m . Формула Оревкова для $p^{-1}(A)$ равносильна формуле Рохлина для чётного m и формуле Рохлина-Мишачёва для нечётного m .

Формула Оревкова для кривых на сфере

- Пара овалов на сфере положительна, если их ориентации задаются ориентацией кольца между ними, и отрицательна в противном случае:



положительная пара



отрицательная пара

- Кривая $A : \begin{cases} x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 \\ f(x_0, \dots, x_3) = 0 \end{cases}$ на сфере имеет *бистепень* (m, m) , если $\deg f = m$.
- Формула Оревкова (С.Ю. Оревков 2007): для кривой бистепени (m, m)

$$l + 2(\Pi^- - \Pi^+) = m^2,$$

где Π^+ (Π^-) – число положительных (отрицательных) пар овалов.

- Пусть $p : S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ – 2-листное накрытие, разветвлённое над мнимой коникой $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$. $A \subset \mathbb{R}P^2$ – разбивающая кривая степени m . Формула Оревкова для $p^{-1}(A)$ равносильна формуле Рохлина для чётного m и формуле Рохлина-Мишачёва для нечётного m .

Разбивающая кривая на поверхности

- Пусть B – неособая вещественная алгебраическая поверхность,
- $A \subset B$ – неособая вещественная алгебраическая кривая типа I , наделённая комплексной ориентацией, и $\mathbb{R}A$ ориентирована как $\partial\mathbb{C}A^+$.
- Пусть $B_1, \dots, B_l$ – все ориентируемые компоненты связности множества $\mathbb{R}B \setminus \mathbb{R}A$. Наделим их некоторой ориентацией.
- Если $\mathbb{R}A$ реализует нуль в $H_1(\mathbb{R}B; \mathbb{Q})$, то существует ориентированная 2-цепь x в $\mathbb{R}B$ с $\partial x = \mathbb{R}A$.
- Имеем равенства для цепей: $\mathbb{C}A = \mathbb{C}A^+ + \mathbb{C}A^-$, $\partial\mathbb{C}A^+ = -\partial\mathbb{C}A^- = \mathbb{R}A$. Определим циклы $\xi(x) = \mathbb{C}A^+ - x$, $\eta(x) = \mathbb{C}A^- + x$.

Разбивающая кривая на поверхности

- Пусть B – неособая вещественная алгебраическая поверхность,
- $A \subset B$ – неособая вещественная алгебраическая кривая типа I , наделённая комплексной ориентацией, и $\mathbb{R}A$ ориентирована как $\partial\mathbb{C}A^+$.
- Пусть $B_1, \dots, B_l$ – все ориентируемые компоненты связности множества $\mathbb{R}B \setminus \mathbb{R}A$. Наделим их некоторой ориентацией.
- Если $\mathbb{R}A$ реализует нуль в $H_1(\mathbb{R}B; \mathbb{Q})$, то существует ориентированная 2-цепь x в $\mathbb{R}B$ с $\partial x = \mathbb{R}A$.
- Имеем равенства для цепей: $\mathbb{C}A = \mathbb{C}A^+ + \mathbb{C}A^-$, $\partial\mathbb{C}A^+ = -\partial\mathbb{C}A^- = \mathbb{R}A$. Определим циклы $\xi(x) = \mathbb{C}A^+ - x$, $\eta(x) = \mathbb{C}A^- + x$.

Разбивающая кривая на поверхности

- Пусть B – неособая вещественная алгебраическая поверхность,
- $A \subset B$ – неособая вещественная алгебраическая кривая типа I , наделённая комплексной ориентацией, и $\mathbb{R}A$ ориентирована как $\partial\mathbb{C}A^+$.
- Пусть $B_1, \dots, B_l$ – все ориентируемые компоненты связности множества $\mathbb{R}B \setminus \mathbb{R}A$. Наделим их некоторой ориентацией.
- Если $\mathbb{R}A$ реализует нуль в $H_1(\mathbb{R}B; \mathbb{Q})$, то существует ориентированная 2-цепь x в $\mathbb{R}B$ с $\partial x = \mathbb{R}A$.
- Имеем равенства для цепей: $\mathbb{C}A = \mathbb{C}A^+ + \mathbb{C}A^-$, $\partial\mathbb{C}A^+ = -\partial\mathbb{C}A^- = \mathbb{R}A$. Определим циклы $\xi(x) = \mathbb{C}A^+ - x$, $\eta(x) = \mathbb{C}A^- + x$.

Разбивающая кривая на поверхности

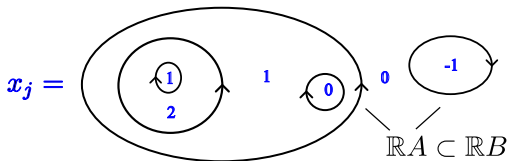
- Пусть B – неособая вещественная алгебраическая поверхность,
- $A \subset B$ – неособая вещественная алгебраическая кривая типа I , наделённая комплексной ориентацией, и $\mathbb{R}A$ ориентирована как $\partial \mathbb{C}A^+$.
- Пусть $B_1, \dots, B_l$ – все ориентируемые компоненты связности множества $\mathbb{R}B \setminus \mathbb{R}A$. Наделим их некоторой ориентацией.
- Если $\mathbb{R}A$ реализует нуль в $H_1(\mathbb{R}B; \mathbb{Q})$, то существует ориентированная 2-цепь x в $\mathbb{R}B$ с $\partial x = \mathbb{R}A$.
- Имеем равенства для цепей: $\mathbb{C}A = \mathbb{C}A^+ + \mathbb{C}A^-$, $\partial \mathbb{C}A^+ = -\partial \mathbb{C}A^- = \mathbb{R}A$. Определим циклы $\xi(x) = \mathbb{C}A^+ - x$, $\eta(x) = \mathbb{C}A^- + x$.

Разбивающая кривая на поверхности

- Пусть B – неособая вещественная алгебраическая поверхность,
- $A \subset B$ – неособая вещественная алгебраическая кривая типа I , наделённая комплексной ориентацией, и $\mathbb{R}A$ ориентирована как $\partial\mathbb{C}A^+$.
- Пусть $B_1, \dots, B_l$ – все ориентируемые компоненты связности множества $\mathbb{R}B \setminus \mathbb{R}A$. Наделим их некоторой ориентацией.
- Если $\mathbb{R}A$ реализует нуль в $H_1(\mathbb{R}B; \mathbb{Q})$, то существует ориентированная 2-цепь x в $\mathbb{R}B$ с $\partial x = \mathbb{R}A$.
- Имеем равенства для цепей: $\mathbb{C}A = \mathbb{C}A^+ + \mathbb{C}A^-$,
 $\partial\mathbb{C}A^+ = -\partial\mathbb{C}A^- = \mathbb{R}A$. Определим циклы
 $\xi(x) = \mathbb{C}A^+ - x, \eta(x) = \mathbb{C}A^- + x$.

Формулы комплексных ориентаций кривой на поверхности

$x = \sum x_j [B_j]$ – разложение по базису.



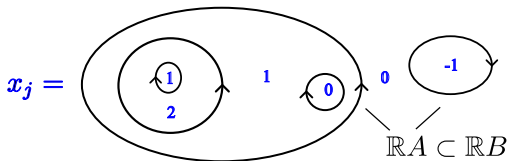
Теорема (автор 1982)

- $\sum x_j^2 \chi(B_j) = \xi(x) \eta(x)$.
- Для компоненты B' множества RB пусть $B'_1, \dots, B'_r$ – все компоненты связности множества $B' \setminus RA$. Если B' неориентируема, соответствующие числа x'_j определяются однозначно, а если B' ориентируема, и её ориентация задаёт ориентацию всех B'_j , то $\sum x'_j \chi(B'_j) = \xi(x)[B'] = -\eta(x)[B']$, причём в случае $\chi(B') \neq 0$ числа x'_j определяются однозначно условием $\sum x'_j \chi(B'_j) = 0$.

Формулы Рохлина, Рохлина-Мишачёва, Оревкова получаются из первой формулы теоремы.

Формулы комплексных ориентаций кривой на поверхности

$x = \sum x_j [B_j]$ – разложение по базису.



Теорема (автор 1982)

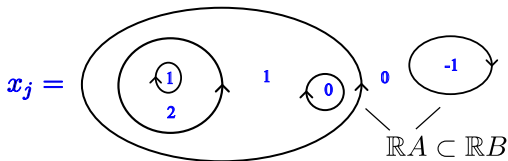
① $\sum x_j^2 \chi(B_j) = \xi(x) \eta(x).$

② Для компоненты B' множества $\mathbb{R}B$ пусть $B'_1, \dots, B'_{l'}$ – все компоненты связности множества $B' \setminus \mathbb{R}A$. Если B' неориентируема, соответствующие числа x'_j определяются однозначно, а если B' ориентируема, и её ориентация задаёт ориентацию всех B'_j , то $\sum x'_j \chi(B'_j) = \xi(x)[B'] = -\eta(x)[B']$, причём в случае $\chi(B') \neq 0$ числа x'_j определяются однозначно условием $\sum x'_j \chi(B'_j) = 0$.

Формулы Рохлина, Рохлина-Мишачёва, Оревкова получаются из первой формулы теоремы.

Формулы комплексных ориентаций кривой на поверхности

$x = \sum x_j [B_j]$ – разложение по базису.



Теорема (автор 1982)

- ❶ $\sum x_j^2 \chi(B_j) = \xi(x) \eta(x).$
- ❷ Для компоненты B' множества $\mathbb{R}B$ пусть $B'_1, \dots, B'_{l'}$ – все компоненты связности множества $B' \setminus \mathbb{R}A$. Если B' неориентируема, соответствующие числа x'_j определяются однозначно, а если B' ориентируема, и её ориентация задаёт ориентацию всех B'_j , то $\sum x'_j \chi(B'_j) = \xi(x)[B'] = -\eta(x)[B']$, причём в случае $\chi(B') \neq 0$ числа x'_j определяются однозначно условием $\sum x'_j \chi(B'_j) = 0$.

Формулы Рохлина, Рохлина-Мишачёва, Оревкова получаются из первой формулы теоремы.

Формулы комплексных ориентаций кривой на поверхности

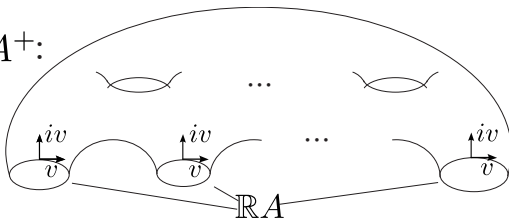
Доказательство.

