Голоморфное продолжение в голоморфных расслоениях с (1,0)-компактифицируемым слоем

Сергей Феклистов, СФУ

Красноярск, 2022

Введение

- **Hartogs (1906):** Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ — область, $K \subset D$ — компакт и $D \setminus K$ связно, $n > 1$. Тогда гомоморфизм ограничения $\mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}(D \setminus K)$ является изоморфизмом.

Определение

Связное некомпактное комплексное многообразие X допускает ***феномен Хартогса (Гартогса)****, если для любой области $D \subset X$ и любого компактного множества $K \subset D$, такого что $D \setminus K$ связно, гомоморфизм ограничения $\mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}(D \setminus K)$ является изоморфизмом.*

- В этой и похожих формулировках этот феномен изучался в многообразиях Штейна (Serre (1953), Banica и Stanasila (1971), ...), в $(n-1)$-полных нормальных многообразиях (Andreotti (60-70е), Henkin (1988),...), в расслоениях (Dwilewicz(2006)), в торических многообразиях (Marciniak(2009-12), F. и Shchuplev (2021)), в сферических многообразиях (F. 2022).

Мотивация

Пусть X — комплексное аналитическое многообразие, G — связная комплексная группа Ли, G действует на X голоморфно.

Определение

Многообразие X называется почти однородным G-многообразием, если X имеет открытую G-орбиту Ω.

Пусть X — неособое почти однородное **алгебраическое** G-многообразие с открытой орбитой $\Omega = G/H$.

1. (Шевалле) Существует единственная замкнутая связная нормальная аффинная подгруппа $G_{aff} \subset G$ такая, что фактор G/G_{aff} является абелевым многообразием;
2. (Brion, 2007) Многообразие Альбанезе многообразия X: $A(X) = A(\Omega) = G/G_{aff}H$;
3. (Brion, 2007) Отображение Альбанезе $\alpha \colon X \to A(X)$ является G-эквивариантным расслоением, со слоем F который является неособым $G_{aff}H$-многообразием и почти однородным относительно G_{aff} с открытой G_{aff}-орбитой $G_{aff}/G_{aff} \cap H \cong G_{aff}H/H$.
4. $X \cong G \times^{G_{aff}H} Y$.

Когомологический критерий феномена Хартогса

Замечание

Пусть X — комплексное многообразие. Тогда если $H^1_c(X, \mathcal{O}_X) = 0$, то X допускает феномен Хартогса ($\bar{\partial}$-техника).

Теорема

Пусть X — некомпактное (не обязательно неособое) комплексное аналитическое многообразие. Предположим, что

1. *X допускает открытое голоморфное вложение в некоторое комплексное аналитическое многообразие с нулевой иррегулярностью.*
2. *X связно на границе.*

Тогда $H^1_c(X, \mathcal{O}_X) = 0$ тогда и только тогда, когда X допускает феномен Хартогса.

Пример

1. *Если для некомпактного многообразия X существует компактное комплексное аналитическое многообразие X' и открытое голоморфное вложение $i\colon X \to X'$ такие, что $X' \setminus X$ — связное аналитическое подмножество и $H^1(X', \mathcal{O}_{X'}) = 0$, то X удовлетворяет свойствам 1, 2. Такое многообразие X называем **(1,0)-компактифицируемым.***
2. *Торическое многообразие X_Σ с веером Σ, причем $\mathbb{R}^n \setminus |\Sigma|$ связно, (1,0)-компактифицируемо.*

Спектральная последовательность Лере

Пусть X, Y — локально компактные топологические пространства и $\phi\colon X \to Y$ — непрерывное отображение.

$$\mathcal{SH}(X) \xrightarrow{\phi_!} \mathcal{SH}(Y) \xrightarrow{\Gamma_c} \mathcal{AB}\ ,$$

где

$$\phi_!\mathcal{F}(U) = \{s \in \mathcal{F}(\phi^{-1}(U)) \mid \phi|_{supp(s)}\colon supp(s) \to Y \text{ — собственное}\},$$

$$\Gamma_c(Y, \mathcal{F}) = \{s \in \Gamma(Y, \mathcal{F}) \mid supp(s) \text{ — компакт}\};$$

Свойства:

1. $\Gamma_c(Y, \phi_!\mathcal{F}) = \Gamma_c(X, \mathcal{F})$.
2. $\phi_!$ переводит инъективные пучки в $\Gamma_c(Y, -)$-ациклические пучки.