Сдвигаем $\xi(x)$ вдоль векторного поля iv и его продолжения на $\mathbb{C}A^+$, где v – касательное поле на $\mathbb{R}B$ – касается кривой $\mathbb{R}A$ и направлено вдоль комплексной ориентации. Получаем цикл $\xi^v(x) = \mathbb{C}(A^+)^v - x^v$.

$$\xi(x)\eta(x) = \xi^v(x)\eta(x) = -x^v x = -\sum x_j^2 [B_j^v][B_j] = -\sum x_j^2 \text{ind}(iv|_{B_j}) = \sum x_j^2 \text{ind}(v|_{B_j}) = \sum x_j^2 \chi(B_j).$$

2-е равенство доказывается аналогично. □

$\mathbb{C}A^+$:



Интегрирование по эйлеровой характеристике

- О.Я. Виро в 1988 г. ввёл понятие интеграла по эйлеровой характеристике для кусочно постоянных функций:
Пусть $\{B_j\}$ – разбиение множества B , $f(x) = y_j$, если $x \in B_j$. Тогда $\int_B f(x) d\chi(x) := \sum y_j \chi(B_j)$.
- Виро ввёл понятие индекса точки на поверхности B относительно ориентированной кривой $C \subset B$:
 $\text{ind}_C(x) = x_j$, если $x \in B_j$ в обозначениях предыдущей теоремы,
- Он записал, формулы Рохлина, Рохлина-Мишачёва для плоской разбивающей кривой степени m , наделённой комплексной ориентацией, в виде
$$\int_{\mathbb{R}P^2} \text{ind}_{\mathbb{R}A}^2(x) d\chi(x) = \frac{m^2}{4}.$$

Интегрирование по эйлеровой характеристике

- О.Я. Виро в 1988 г. ввёл понятие интеграла по эйлеровой характеристике для кусочно постоянных функций:
Пусть $\{B_j\}$ – разбиение множества B , $f(x) = y_j$, если $x \in B_j$. Тогда $\int_B f(x) d\chi(x) := \sum y_j \chi(B_j)$.
- Виро ввёл понятие индекса точки на поверхности B относительно ориентированной кривой $C \subset B$:
 $\text{ind}_C(x) = x_j$, если $x \in B_j$ в обозначениях предыдущей теоремы,
- Он записал, формулы Рохлина, Рохлина-Мишачёва для плоской разбивающей кривой степени m , наделённой комплексной ориентацией, в виде
$$\int_{\mathbb{R}P^2} \text{ind}_{\mathbb{R}A}^2(x) d\chi(x) = \frac{m^2}{4}.$$

Интегрирование по эйлеровой характеристике

- О.Я. Виро в 1988 г. ввёл понятие интеграла по эйлеровой характеристике для кусочно постоянных функций:
Пусть $\{B_j\}$ – разбиение множества B , $f(x) = y_j$, если $x \in B_j$. Тогда $\int_B f(x) d\chi(x) := \sum y_j \chi(B_j)$.
- Виро ввёл понятие индекса точки на поверхности B относительно ориентированной кривой $C \subset B$:
 $\text{ind}_C(x) = x_j$, если $x \in B_j$ в обозначениях предыдущей теоремы,
- Он записал, формулы Рохлина, Рохлина-Мишачёва для плоской разбивающей кривой степени m , наделённой комплексной ориентацией, в виде
$$\int_{\mathbb{R}P^2} \text{ind}_{\mathbb{R}A}^2(x) d\chi(x) = \frac{m^2}{4}.$$

Кривые типа I с особенностями

- B — неособая вещественная алгебраическая поверхность
- $A_1, \dots, A_r$ — различные неприводимые над $\mathbb{R}$ вещественные алгебраические кривые на B ; при этом $A_1, \dots, A_q$ — те из кривых $A_1, \dots, A_r$, которые неприводимы над $\mathbb{C}$, так что $A_{q+1}, \dots, A_r$ — пары комплексно сопряжённых друг другу неприводимых над $\mathbb{C}$ комплексных кривых;
- $k_1, \dots, k_r$ — рациональные числа; дивизор $A = \sum k_j A_j$ принадлежит типу I , если вещественные нормализации W_j всех кривых A_j имеют тип I .

Кривые типа I с особенностями

- B — неособая вещественная алгебраическая поверхность
- $A_1, \dots, A_r$ — различные неприводимые над $\mathbb{R}$ вещественные алгебраические кривые на B ; при этом $A_1, \dots, A_q$ — те из кривых $A_1, \dots, A_r$, которые неприводимы над $\mathbb{C}$, так что $A_{q+1}, \dots, A_r$ — пары комплексно сопряжённых друг другу неприводимых над $\mathbb{C}$ комплексных кривых;
- $k_1, \dots, k_r$ — рациональные числа; дивизор $A = \sum k_j A_j$ принадлежит типу I , если вещественные нормализации W_j всех кривых A_j имеют тип I .

Кривые типа I с особенностями

- B — неособая вещественная алгебраическая поверхность
- $A_1, \dots, A_r$ — различные неприводимые над $\mathbb{R}$ вещественные алгебраические кривые на B ; при этом $A_1, \dots, A_q$ — те из кривых $A_1, \dots, A_r$, которые неприводимы над $\mathbb{C}$, так что $A_{q+1}, \dots, A_r$ — пары комплексно сопряжённых друг другу неприводимых над $\mathbb{C}$ комплексных кривых;
- $k_1, \dots, k_r$ — рациональные числа; дивизор $A = \sum k_j A_j$ принадлежит типу I , если вещественные нормализации W_j всех кривых A_j имеют тип I .

Число μ , циклы $\xi(x), \eta(x)$

- Для $A = \sum k_j A_j \in I$ определены 2^q комплексных ориентаций.
Зафиксируем одну из них так, чтобы $\mathbb{R}A_j = \partial CW_j^+$.
- $p_j : CW_j \rightarrow \mathbb{C}A$ – проекция нормализации; μ_{ij} – число мнимых точек пересечения поверхностей $p_i(CW_i^+), p_j(CW_j^-)$ с учётом кратностей;
 $\mu = \sum k_i k_j \mu_{ij}$.
- Пусть $B_1, \dots, B_l$ – все ориентируемые компоненты связности множества $\mathbb{R}B \setminus \mathbb{R}A$. Наделим их некоторой ориентацией.
- Если $\mathbb{R}A$ реализует нуль в $H_1(\mathbb{R}B; \mathbb{Q})$, то существует ориентированная 2-цепь x в $\mathbb{R}B$ с $\partial x = \mathbb{R}A$.
- Определим 2-циклы
 $\xi(x) = \sum k_j p_j(CW_j^+) - x, \eta(x) = \sum k_j p_j(CW_j^-) + x$.

Число μ , циклы $\xi(x), \eta(x)$

- Для $A = \sum k_j A_j \in I$ определены 2^q комплексных ориентаций.
Зафиксируем одну из них так, чтобы $\mathbb{R}A_j = \partial CW_j^+$.
- $p_j : CW_j \rightarrow \mathbb{C}A$ – проекция нормализации; μ_{ij} – число мнимых точек пересечения поверхностей $p_i(CW_i^+), p_j(CW_j^-)$ с учётом кратностей;
 $\mu = \sum k_i k_j \mu_{ij}$.
- Пусть $B_1, \dots, B_l$ – все ориентируемые компоненты связности множества $\mathbb{R}B \setminus \mathbb{R}A$. Наделим их некоторой ориентацией.
- Если $\mathbb{R}A$ реализует нуль в $H_1(\mathbb{R}B; \mathbb{Q})$, то существует ориентированная 2-цепь x в $\mathbb{R}B$ с $\partial x = \mathbb{R}A$.
- Определим 2-циклы
 $\xi(x) = \sum k_j p_j(CW_j^+) - x, \eta(x) = \sum k_j p_j(CW_j^-) + x$.

Число μ , циклы $\xi(x), \eta(x)$

- Для $A = \sum k_j A_j \in I$ определены 2^q комплексных ориентаций.
Зафиксируем одну из них так, чтобы $\mathbb{R}A_j = \partial CW_j^+$.
- $p_j : CW_j \rightarrow \mathbb{C}A$ – проекция нормализации; μ_{ij} – число мнимых точек пересечения поверхностей $p_i(CW_i^+), p_j(CW_j^-)$ с учётом кратностей;
 $\mu = \sum k_i k_j \mu_{ij}$.
- Пусть $B_1, \dots, B_l$ – все ориентируемые компоненты связности множества $\mathbb{R}B \setminus \mathbb{R}A$. Наделим их некоторой ориентацией.
- Если $\mathbb{R}A$ реализует нуль в $H_1(\mathbb{R}B; \mathbb{Q})$, то существует ориентированная 2-цепь x в $\mathbb{R}B$ с $\partial x = \mathbb{R}A$.
- Определим 2-циклы
 $\xi(x) = \sum k_j p_j(CW_j^+) - x, \eta(x) = \sum k_j p_j(CW_j^-) + x$.

Число μ , циклы $\xi(x), \eta(x)$

- Для $A = \sum k_j A_j \in I$ определены 2^q комплексных ориентаций.
Зафиксируем одну из них так, чтобы $\mathbb{R}A_j = \partial CW_j^+$.
- $p_j : CW_j \rightarrow \mathbb{C}A$ – проекция нормализации; μ_{ij} – число мнимых точек пересечения поверхностей $p_i(CW_i^+), p_j(CW_j^-)$ с учётом кратностей;
 $\mu = \sum k_i k_j \mu_{ij}$.
- Пусть $B_1, \dots, B_l$ – все ориентируемые компоненты связности множества $\mathbb{R}B \setminus \mathbb{R}A$. Наделим их некоторой ориентацией.
- Если $\mathbb{R}A$ реализует нуль в $H_1(\mathbb{R}B; \mathbb{Q})$, то существует ориентированная 2-цепь x в $\mathbb{R}B$ с $\partial c = \mathbb{R}A$.
- Определим 2-циклы
 $\xi(x) = \sum k_j p_j(CW_j^+) - x, \eta(x) = \sum k_j p_j(CW_j^-) + x$.

Число μ , циклы $\xi(x), \eta(x)$

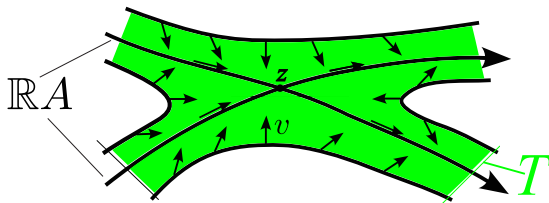
- Для $A = \sum k_j A_j \in I$ определены 2^q комплексных ориентаций. Зафиксируем одну из них так, чтобы $\mathbb{R}A_j = \partial CW_j^+$.
- $p_j : CW_j \rightarrow \mathbb{C}A$ – проекция нормализации; μ_{ij} – число мнимых точек пересечения поверхностей $p_i(CW_i^+), p_j(CW_j^-)$ с учётом кратностей; $\mu = \sum k_i k_j \mu_{ij}$.
- Пусть $B_1, \dots, B_l$ – все ориентируемые компоненты связности множества $\mathbb{R}B \setminus \mathbb{R}A$. Наделим их некоторой ориентацией.
- Если $\mathbb{R}A$ реализует нуль в $H_1(\mathbb{R}B; \mathbb{Q})$, то существует ориентированная 2-цепь x в $\mathbb{R}B$ с $\partial c = \mathbb{R}A$.
- Определим 2-циклы $\xi(x) = \sum k_j p_j(CW_j^+) - x, \eta(x) = \sum k_j p_j(CW_j^-) + x$.

Векторные поля на поверхности

- T — регулярная окрестность множества $\mathbb{R}A$ в $\mathbb{R}B$.
- $N = \{v - \text{касательное поле на } \mathbb{R}B \mid \text{число нулей } v \text{ конечно, } v(\text{Sing}_{\mathbb{R}A}) = 0, v(T \setminus \text{Sing}_{\mathbb{R}A}) \neq 0, v|_{\mathbb{R}A} \text{ касается } \mathbb{R}A, \text{ направлено вдоль комплексной ориентации, и } v|_{\partial T} \text{ направлено внутрь } T\}$.

Векторные поля на поверхности

- T — регулярная окрестность множества $\mathbb{R}A$ в $\mathbb{R}B$.
- $N = \{v - \text{касательное поле на } \mathbb{R}B \mid \text{число нулей } v \text{ конечно, } v(\text{Sing}_{\mathbb{R}A}) = 0, v(T \setminus \text{Sing}_{\mathbb{R}A}) \neq 0, v|_{\mathbb{R}A} \text{ касается } \mathbb{R}A, \text{ направлено вдоль комплексной ориентации, и } v|_{\partial T} \text{ направлено внутрь } T\}$.



Числа $\omega_z(x, v), \omega'_z(x, v)$

- $v \in N$ – векторное поле, $z \in \mathbb{R}A$ – особая точка кривой A , $D(z)$ – открытый шар в $\mathbb{C}B$ с центром в точке z , $S(z) = \partial D(z)$ – 3-сфера, и пусть в $D(z) \setminus z$ нет особенностей поля v .
- Легко проверить, что $\xi_z(x) = \xi(x) \cap S(z)$, $\eta_z(x) = \eta(x) \cap S(z)$ 1-циклы на 3-сфере $S(z)$.
- Для ориентируемой компоненты B' поверхности B если её ориентация задаёт ориентацию всех B'_j , то $\beta_z = B' \cap S(z)$ – 1-цикл на $S(z)$..
- Цикл $\xi_z^v(x)$ на $S(z)$ получается сдвигом вдоль продолжения на $\xi_z(x)$ поля iv .
- $\omega_z(x, v), \omega'_z(x, v)$ – коэффициенты зацепления циклов $\xi_z^v(x), \eta_z(x)$ и $\xi_z^v(x), \beta_z$ в $S(z)$.

Числа $\omega_z(x, v), \omega'_z(x, v)$

- $v \in N$ – векторное поле, $z \in \mathbb{R}A$ – особая точка кривой A , $D(z)$ – открытый шар в $\mathbb{C}B$ с центром в точке z , $S(z) = \partial D(z)$ – 3-сфера, и пусть в $D(z) \setminus z$ нет особенностей поля v .
- Легко проверить, что $\xi_z(x) = \xi(x) \cap S(z)$, $\eta_z(x) = \eta(x) \cap S(z)$ 1-циклы на 3-сфере $S(z)$.
- Для ориентируемой компоненты B' поверхности B если её ориентация задаёт ориентацию всех B'_j , то $\beta_z = B' \cap S(z)$ – 1-цикл на $S(z)$..
- Цикл $\xi_z^v(x)$ на $S(z)$ получается сдвигом вдоль продолжения на $\xi_z(x)$ поля iv .
- $\omega_z(x, v), \omega'_z(x, v)$ – коэффициенты зацепления циклов $\xi_z^v(x), \eta_z(x)$ и $\xi_z^v(x), \beta_z$ в $S(z)$.

Числа $\omega_z(x, v), \omega'_z(x, v)$

- $v \in N$ – векторное поле, $z \in \mathbb{R}A$ – особая точка кривой A , $D(z)$ – открытый шар в $\mathbb{C}B$ с центром в точке z , $S(z) = \partial D(z)$ – 3-сфера, и пусть в $D(z) \setminus z$ нет особенностей поля v .
- Легко проверить, что $\xi_z(x) = \xi(x) \cap S(z)$, $\eta_z(x) = \eta(x) \cap S(z)$ 1-циклы на 3-сфере $S(z)$.
- Для ориентируемой компоненты B' поверхности B если её ориентация задаёт ориентацию всех B'_j , то $\beta_z = B' \cap S(z)$ – 1-цикл на $S(z)$..
- Цикл $\xi_z^v(x)$ на $S(z)$ получается сдвигом вдоль продолжения на $\xi_z(x)$ поля iv .
- $\omega_z(x, v), \omega'_z(x, v)$ – коэффициенты зацепления циклов $\xi_z^v(x), \eta_z(x)$ и $\xi_z^v(x), \beta_z$ в $S(z)$.

Числа $\omega_z(x, v), \omega'_z(x, v)$

- $v \in N$ – векторное поле, $z \in \mathbb{R}A$ – особая точка кривой A , $D(z)$ – открытый шар в $\mathbb{C}B$ с центром в точке z , $S(z) = \partial D(z)$ – 3-сфера, и пусть в $D(z) \setminus z$ нет особенностей поля v .
- Легко проверить, что $\xi_z(x) = \xi(x) \cap S(z)$, $\eta_z(x) = \eta(x) \cap S(z)$ 1-циклы на 3-сфере $S(z)$.
- Для ориентируемой компоненты B' поверхности B если её ориентация задаёт ориентацию всех B'_j , то $\beta_z = B' \cap S(z)$ – 1-цикл на $S(z)$..
- Цикл $\xi_z^v(x)$ на $S(z)$ получается сдвигом вдоль продолжения на $\xi_z(x)$ поля iv .
- $\omega_z(x, v), \omega'_z(x, v)$ – коэффициенты зацепления циклов $\xi_z^v(x), \eta_z(x)$ и $\xi_z^v(x), \beta_z$ в $S(z)$.

Числа $\omega_z(x, v), \omega'_z(x, v)$

- $v \in N$ – векторное поле, $z \in \mathbb{R}A$ – особая точка кривой A , $D(z)$ – открытый шар в $\mathbb{C}B$ с центром в точке z , $S(z) = \partial D(z)$ – 3-сфера, и пусть в $D(z) \setminus z$ нет особенностей поля v .
- Легко проверить, что $\xi_z(x) = \xi(x) \cap S(z)$, $\eta_z(x) = \eta(x) \cap S(z)$ 1-циклы на 3-сфере $S(z)$.
- Для ориентируемой компоненты B' поверхности B если её ориентация задаёт ориентацию всех B'_j , то $\beta_z = B' \cap S(z)$ – 1-цикл на $S(z)$..
- Цикл $\xi_z^v(x)$ на $S(z)$ получается сдвигом вдоль продолжения на $\xi_z(x)$ поля iv .
- $\omega_z(x, v), \omega'_z(x, v)$ – коэффициенты зацепления циклов $\xi_z^v(x), \eta_z(x)$ и $\xi_z^v(x), \beta_z$ в $S(z)$.

Формулы комплексных ориентаций особой кривой

$x = \sum x_j[B_j]$ – разложение по базису.

Теорема (автор 1983)

- Для векторного поля $v \in N$

$$\sum x_j^2 \chi(B_j) + \sum_z \omega_z(x, v) + \mu = \xi(x) \eta(x)$$

- Для компоненты B' множества $\mathbb{R}B$ пусть $B'_1, \dots, B'_r$ – все компоненты связности множества $B' \setminus \mathbb{R}A$. Если B' неориентируема, соответствующие числа x'_j определяются однозначно, а если B' ориентируема, то

$$\sum x'_j \chi(B'_j) + \sum_{z \in B'} = \xi(x)[B'] = -\eta(x)[B'],$$

причём в случае $\chi(B') \neq 0$ числа x'_j определяются однозначно условием $\xi(x)[B'] = -\eta(x)[B'] = 0$.

Формулы комплексных ориентаций особой кривой

$x = \sum x_j[B_j]$ – разложение по базису.

Теорема (автор 1983)

- ① Для векторного поля $v \in N$

$$\sum x_j^2 \chi(B_j) + \sum_z \omega_z(x, v) + \mu = \xi(x) \eta(x)$$

- ② Для компоненты B' множества $\mathbb{R}B$ пусть $B'_1, \dots, B'_{l'}$ – все компоненты связности множества $B' \setminus \mathbb{R}A$. Если B' неориентируема, соответствующие числа x'_j определяются однозначно, а если B' ориентируема, то

$$\sum x'_j \chi(B'_j) + \sum_{z \in B'} = \xi(x)[B'] = -\eta(x)[B'],$$

причём в случае $\chi(B') \neq 0$ числа x'_j определяются однозначно условием $\xi(x)[B'] = -\eta(x)[B'] = 0$.

Формулы комплексных ориентаций особой кривой

$x = \sum x_j[B_j]$ – разложение по базису.

Теорема (автор 1983)

- ① Для векторного поля $v \in N$

$$\sum x_j^2 \chi(B_j) + \sum_z \omega_z(x, v) + \mu = \xi(x) \eta(x)$$

- ② Для компоненты B' множества $\mathbb{R}B$ пусть $B'_1, \dots, B'_{l'}$ – все компоненты связности множества $B' \setminus \mathbb{R}A$. Если B' неориентируема, соответствующие числа x'_j определяются однозначно, а если B' ориентируема, то

$$\sum x'_j \chi(B'_j) + \sum_{z \in B'} = \xi(x)[B'] = -\eta(x)[B'],$$

причём в случае $\chi(B') \neq 0$ числа x'_j определяются однозначно условием $\xi(x)[B'] = -\eta(x)[B'] = 0$.

$\omega_z(x, v), \omega'_z(x, v)$ для простых особенностей

- Нахождение чисел $\omega_z(x, v), \omega'_z(x, v)$ можно свести, используя их поведение при раздутии B в точке z , к вычислению в случае, когда z – простая двойная точка;
- Если известно возмущение дивизора $A = \sum k_j A_j$, устраняющее особенность в точке z и приводящее к дивизору типа I , числа $\omega_z(x, v), \omega'_z(x, v)$ нетрудно найти.
- Результаты вычислений для любой простой особенности (т.е. для A_n, D_n, E_6, E_7, E_8) указаны в моей работе 1983 г.

$\omega_z(x, v), \omega'_z(x, v)$ для простых особенностей

- Нахождение чисел $\omega_z(x, v), \omega'_z(x, v)$ можно свести, используя их поведение при раздутии B в точке z , к вычислению в случае, когда z – простая двойная точка;
- Если известно возмущение дивизора $A = \sum k_j A_j$, устраняющее особенность в точке z и приводящее к дивизору типа I , числа $\omega_z(x, v), \omega'_z(x, v)$ нетрудно найти.
- Результаты вычислений для любой простой особенности (т.е. для A_n, D_n, E_6, E_7, E_8) указаны в моей работе 1983 г.

$\omega_z(x, v), \omega'_z(x, v)$ для простых особенностей

- Нахождение чисел $\omega_z(x, v), \omega'_z(x, v)$ можно свести, используя их поведение при раздутии B в точке z , к вычислению в случае, когда z – простая двойная точка;
- Если известно возмущение дивизора $A = \sum k_j A_j$, устраняющее особенность в точке z и приводящее к дивизору типа I , числа $\omega_z(x, v), \omega'_z(x, v)$ нетрудно найти.
- Результаты вычислений для любой простой особенности (т.е. для A_n, D_n, E_6, E_7, E_8) указаны в моей работе 1983 г.

Исторические замечания

- Кривая A разбивающая $\Leftrightarrow [RA] = 0$ в $H_1(\mathbb{C}A; \mathbb{Z}_2)$.
- О.Я. Виро, *Комплексные ориентации вещественных алгебраических поверхностей*, УМН 37:4 (1982) с. 93,
перенёс понятие комплексных ориентаций на случай неособой поверхности X с $[RX] = 0$ в $H_2(\mathbb{C}X; \mathbb{Z}_2)$,
- И. О. Калинин, *Когомологические характеристики вещественных проективных гиперповерхностей*, Алгебра и анализ, 1991, том 3, выпуск 2, 91–110,
A.I.Degtyarev, *Stiefel orientations of a real algebraic variety*, Proc. of the Rennes Conf. on Real Algebraic Geometry, Lect Notes in Math., 1992.
O. Viro *Complex orientations of real algebraic surfaces*, Topology of manifolds and varieties, Advances of Soviet Math. 18 (1994), 261-284,
обобщили понятие комплексных ориентаций на случай неособого вещественного алгебраического многообразия любой размерности, но не получили аналог формулы Рохлина, т.к. в этих работах $[RX] \sim 0 \pmod{2}$ в $\mathbb{C}X$, а не целочисленно.

Исторические замечания

- Кривая A разбивающая $\Leftrightarrow [RA] = 0$ в $H_1(\mathbb{C}A; \mathbb{Z}_2)$.
- **О.Я. Виро**, *Комплексные ориентации вещественных алгебраических поверхностей*, УМН 37:4 (1982) с. 93,
перенёс понятие комплексных ориентаций на случай неособой поверхности X с $[RX] = 0$ в $H_2(\mathbb{C}X; \mathbb{Z}_2)$,
- **И. О. Калинин**, *Когомологические характеристики вещественных проективных гиперповерхностей*, Алгебра и анализ, 1991, том 3, выпуск 2, 91–110,
A.I.Degtyarev, *Stiefel orientations of a real algebraic variety*, Proc. of the Rennes Conf. on Real Algebraic Geometry, Lect Notes in Math., 1992.
O. Viro *Complex orientations of real algebraic surfaces*, Topology of manifolds and varieties, Advances of Soviet Math. 18 (1994), 261-284,
обобщили понятие комплексных ориентаций на случай неособого вещественного алгебраического многообразия любой размерности, но не получили аналог формулы Рохлина, т.к. в этих работах $[RX] \sim 0 \pmod{2}$ в $\mathbb{C}X$, а не целочисленно.

- Кривая A разбивающая $\Leftrightarrow [\mathbb{R}A] = 0$ в $H_1(\mathbb{C}A; \mathbb{Z}_2)$.
- **О.Я. Виро**, *Комплексные ориентации вещественных алгебраических поверхностей*, УМН 37:4 (1982) с. 93,
перенёс понятие комплексных ориентаций на случай неособой поверхности X с $[\mathbb{R}X] = 0$ в $H_2(\mathbb{C}X; \mathbb{Z}_2)$,
- **И. О. Калинин**, *Когомологические характеристики вещественных проективных гиперповерхностей*, Алгебра и анализ, 1991, том 3, выпуск 2, 91–110,
A.I. Degtyarev, *Stiefel orientations of a real algebraic variety*, Proc. of the Rennes Conf. on Real Algebraic Geometry, Lect Notes in Math., 1992.
O. Viro *Complex orientations of real algebraic surfaces*, Topology of manifolds and varieties, Advances of Soviet Math. 18 (1994), 261-284,
обобщили понятие комплексных ориентаций на случай неособого вещественного алгебраического многообразия любой размерности, но не получили аналог формулы Рохлина, т.к. в этих работах $[\mathbb{R}X] \sim 0 \pmod{2}$ в $\mathbb{C}X$, а не целочисленно.

Комплексная W -ориентация

- X – неособое вещественное алгебраическое многообразие размерности d , $\mathbb{C}X$ – множество его комплексных точек, $\mathbb{R}X$ – множество его вещественных точек.
- Пусть $\mathbb{R}X \neq \emptyset$ ориентировано и $[\mathbb{R}X] = 0$ в $H_d(\mathbb{C}X)$ (короче, $\mathbb{R}X \sim 0$ в $\mathbb{C}X$).
- W является $(d+1)$ -мерной ориентированной цепью с $\partial W = \mathbb{R}X$. Указанная ориентация многообразия $\mathbb{R}X$ называется *комплексной W -ориентацией*.

Комплексная W -ориентация

- X – неособое вещественное алгебраическое многообразие размерности d , $\mathbb{C}X$ – множество его комплексных точек, $\mathbb{R}X$ – множество его вещественных точек.
- Пусть $\mathbb{R}X \neq \emptyset$ ориентировано и $[\mathbb{R}X] = 0$ в $H_d(\mathbb{C}X)$ (короче, $\mathbb{R}X \sim 0$ в $\mathbb{C}X$).
- W является $(d+1)$ -мерной ориентированной цепью с $\partial W = \mathbb{R}X$.
Указанная ориентация многообразия $\mathbb{R}X$ называется *комплексной W -ориентацией*.

Комплексная W -ориентация

- X – неособое вещественное алгебраическое многообразие размерности d , $\mathbb{C}X$ – множество его комплексных точек, $\mathbb{R}X$ – множество его вещественных точек.
- Пусть $\mathbb{R}X \neq \emptyset$ ориентировано и $[\mathbb{R}X] = 0$ в $H_d(\mathbb{C}X)$ (короче, $\mathbb{R}X \sim 0$ в $\mathbb{C}X$).
- W является $(d+1)$ -мерной ориентированной цепью с $\partial W = \mathbb{R}X$. Указанная ориентация многообразия $\mathbb{R}X$ называется *комплексной W -ориентацией*.

Пример: вращение

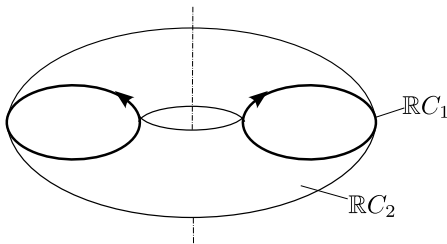
- Пусть $C_1 \subset P^2 : f(x_0, x_1, x_2^2) = 0$ – неособая вещественная кривая чётной степени, разбивающая свою комплексификацию. Она симметрична относительно прямой $L : x_2 = 0$.
- Пусть $\mathbb{R}C_1 \cap \mathbb{R}L = \emptyset$. Тогда её комплексная ориентация симметрична относительно $\mathbb{R}L$.
- Поверхность $\mathbb{R}C_2 \subset P^3 : f(x_0, x_1, x_2^2 + x_3^2) = 0$ получается вращением кривой $\mathbb{R}C_1$ в $\mathbb{R}P^3$ вокруг $\mathbb{R}L$ и гомологична нулю в комплексификации.
- Продолжая этот процесс, можно для любого $n \geq 1$ получить неособую вещественную n -мерную гиперповерхность $C_n \subset P^{n+1}$ чётной степени гомологичную нулю в комплексификации.

Пример: вращение

- Пусть $C_1 \subset P^2 : f(x_0, x_1, x_2^2) = 0$ – неособая вещественная кривая чётной степени, разбивающая свою комплексификацию. Она симметрична относительно прямой $L : x_2 = 0$.
- Пусть $\mathbb{R}C_1 \cap \mathbb{R}L = \emptyset$. Тогда её *комплексная ориентация симметрична относительно $\mathbb{R}L$* .
- Поверхность $\mathbb{R}C_2 \subset P^3 : f(x_0, x_1, x_2^2 + x_3^2) = 0$ получается вращением кривой $\mathbb{R}C_1$ в $\mathbb{R}P^3$ вокруг $\mathbb{R}L$ и гомологична нулю в комплексификации.
- Продолжая этот процесс, можно для любого $n \geq 1$ получить неособую вещественную n -мерную гиперповерхность $C_n \subset P^{n+1}$ чётной степени гомологичную нулю в комплексификации.

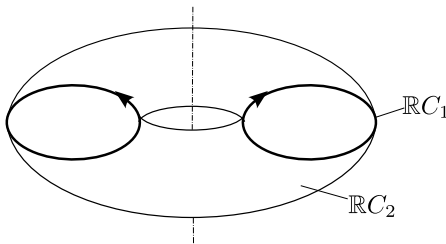
Пример: вращение

- Пусть $C_1 \subset P^2 : f(x_0, x_1, x_2^2) = 0$ – неособая вещественная кривая чётной степени, разбивающая свою комплексификацию. Она симметрична относительно прямой $L : x_2 = 0$.
- Пусть $\mathbb{R}C_1 \cap \mathbb{R}L = \emptyset$. Тогда её комплексная ориентация симметрична относительно $\mathbb{R}L$.
- Поверхность $\mathbb{R}C_2 \subset P^3 : f(x_0, x_1, x_2^2 + x_3^2) = 0$ получается вращением кривой $\mathbb{R}C_1$ в $\mathbb{R}P^3$ вокруг $\mathbb{R}L$ и гомологична нулю в комплексификации.
- Продолжая этот процесс, можно для любого $n \geq 1$ получить неособую вещественную n -мерную гиперповерхность $C_n \subset P^{n+1}$ чётной степени гомологичную нулю в комплексификации.



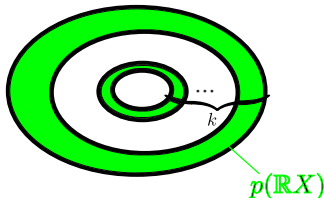
Пример: вращение

- Пусть $C_1 \subset P^2 : f(x_0, x_1, x_2^2) = 0$ – неособая вещественная кривая чётной степени, разбивающая свою комплексификацию. Она симметрична относительно прямой $L : x_2 = 0$.
- Пусть $\mathbb{R}C_1 \cap \mathbb{R}L = \emptyset$. Тогда её комплексная ориентация симметрична относительно $\mathbb{R}L$.
- Поверхность $\mathbb{R}C_2 \subset P^3 : f(x_0, x_1, x_2^2 + x_3^2) = 0$ получается вращением кривой $\mathbb{R}C_1$ в $\mathbb{R}P^3$ вокруг $\mathbb{R}L$ и гомологична нулю в комплексификации.
- Продолжая этот процесс, можно для любого $n \geq 1$ получить неособую вещественную n -мерную гиперповерхность $C_n \subset P^{n+1}$ чётной степени гомологичную нулю в комплексификации.



Пример: двулистное накрытие, разветвлённое над гиперболической кривой

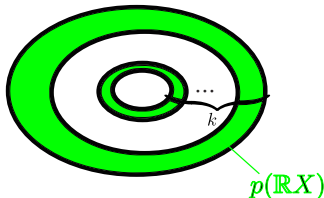
- $A \subset \mathbb{R}P^2$ – гиперболическая кривая степени $2k$ (гнездо), т.е. кривая из k овалов, последовательно вложенных друг в друга;



- Для двулистного накрытия $p : X \rightarrow \mathbb{R}P^2$, разветвлённого над A , у которого $p(\mathbb{R}X)$ не содержит внутреннего овала гнезда, $\mathbb{R}X \sim 0$ в $\mathbb{C}X$.

Пример: двулистное накрытие, разветвлённое над гиперболической кривой

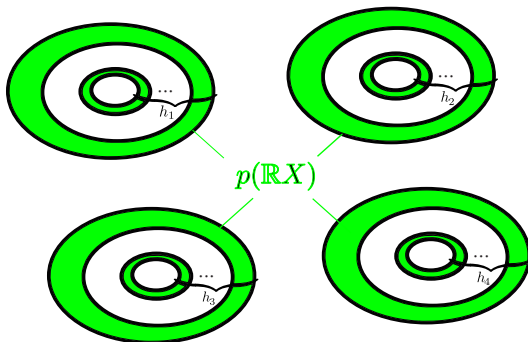
- $A \subset \mathbb{R}P^2$ – гиперболическая кривая степени $2k$ (гнездо), т.е. кривая из k овалов, последовательно вложенных друг в друга;



- Для двулистного накрытия $p : X \rightarrow \mathbb{R}P^2$, разветвлённого над A , у которого $p(\mathbb{R}X)$ не содержит внутреннего овала гнезда, $\mathbb{R}X \sim 0$ в $\mathbb{C}X$.

Пример: двулистное накрытие, разветвлённое над кривой с 4-мя гнёздами

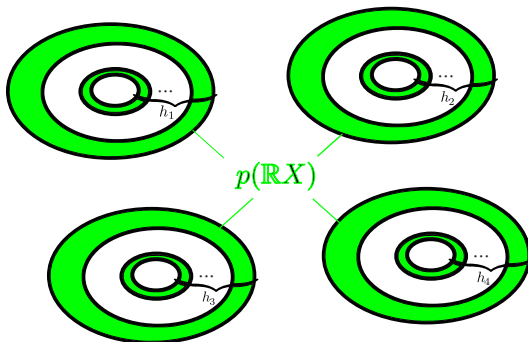
- $A \subset \mathbb{RP}^2$ – кривая степени $2k$ с 4-мя гнёздами, не лежащими внутри одного овала:



- $h_1, \dots, h_4$ – глубины гнёзд. Пусть $h_1 \equiv \dots, h_4 \equiv k \pmod{2}$ и $h_1 + \dots + h_4 = 2k$.
- Для двулистного накрытия $p: X \rightarrow \mathbb{RP}^2$, разветвлённого над A , у которого $p(\mathbb{R}X)$ не содержит внутренних овалов гнёзд, $\mathbb{R}X \sim 0$ в $\mathbb{C}X$.

Пример: двулистное накрытие, разветвлённое над кривой с 4-мя гнёздами

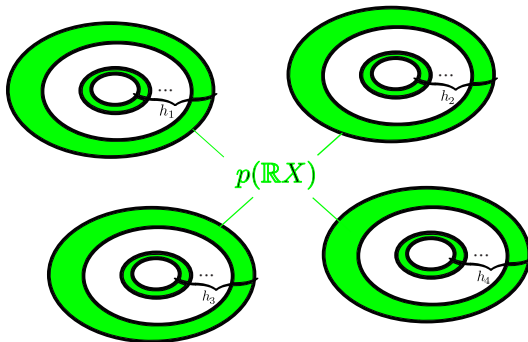
- $A \subset \mathbb{RP}^2$ – кривая степени $2k$ с 4-мя гнёздами, не лежащими внутри одного овала:



- $h_1, \dots, h_4$ – глубины гнёзд. Пусть $h_1 \equiv \dots, h_4 \equiv k \pmod{2}$ и $h_1 + \dots + h_4 = 2k$.
- Для двулистного накрытия $p: X \rightarrow \mathbb{RP}^2$, разветвлённого над A , у которого $p(\mathbb{R}X)$ не содержит внутренних овалов гнёзд, $\mathbb{R}X \sim 0$ в $\mathbb{C}X$.

Пример: двулистное накрытие, разветвлённое над кривой с 4-мя гнёздами

- $A \subset \mathbb{R}P^2$ – кривая степени $2k$ с 4-мя гнёздами, не лежащими внутри одного овала:



- $h_1, \dots, h_4$ – глубины гнёзд. Пусть $h_1 \equiv \dots, h_4 \equiv k \pmod{2}$ и $h_1 + \dots + h_4 = 2k$.
- Для двулистного накрытия $p: X \rightarrow \mathbb{R}P^2$, разветвлённого над A , у которого $p(\mathbb{R}X)$ не содержит внутренних овалов гнёзд, $\mathbb{R}X \sim 0$ в $\mathbb{C}X$.

Пример: край трубчатой окрестности

- Пусть $A \subset P^n : \begin{cases} f(x_0, \dots, x_n) = 0 \\ g(x_0, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$ – неособое полное пересечение вещественных гиперповерхностей одинаковой степени m ,
- $B \subset P^n : f^2 + g^2 = \varepsilon^2 x_0^{2m}$ и $\tilde{B}$ – неособое многообразие, полученное раздутием особенности $B \cap \{x_0 = 0\}$.

Теорема. Если $\mathbb{R}A \sim 0$ в $\mathbb{C}A$, то $\mathbb{R}\tilde{B} \sim 0$ в $\mathbb{C}\tilde{B}$ при малом ε .

Доказательство. Пусть $A_\varphi \subset P^n : \begin{cases} f(x_0, \dots, x_n) = \varepsilon x_0^m \cos \varphi \\ g(x_0, \dots, x_n) = \varepsilon x_0^m \sin \varphi \end{cases}$. Тогда

$A_\varphi \subset B$ и $\mathbb{R}A_\varphi \sim 0$ в $\mathbb{C}A_\varphi$ при малом ε и, если $\tilde{A}_\varphi \subset \tilde{B}$ – собственный прообраз многообразия A_φ , то $\mathbb{R}\tilde{A}_\varphi \sim 0$ в $\mathbb{C}\tilde{A}_\varphi$. Поэтому $\mathbb{R}\tilde{B} = \bigcup_{\varphi \in [0, 2\pi)} \mathbb{R}\tilde{A}_\varphi \sim 0$ в $\mathbb{C}\tilde{B}$.

Пример: край трубчатой окрестности

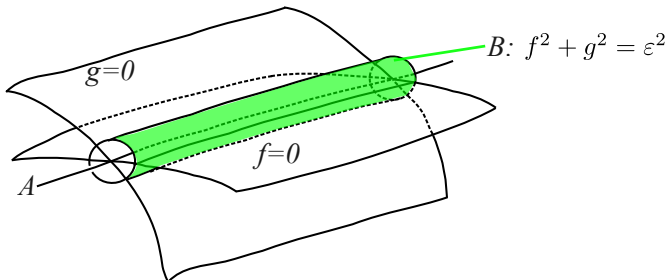
- Пусть $A \subset P^n : \begin{cases} f(x_0, \dots, x_n) = 0 \\ g(x_0, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$ – неособое полное пересечение вещественных гиперповерхностей одинаковой степени m ,
- $B \subset P^n : f^2 + g^2 = \varepsilon^2 x_0^{2m}$ и $\tilde{B}$ – неособое многообразие, полученное раздутием особенности $B \cap \{x_0 = 0\}$.

Теорема. Если $\mathbb{R}A \sim 0$ в $\mathbb{C}A$, то $\mathbb{R}\tilde{B} \sim 0$ в $\mathbb{C}\tilde{B}$ при малом ε .

Доказательство. Пусть $A_\varphi \subset P^n : \begin{cases} f(x_0, \dots, x_n) = \varepsilon x_0^m \cos \varphi \\ g(x_0, \dots, x_n) = \varepsilon x_0^m \sin \varphi \end{cases}$. Тогда

$A_\varphi \subset B$ и $\mathbb{R}A_\varphi \sim 0$ в $\mathbb{C}A_\varphi$ при малом ε и, если $\tilde{A}_\varphi \subset \tilde{B}$ – собственный прообраз многообразия A_φ , то $\mathbb{R}\tilde{A}_\varphi \sim 0$ в $\mathbb{C}\tilde{A}_\varphi$. Поэтому

$\mathbb{R}\tilde{B} = \bigcup_{\varphi \in [0, 2\pi)} \mathbb{R}\tilde{A}_\varphi \sim 0$ в $\mathbb{C}\tilde{B}$.



Пример: край трубчатой окрестности

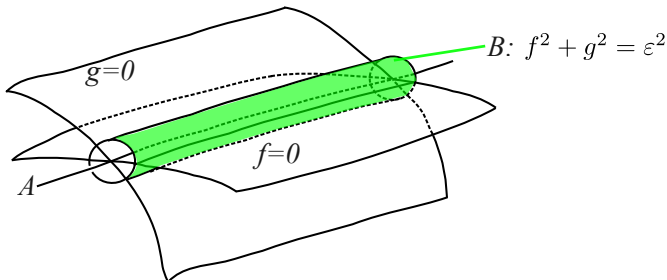
- Пусть $A \subset P^n : \begin{cases} f(x_0, \dots, x_n) = 0 \\ g(x_0, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$ – неособое полное пересечение вещественных гиперповерхностей одинаковой степени m ,
- $B \subset P^n : f^2 + g^2 = \varepsilon^2 x_0^{2m}$ и $\tilde{B}$ – неособое многообразие, полученное раздутием особенности $B \cap \{x_0 = 0\}$.

Теорема. Если $\mathbb{R}A \sim 0$ в $\mathbb{C}A$, то $\mathbb{R}\tilde{B} \sim 0$ в $\mathbb{C}\tilde{B}$ при малом ε .

Доказательство. Пусть $A_\varphi \subset P^n : \begin{cases} f(x_0, \dots, x_n) = \varepsilon x_0^m \cos \varphi \\ g(x_0, \dots, x_n) = \varepsilon x_0^m \sin \varphi \end{cases}$. Тогда

$A_\varphi \subset B$ и $\mathbb{R}A_\varphi \sim 0$ в $\mathbb{C}A_\varphi$ при малом ε и, если $\tilde{A}_\varphi \subset \tilde{B}$ – собственный прообраз многообразия A_φ , то $\mathbb{R}\tilde{A}_\varphi \sim 0$ в $\mathbb{C}\tilde{A}_\varphi$. Поэтому

$\mathbb{R}\tilde{B} = \bigcup_{\varphi \in [0, 2\pi)} \mathbb{R}\tilde{A}_\varphi \sim 0$ в $\mathbb{C}\tilde{B}$.



Пример: край трубчатой окрестности

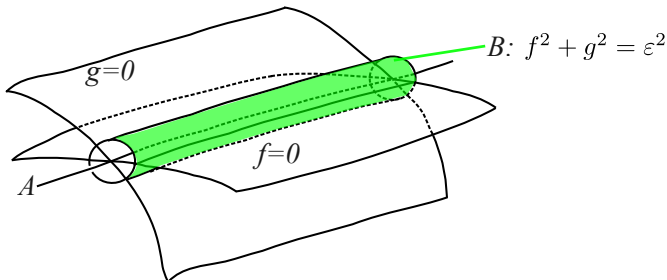
- Пусть $A \subset P^n : \begin{cases} f(x_0, \dots, x_n) = 0 \\ g(x_0, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$ – неособое полное пересечение вещественных гиперповерхностей одинаковой степени m ,
- $B \subset P^n : f^2 + g^2 = \varepsilon^2 x_0^{2m}$ и $\tilde{B}$ – неособое многообразие, полученное раздутием особенности $B \cap \{x_0 = 0\}$.

Теорема. Если $\mathbb{R}A \sim 0$ в $\mathbb{C}A$, то $\mathbb{R}\tilde{B} \sim 0$ в $\mathbb{C}\tilde{B}$ при малом ε .

Доказательство. Пусть $A_\varphi \subset P^n : \begin{cases} f(x_0, \dots, x_n) = \varepsilon x_0^m \cos \varphi \\ g(x_0, \dots, x_n) = \varepsilon x_0^m \sin \varphi \end{cases}$. Тогда

$A_\varphi \subset B$ и $\mathbb{R}A_\varphi \sim 0$ в $\mathbb{C}A_\varphi$ при малом ε и, если $\tilde{A}_\varphi \subset \tilde{B}$ – собственный прообраз многообразия A_φ , то $\mathbb{R}\tilde{A}_\varphi \sim 0$ в $\mathbb{C}\tilde{A}_\varphi$. Поэтому

$\mathbb{R}\tilde{B} = \bigcup_{\varphi \in [0, 2\pi)} \mathbb{R}\tilde{A}_\varphi \sim 0$ в $\mathbb{C}\tilde{B}$.



Расслоения

- Ясно, что если $\mathbb{R}X \sim 0$ в $\mathbb{C}X$ или $\mathbb{R}Y \sim 0$ в $\mathbb{C}Y$, то $\mathbb{R}X \times \mathbb{R}Y \sim 0$ в $\mathbb{C}X \times \mathbb{C}Y$.
- Более общая ситуация:
Пусть $p: E \rightarrow B$ – гладкое сюръективное отображение неособых вещественных алгебраических многообразий с ориентируемыми $\mathbb{R}B$ и $\mathbb{R}E$ и неособыми слоями. Тогда если $\mathbb{R}F \sim 0$ в $\mathbb{C}F$ для каждого слоя F , то $\mathbb{R}E \sim 0$ в $\mathbb{C}E$.
- В частности, для геометрически линейчатой поверхности $p: \Sigma \rightarrow B$ с ориентируемым $\mathbb{R}\Sigma$, т.е. состоящим из торов, (например, для поверхности Хирцебруха Σ_{2k}) $\mathbb{R}\Sigma \sim 0$ в $\mathbb{C}\Sigma$.

Расслоения

- Ясно, что если $\mathbb{R}X \sim 0$ в $\mathbb{C}X$ или $\mathbb{R}Y \sim 0$ в $\mathbb{C}Y$, то $\mathbb{R}X \times \mathbb{R}Y \sim 0$ в $\mathbb{C}X \times \mathbb{C}Y$.
- Более общая ситуация:
Пусть $p: E \rightarrow B$ – гладкое сюръективное отображение неособых вещественных алгебраических многообразий с ориентируемыми $\mathbb{R}B$ и $\mathbb{R}E$ и неособыми слоями. Тогда если $\mathbb{R}F \sim 0$ в $\mathbb{C}F$ для каждого слоя F , то $\mathbb{R}E \sim 0$ в $\mathbb{C}E$.
- В частности, для геометрически линейчатой поверхности $p: \Sigma \rightarrow B$ с ориентируемым $\mathbb{R}\Sigma$, т.е. состоящим из торов, (например, для поверхности Хирцебруха Σ_{2k}) $\mathbb{R}\Sigma \sim 0$ в $\mathbb{C}\Sigma$.

Расслоения

- Ясно, что если $\mathbb{R}X \sim 0$ в $\mathbb{C}X$ или $\mathbb{R}Y \sim 0$ в $\mathbb{C}Y$, то $\mathbb{R}X \times \mathbb{R}Y \sim 0$ в $\mathbb{C}X \times \mathbb{C}Y$.
- Более общая ситуация:
Пусть $p : E \rightarrow B$ – гладкое сюръективное отображение неособых вещественных алгебраических многообразий с ориентируемыми $\mathbb{R}B$ и $\mathbb{R}E$ и неособыми слоями. Тогда если $\mathbb{R}F \sim 0$ в $\mathbb{C}F$ для каждого слоя F , то $\mathbb{R}E \sim 0$ в $\mathbb{C}E$.
- В частности, для геометрически линейчатой поверхности $p : \Sigma \rightarrow B$ с ориентируемым $\mathbb{R}\Sigma$, т.е. состоящим из торов, (например, для поверхности Хирцебруха Σ_{2k}) $\mathbb{R}\Sigma \sim 0$ в $\mathbb{C}\Sigma$.

Лемма Арнольда

Лемма (Арнольд 1971)

Индекс самопересечения вещественного ориентируемого компактного гладкого аналитического многообразия M размерности $2n$ в его комплексификации равен $(-1)^n \chi$, где χ — эйлерова характеристика многообразия M .

X — неособое вещественное алгебраическое многообразие размерности $2n$,
Лемма Арнольда используется в доказательстве следующей теоремы.

Лемма Арнольда

Лемма (Арнольд 1971)

Индекс самопересечения вещественного ориентируемого компактного гладкого аналитического многообразия M размерности $2n$ в его комплексификации равен $(-1)^n \chi$, где χ — эйлерова характеристика многообразия M .

X — неособое вещественное алгебраическое многообразие размерности $2n$,
Лемма Арнольда используется в доказательстве следующей теоремы.

Теорема

Пусть $\mathbb{R}X \neq \emptyset$ ориентировано и $\mathbb{R}X \sim 0$ в $\mathbb{C}X$. Тогда эйлерова характеристика $\chi(X_i) = 0$ для любой компоненты X_i множества $\mathbb{R}X$.

Лемма Арнольда

Лемма (Арнольд 1971)

Индекс самопересечения вещественного ориентируемого компактного гладкого аналитического многообразия M размерности $2n$ в его комплексификации равен $(-1)^n \chi$, где χ — эйлерова характеристика многообразия M .

X — неособое вещественное алгебраическое многообразие размерности $2n$,
Лемма Арнольда используется в доказательстве следующей теоремы.

Теорема

Пусть $\mathbb{R}X \neq \emptyset$ ориентировано и $\mathbb{R}X \sim 0$ в $\mathbb{C}X$. Тогда эйлерова характеристика $\chi(X_i) = 0$ для любой компоненты X_i множества $\mathbb{R}X$.

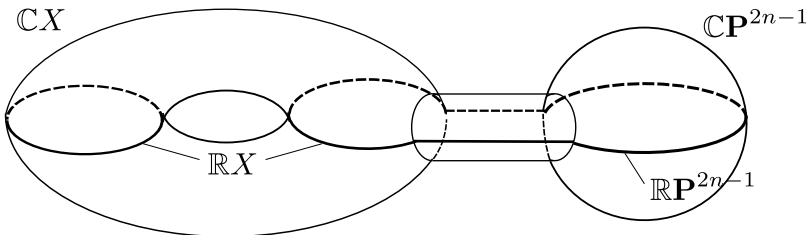
Многообразия нечётной размерности: раздутие

- X – неособое вещественное алгебраическое многообразие размерности $2n - 1$;
- $bl_a : \tilde{X} \rightarrow X$ – раздутие в точке $a \in \mathbb{R}X$

- Если $\mathbb{R}X \sim 0$ в $\mathbb{C}X$, то $\mathbb{R}\tilde{X} \sim 0$ в $\mathbb{C}\tilde{X}$, поскольку $\mathbb{R}\mathbb{P}^{2n-1} \sim 0$ в $\mathbb{C}\mathbb{P}^{2n-1}$.

Многообразия нечётной размерности: раздутие

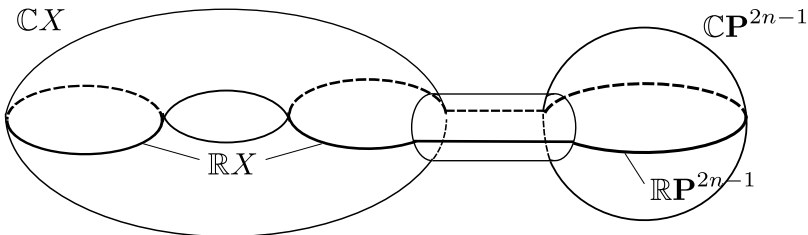
- X – неособое вещественное алгебраическое многообразие размерности $2n - 1$;
- $bl_a : \tilde{X} \rightarrow X$ – раздутие в точке $a \in \mathbb{R}X$



- Если $\mathbb{R}X \sim 0$ в CX , то $\mathbb{R}\tilde{X} \sim 0$ в $C\tilde{X}$, поскольку $\mathbb{R}P^{2n-1} \sim 0$ в $C\mathbb{P}^{2n-1}$.

Многообразия нечётной размерности: раздутие

- X – неособое вещественное алгебраическое многообразие размерности $2n - 1$;
- $bl_a : \tilde{X} \rightarrow X$ – раздутие в точке $a \in \mathbb{R}X$



- Если $\mathbb{R}X \sim 0$ в CX , то $\mathbb{R}\tilde{X} \sim 0$ в $C\tilde{X}$, поскольку $\mathbb{R}P^{2n-1} \sim 0$ в $C\mathbb{P}^{2n-1}$.

Формула комплексных ориентаций

- $X \subset P^{2n}$ – неособая вещественная алгебраическая гиперповерхность с $\mathbb{R}X \sim 0$ в $\mathbb{C}X$;
- W – $2n$ -мерная ориентированная цепь с $\partial W = \mathbb{R}X$ и с $W \cap \text{conj}W = \emptyset$;
- $B_1, \dots, B_l$ – все ориентируемые компоненты связности множества $\mathbb{R}P^{2n} \setminus \mathbb{R}X$,
- b_j класс, определяемый в $H_{2n}(\mathbb{R}P^{2n}, \mathbb{R}X; \mathbb{Q})$ множеством B_j , наделённым некоторой ориентацией.
- Если $\mathbb{R}X$ реализует нуль в $H_{2n-1}(\mathbb{R}P^{2n}; \mathbb{Q})$, то существуют такие $x_1, \dots, x_l \in \mathbb{Q}$, что образ класса $x = \sum x_j b_j$ при граничном гомоморфизме $H_{2n}(\mathbb{R}P^{2n}, \mathbb{R}X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_{2n-1}(\mathbb{R}X; \mathbb{Q})$ есть фундаментальный класс $[\mathbb{R}X] = [\partial W]$ гиперповерхности $\mathbb{R}X$, наделённой комплексной W -ориентацией;
- классы $\xi(x), \eta(x) \in H_{2n}(\mathbb{C}P^{2n}; \mathbb{Q})$ реализуются циклами $W - x, x - \text{conj}W$.

Формула комплексных ориентаций

- $X \subset P^{2n}$ – неособая вещественная алгебраическая гиперповерхность с $\mathbb{R}X \sim 0$ в $\mathbb{C}X$;
- W – $2n$ -мерная ориентированная цепь с $\partial W = \mathbb{R}X$ и с $W \cap \text{conj}W = \emptyset$;
- $B_1, \dots, B_l$ – все ориентируемые компоненты связности множества $\mathbb{R}P^{2n} \setminus \mathbb{R}X$,
- b_j класс, определяемый в $H_{2n}(\mathbb{R}P^{2n}, \mathbb{R}X; \mathbb{Q})$ множеством B_j , наделённым некоторой ориентацией.
- Если $\mathbb{R}X$ реализует нуль в $H_{2n-1}(\mathbb{R}P^{2n}; \mathbb{Q})$, то существуют такие $x_1, \dots, x_l \in \mathbb{Q}$, что образ класса $x = \sum x_j b_j$ при граничном гомоморфизме $H_{2n}(\mathbb{R}P^{2n}, \mathbb{R}X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_{2n-1}(\mathbb{R}X; \mathbb{Q})$ есть фундаментальный класс $[\mathbb{R}X] = [\partial W]$ гиперповерхности $\mathbb{R}X$, наделённой комплексной W -ориентацией;
- классы $\xi(x), \eta(x) \in H_{2n}(\mathbb{C}P^{2n}; \mathbb{Q})$ реализуются циклами $W - x, x - \text{conj}W$.

Формула комплексных ориентаций

- $X \subset P^{2n}$ – неособая вещественная алгебраическая гиперповерхность с $\mathbb{R}X \sim 0$ в $\mathbb{C}X$;
- W – $2n$ -мерная ориентированная цепь с $\partial W = \mathbb{R}X$ и с $W \cap \text{conj}W = \emptyset$;
- $B_1, \dots, B_l$ – все ориентируемые компоненты связности множества $\mathbb{R}P^{2n} \setminus \mathbb{R}X$,
- b_j класс, определяемый в $H_{2n}(\mathbb{R}P^{2n}, \mathbb{R}X; \mathbb{Q})$ множеством B_j , наделённым некоторой ориентацией.
- Если $\mathbb{R}X$ реализует нуль в $H_{2n-1}(\mathbb{R}P^{2n}; \mathbb{Q})$, то существуют такие $x_1, \dots, x_l \in \mathbb{Q}$, что образ класса $x = \sum x_j b_j$ при граничном гомоморфизме $H_{2n}(\mathbb{R}P^{2n}, \mathbb{R}X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_{2n-1}(\mathbb{R}X; \mathbb{Q})$ есть фундаментальный класс $[\mathbb{R}X] = [\partial W]$ гиперповерхности $\mathbb{R}X$, наделённой комплексной W -ориентацией;
- классы $\xi(x), \eta(x) \in H_{2n}(\mathbb{C}P^{2n}; \mathbb{Q})$ реализуются циклами $W - x, x - \text{conj}W$.

Формула комплексных ориентаций

- $X \subset P^{2n}$ – неособая вещественная алгебраическая гиперповерхность с $\mathbb{R}X \sim 0$ в $\mathbb{C}X$;
- W – $2n$ -мерная ориентированная цепь с $\partial W = \mathbb{R}X$ и с $W \cap \text{conj}W = \emptyset$;
- $B_1, \dots, B_l$ – все ориентируемые компоненты связности множества $\mathbb{R}P^{2n} \setminus \mathbb{R}X$,
- b_j класс, определяемый в $H_{2n}(\mathbb{R}P^{2n}, \mathbb{R}X; \mathbb{Q})$ множеством B_j , наделённым некоторой ориентацией.
- Если $\mathbb{R}X$ реализует нуль в $H_{2n-1}(\mathbb{R}P^{2n}; \mathbb{Q})$, то существуют такие $x_1, \dots, x_l \in \mathbb{Q}$, что образ класса $x = \sum x_j b_j$ при граничном гомоморфизме $H_{2n}(\mathbb{R}P^{2n}, \mathbb{R}X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_{2n-1}(\mathbb{R}X; \mathbb{Q})$ есть фундаментальный класс $[\mathbb{R}X] = [\partial W]$ гиперповерхности $\mathbb{R}X$, наделённой комплексной W -ориентацией;
- классы $\xi(x), \eta(x) \in H_{2n}(\mathbb{C}P^{2n}; \mathbb{Q})$ реализуются циклами $W - x, x - \text{conj}W$.

Формула комплексных ориентаций

- $X \subset P^{2n}$ – неособая вещественная алгебраическая гиперповерхность с $\mathbb{R}X \sim 0$ в $\mathbb{C}X$;
- W – $2n$ -мерная ориентированная цепь с $\partial W = \mathbb{R}X$ и с $W \cap \text{conj}W = \emptyset$;
- $B_1, \dots, B_l$ – все ориентируемые компоненты связности множества $\mathbb{R}P^{2n} \setminus \mathbb{R}X$,
- b_j класс, определяемый в $H_{2n}(\mathbb{R}P^{2n}, \mathbb{R}X; \mathbb{Q})$ множеством B_j , наделённым некоторой ориентацией.
- Если $\mathbb{R}X$ реализует нуль в $H_{2n-1}(\mathbb{R}P^{2n}; \mathbb{Q})$, то существуют такие $x_1, \dots, x_l \in \mathbb{Q}$, что образ класса $x = \sum x_j b_j$ при граничном гомоморфизме $H_{2n}(\mathbb{R}P^{2n}, \mathbb{R}X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_{2n-1}(\mathbb{R}X; \mathbb{Q})$ есть фундаментальный класс $[\mathbb{R}X] = [\partial W]$ гиперповерхности $\mathbb{R}X$, наделённой комплексной W -ориентацией;
- классы $\xi(x), \eta(x) \in H_{2n}(\mathbb{C}P^{2n}; \mathbb{Q})$ реализуются циклами $W - x, x - \text{conj}W$.

Формула комплексных ориентаций

- $X \subset P^{2n}$ – неособая вещественная алгебраическая гиперповерхность с $\mathbb{R}X \sim 0$ в $\mathbb{C}X$;
- W – $2n$ -мерная ориентированная цепь с $\partial W = \mathbb{R}X$ и с $W \cap \text{conj}W = \emptyset$;
- $B_1, \dots, B_l$ – все ориентируемые компоненты связности множества $\mathbb{R}P^{2n} \setminus \mathbb{R}X$,
- b_j класс, определяемый в $H_{2n}(\mathbb{R}P^{2n}, \mathbb{R}X; \mathbb{Q})$ множеством B_j , наделённым некоторой ориентацией.
- Если $\mathbb{R}X$ реализует нуль в $H_{2n-1}(\mathbb{R}P^{2n}; \mathbb{Q})$, то существуют такие $x_1, \dots, x_l \in \mathbb{Q}$, что образ класса $x = \sum x_j b_j$ при граничном гомоморфизме $H_{2n}(\mathbb{R}P^{2n}, \mathbb{R}X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_{2n-1}(\mathbb{R}X; \mathbb{Q})$ есть фундаментальный класс $[\mathbb{R}X] = [\partial W]$ гиперповерхности $\mathbb{R}X$, наделённой комплексной W -ориентацией;
- классы $\xi(x), \eta(x) \in H_{2n}(\mathbb{C}P^{2n}; \mathbb{Q})$ реализуются циклами $W - x, x - \text{conj}W$.

Формула комплексных ориентаций

- $X \subset P^{2n}$ – неособая вещественная алгебраическая гиперповерхность с $\mathbb{R}X \sim 0$ в $\mathbb{C}X$;
- W – $2n$ -мерная ориентированная цепь с $\partial W = \mathbb{R}X$ и с $W \cap \text{conj}W = \emptyset$;
- $B_1, \dots, B_l$ – все ориентируемые компоненты связности множества $\mathbb{R}P^{2n} \setminus \mathbb{R}X$,
- b_j класс, определяемый в $H_{2n}(\mathbb{R}P^{2n}, \mathbb{R}X; \mathbb{Q})$ множеством B_j , наделённым некоторой ориентацией.
- Если $\mathbb{R}X$ реализует нуль в $H_{2n-1}(\mathbb{R}P^{2n}; \mathbb{Q})$, то существуют такие $x_1, \dots, x_l \in \mathbb{Q}$, что образ класса $x = \sum x_j b_j$ при граничном гомоморфизме $H_{2n}(\mathbb{R}P^{2n}, \mathbb{R}X; \mathbb{Q}) \rightarrow H_{2n-1}(\mathbb{R}X; \mathbb{Q})$ есть фундаментальный класс $[\mathbb{R}X] = [\partial W]$ гиперповерхности $\mathbb{R}X$, наделённой комплексной W -ориентацией;
- классы $\xi(x), \eta(x) \in H_{2n}(\mathbb{C}P^{2n}; \mathbb{Q})$ реализуются циклами $W - x, x - \text{conj}W$.

Теорема (Формула комплексных ориентаций для гиперповерхности)

$$\sum x_j^2 \chi(B_j) = \xi(x)\eta(x).$$

Замечание

Для гиперповерхности X степени m в формуле комплексных ориентаций во всех построенных примерах для ориентированной цепи W с $\partial W = \mathbb{R}X$ условие $W \cap \text{conj}W = \emptyset$ выполнено, и $\xi(x)\eta(x) = m^2/4$ в формуле комплексных ориентаций.

Комплексные ориентации для почти комплексных многообразий

- X – почти комплексное многообразие, размерности $2d$, на котором действует гладкая инволюция conj с непустым ориентируемым множеством вещественных точек $\mathbb{R}X = \text{fix } \text{conj}$;
- Пусть множество $\mathbb{R}X$, наделённое некоторой ориентацией, реализует нулевой класс в $H_d(X)$ и W является $(d+1)$ -мерной ориентированной цепью $\partial W = \mathbb{R}X$. Указанная ориентация многообразия $\mathbb{R}X$ называется *комплексной W -ориентацией*.

Комплексные ориентации для почти комплексных многообразий

- X – почти комплексное многообразие, размерности $2d$, на котором действует гладкая инволюция conj с непустым ориентируемым множеством вещественных точек $\mathbb{R}X = \text{fix } \text{conj}$;
- Пусть множество $\mathbb{R}X$, наделённое некоторой ориентацией, реализует нулевой класс в $H_d(X)$ и W является $(d+1)$ -мерной ориентированной цепью с $\partial W = \mathbb{R}X$. Указанная ориентация многообразия $\mathbb{R}X$ называется *комплексной W -ориентацией*.

Многообразия размерности $4n$

Пусть X – почти комплексное многообразие размерности $4n$, на котором действует гладкая инволюция conj .

Как и ранее, следующая теорема получается из леммы Арнольда.

Теорема

Если $\mathbb{R}X \neq \emptyset$ ориентировано и $\mathbb{R}X \sim 0$ в X , то эйлерова характеристика $\chi(X_i) = 0$ для любой компоненты X_i множества $\mathbb{R}X$.

Многообразия размерности $4n$

Пусть X – почти комплексное многообразие размерности $4n$, на котором действует гладкая инволюция conj .

Как и ранее, следующая теорема получается из леммы Арнольда.

Теорема

Если $\mathbb{R}X \neq \emptyset$ ориентировано и $\mathbb{R}X \sim 0$ в X , то эйлерова характеристика $\chi(X_i) = 0$ для любой компоненты X_i множества $\mathbb{R}X$.

Пара почти комплексных многообразий

- B – почти комплексное многообразие размерности $4n$, на котором действует гладкая инволюция conj с $\mathbb{R}B \neq \emptyset$;
- $A \subset B$ – его $(4n - 2)$ -мерное почти комплексное подмногообразие, инвариантное относительно conj .
- Пусть $\mathbb{R}A$ гомологично нулю в A , причём существует $2n$ -мерная ориентированная цепь с $\partial W = \mathbb{R}A$ и с $W \cap \text{conj}W = \emptyset$.
- $B_1, \dots, B_l$ – все ориентируемые компоненты связности множества $\mathbb{R}B \setminus \mathbb{R}A$.
- b_j класс, определяемый в $H_{2n}(\mathbb{R}B, \mathbb{R}A; \mathbb{Q})$ множеством B_j , наделённым некоторой ориентацией.
- Если $\mathbb{R}X \sim 0$ в $\mathbb{C}X$, то существуют такие $x_1, \dots, x_l \in \mathbb{Q}$, что образ класса $x = \sum x_j b_j$ при граничном гомоморфизме $H_{2n}(\mathbb{R}B, \mathbb{R}A; \mathbb{Q}) \rightarrow H_{2n-1}(\mathbb{R}A; \mathbb{Q})$ есть фундаментальный класс $[\mathbb{R}A] = [\partial W]$ многообразия $\mathbb{R}A$, наделённого комплексной W -ориентацией;
- классы $\xi(x), \eta(x) \in H_n(B; \mathbb{Q})$ реализуются циклами $W - x, x - \text{conj}W$.

Пара почти комплексных многообразий

- B – почти комплексное многообразие размерности $4n$, на котором действует гладкая инволюция conj с $\mathbb{R}B \neq \emptyset$;
- $A \subset B$ – его $(4n - 2)$ -мерное почти комплексное подмногообразие, инвариантное относительно conj .
- Пусть $\mathbb{R}A$ гомологично нулю в A , причём существует $2n$ -мерная ориентированная цепь с $\partial W = \mathbb{R}A$ и с $W \cap \text{conj}W = \emptyset$.
- $B_1, \dots, B_l$ – все ориентируемые компоненты связности множества $\mathbb{R}B \setminus \mathbb{R}A$.
- b_j класс, определяемый в $H_{2n}(\mathbb{R}B, \mathbb{R}A; \mathbb{Q})$ множеством B_j , наделённым некоторой ориентацией.
- Если $\mathbb{R}X \sim 0$ в $\mathbb{C}X$, то существуют такие $x_1, \dots, x_l \in \mathbb{Q}$, что образ класса $x = \sum x_j b_j$ при граничном гомоморфизме $H_{2n}(\mathbb{R}B, \mathbb{R}A; \mathbb{Q}) \rightarrow H_{2n-1}(\mathbb{R}A; \mathbb{Q})$ есть фундаментальный класс $[\mathbb{R}A] = [\partial W]$ многообразия $\mathbb{R}A$, наделённого комплексной W -ориентацией;
- классы $\xi(x), \eta(x) \in H_n(B; \mathbb{Q})$ реализуются циклами $W - x, x - \text{conj}W$.

Пара почти комплексных многообразий

- B – почти комплексное многообразие размерности $4n$, на котором действует гладкая инволюция conj с $\mathbb{R}B \neq \emptyset$;
- $A \subset B$ – его $(4n - 2)$ -мерное почти комплексное подмногообразие, инвариантное относительно conj .
- Пусть $\mathbb{R}A$ гомологично нулю в A , причём существует $2n$ -мерная ориентированная цепь с $\partial W = \mathbb{R}A$ и с $W \cap \text{conj}W = \emptyset$.
- $B_1, \dots, B_l$ – все ориентируемые компоненты связности множества $\mathbb{R}B \setminus \mathbb{R}A$.
- b_j класс, определяемый в $H_{2n}(\mathbb{R}B, \mathbb{R}A; \mathbb{Q})$ множеством B_j , наделённым некоторой ориентацией.
- Если $\mathbb{R}X \sim 0$ в $\mathbb{C}X$, то существуют такие $x_1, \dots, x_l \in \mathbb{Q}$, что образ класса $x = \sum x_j b_j$ при граничном гомоморфизме $H_{2n}(\mathbb{R}B, \mathbb{R}A; \mathbb{Q}) \rightarrow H_{2n-1}(\mathbb{R}A; \mathbb{Q})$ есть фундаментальный класс $[\mathbb{R}A] = [\partial W]$ многообразия $\mathbb{R}A$, наделённого комплексной W -ориентацией;
- классы $\xi(x), \eta(x) \in H_n(B; \mathbb{Q})$ реализуются циклами $W - x, x - \text{conj}W$.

Пара почти комплексных многообразий

- B – почти комплексное многообразие размерности $4n$, на котором действует гладкая инволюция conj с $\mathbb{R}B \neq \emptyset$;
- $A \subset B$ – его $(4n - 2)$ -мерное почти комплексное подмногообразие, инвариантное относительно conj .
- Пусть $\mathbb{R}A$ гомологично нулю в A , причём существует $2n$ -мерная ориентированная цепь с $\partial W = \mathbb{R}A$ и с $W \cap \text{conj}W = \emptyset$.
- $B_1, \dots, B_l$ – все ориентируемые компоненты связности множества $\mathbb{R}B \setminus \mathbb{R}A$.
- b_j класс, определяемый в $H_{2n}(\mathbb{R}B, \mathbb{R}A; \mathbb{Q})$ множеством B_j , наделённым некоторой ориентацией.
- Если $\mathbb{R}X \sim 0$ в $\mathbb{C}X$, то существуют такие $x_1, \dots, x_l \in \mathbb{Q}$, что образ класса $x = \sum x_j b_j$ при граничном гомоморфизме $H_{2n}(\mathbb{R}B, \mathbb{R}A; \mathbb{Q}) \rightarrow H_{2n-1}(\mathbb{R}A; \mathbb{Q})$ есть фундаментальный класс $[\mathbb{R}A] = [\partial W]$ многообразия $\mathbb{R}A$, наделённого комплексной W -ориентацией;
- классы $\xi(x), \eta(x) \in H_n(B; \mathbb{Q})$ реализуются циклами $W - x, x - \text{conj}W$.

Пара почти комплексных многообразий

- B – почти комплексное многообразие размерности $4n$, на котором действует гладкая инволюция conj с $\mathbb{R}B \neq \emptyset$;
- $A \subset B$ – его $(4n - 2)$ -мерное почти комплексное подмногообразие, инвариантное относительно conj .
- Пусть $\mathbb{R}A$ гомологично нулю в A , причём существует $2n$ -мерная ориентированная цепь с $\partial W = \mathbb{R}A$ и с $W \cap \text{conj}W = \emptyset$.
- $B_1, \dots, B_l$ – все ориентируемые компоненты связности множества $\mathbb{R}B \setminus \mathbb{R}A$.
- b_j класс, определяемый в $H_{2n}(\mathbb{R}B, \mathbb{R}A; \mathbb{Q})$ множеством B_j , наделённым некоторой ориентацией.
- Если $\mathbb{R}X \sim 0$ в $\mathbb{C}X$, то существуют такие $x_1, \dots, x_l \in \mathbb{Q}$, что образ класса $x = \sum x_j b_j$ при граничном гомоморфизме $H_{2n}(\mathbb{R}B, \mathbb{R}A; \mathbb{Q}) \rightarrow H_{2n-1}(\mathbb{R}A; \mathbb{Q})$ есть фундаментальный класс $[\mathbb{R}A] = [\partial W]$ многообразия $\mathbb{R}A$, наделённого комплексной W -ориентацией;
- классы $\xi(x), \eta(x) \in H_n(B; \mathbb{Q})$ реализуются циклами $W - x, x - \text{conj}W$.

Пара почти комплексных многообразий

- B – почти комплексное многообразие размерности $4n$, на котором действует гладкая инволюция conj с $\mathbb{R}B \neq \emptyset$;
- $A \subset B$ – его $(4n - 2)$ -мерное почти комплексное подмногообразие, инвариантное относительно conj .
- Пусть $\mathbb{R}A$ гомологично нулю в A , причём существует $2n$ -мерная ориентированная цепь с $\partial W = \mathbb{R}A$ и с $W \cap \text{conj}W = \emptyset$.
- $B_1, \dots, B_l$ – все ориентируемые компоненты связности множества $\mathbb{R}B \setminus \mathbb{R}A$.
- b_j класс, определяемый в $H_{2n}(\mathbb{R}B, \mathbb{R}A; \mathbb{Q})$ множеством B_j , наделённым некоторой ориентацией.
- Если $\mathbb{R}X \sim 0$ в $\mathbb{C}X$, то существуют такие $x_1, \dots, x_l \in \mathbb{Q}$, что образ класса $x = \sum x_j b_j$ при граничном гомоморфизме $H_{2n}(\mathbb{R}B, \mathbb{R}A; \mathbb{Q}) \rightarrow H_{2n-1}(\mathbb{R}A; \mathbb{Q})$ есть фундаментальный класс $[\mathbb{R}A] = [\partial W]$ многообразия $\mathbb{R}A$, наделённого комплексной W -ориентацией;
- классы $\xi(x), \eta(x) \in H_n(B; \mathbb{Q})$ реализуются циклами $W - x, x - \text{conj}W$.

Пара почти комплексных многообразий

- B – почти комплексное многообразие размерности $4n$, на котором действует гладкая инволюция conj с $\mathbb{R}B \neq \emptyset$;
- $A \subset B$ – его $(4n - 2)$ -мерное почти комплексное подмногообразие, инвариантное относительно conj .
- Пусть $\mathbb{R}A$ гомологично нулю в A , причём существует $2n$ -мерная ориентированная цепь с $\partial W = \mathbb{R}A$ и с $W \cap \text{conj}W = \emptyset$.
- $B_1, \dots, B_l$ – все ориентируемые компоненты связности множества $\mathbb{R}B \setminus \mathbb{R}A$.
- b_j класс, определяемый в $H_{2n}(\mathbb{R}B, \mathbb{R}A; \mathbb{Q})$ множеством B_j , наделённым некоторой ориентацией.
- Если $\mathbb{R}X \sim 0$ в $\mathbb{C}X$, то существуют такие $x_1, \dots, x_l \in \mathbb{Q}$, что образ класса $x = \sum x_j b_j$ при граничном гомоморфизме $H_{2n}(\mathbb{R}B, \mathbb{R}A; \mathbb{Q}) \rightarrow H_{2n-1}(\mathbb{R}A; \mathbb{Q})$ есть фундаментальный класс $[\mathbb{R}A] = [\partial W]$ многообразия $\mathbb{R}A$, наделённого комплексной W -ориентацией;
- классы $\xi(x), \eta(x) \in H_n(B; \mathbb{Q})$ реализуются циклами $W - x, x - \text{conj}W$.

Формулы комплексных ориентаций для почти комплексных многообразий

Теорема

① $\sum x_j^2 \chi(B_j) = \xi(x) \eta(x).$

② Для всякой ориентируемой компоненты B' множества $\mathbb{R}B$ пусть $[B']$ – её фундаментальный класс, и $B'_1, \dots, B'_{l'}$ – все компоненты связности множества $B' \setminus \mathbb{R}A$. Тогда

$$\sum x_j \chi(B'_j) = \xi(x)[B'] = -\eta(x)[B']$$

Формулы комплексных ориентаций для почти комплексных многообразий

Теорема

- ① $\sum x_j^2 \chi(B_j) = \xi(x) \eta(x).$
- ② Для всякой ориентируемой компоненты B' множества $\mathbb{R}B$ пусть $[B']$ – её фундаментальный класс, и $B'_1, \dots, B'_{l'}$ – все компоненты связности множества $B' \setminus \mathbb{R}A$. Тогда

$$\sum x_j \chi(B'_j) = \xi(x)[B'] = -\eta(x)[B']$$

Спасибо за внимание.