$R^i\phi_!\mathcal{F}$ — i-прямой образ с собственными носителями пучка $\mathcal{F}$.
Факт: $(R^i\phi_!\mathcal{F})_y = H^i_c(\phi^{-1}(y), \mathcal{F}|_{\phi^{-1}(y)})$.

Предложение

Существует спектральная последовательность $E_r^{p,q} \Longrightarrow H_c^{p+q}(X, \mathcal{F})$, *где* $E_2^{p,q} = H^p_c(Y, R^q\phi_!\mathcal{F})$.

Обращение в нуль групп когомологий с компактными носителями

$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$E_2^{0,q+1}$	$E_2^{1,q+1}$	$E_2^{2,q+1}$	$\cdots$	$E_2^{p,q+1}$
$E_2^{0,q}$	$E_2^{1,q}$	$E_2^{2,q}$	$\cdots$	$E_2^{p,q}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$E_2^{0,2}$	$E_2^{1,2}$	$E_2^{2,2}$	$\cdots$	$E_2^{p,2}$
$E_2^{0,1}$	$E_2^{1,1}$	$E_2^{2,1}$	$\cdots$	$E_2^{p,1}$
$E_2^{0,0}$	$E_2^{1,0}$	$E_2^{2,0}$	$\cdots$	$E_2^{p,0}$

где $E_2^{p,q} = H_c^p(Y, R^q\phi_!\mathcal{F})$.

Следствие

Пусть X, Y локально компактные пространства, $\phi\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, $\mathcal{F} \in \mathcal{SH}(X)$. Если $R^i\phi_!\mathcal{F} = 0$ для всех $i < q$, тогда $H_c^i(X, \mathcal{F}) = 0$ для всех $i < q$ и $H_c^q(X, \mathcal{F}) \cong \Gamma_c(Y, R^q\phi_!\mathcal{F})$.

Стебли пучков $R^q\phi_!\mathcal{O}_X$

Пусть X, Y, F — неособые комплексные аналитические многообразия, и $\phi\colon X \to Y$ — голоморфное локально тривиальное расслоение со связным слоем F. Пусть $\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_F$ — соответствующие пучки голоморфных функций.
Факт: $(R^i\phi_!\mathcal{O}_X)_y = H^i_c(\phi^{-1}(y), \mathcal{O}_X|_{\phi^{-1}(y)})$.

Предложение

Канонический гомоморфизм

$$\mathcal{O}_{Y,y} \otimes H^i_c(F, \mathcal{O}_F) \to H^i_c(\phi^{-1}(y), \mathcal{O}_X|_{\phi^{-1}(y)})$$

имеет плотный образ относительно канонической топологии.

Доказательство.

1. Можно считать, что $X = Y \times F$, $\phi = pr_1$; $\phi^{-1}(y) = \{y\} \times F$.
2. См. определение когомологий Чеха с компактными носителями.
3. Для любого открытого множества $U \times V \in X$ инъективное отображение $\mathcal{O}_Y(U) \otimes \mathcal{O}_F(V) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(U \times V), f \otimes g \to fg$ имеет плотный образ относительно стандартной топологии Фреше в $\mathcal{O}_X(U \times V)$.

$\square$

Следствия

Пусть X, Y, F — неособые комплексные аналитические многообразия, и $\phi\colon X \to Y$ — голоморфное локально тривиальное расслоение со связным **некомпактным** слоем F.

Следствие

$H^1_c(X, \mathcal{O}_X) \cong \Gamma_c(Y, R^1\phi_! \mathcal{O}_X)$.

Следствие

Предположим, что для всех $i < q$ пучки $R^i\phi_!\mathcal{O}_X$ отделимые. Если $H^i_c(F, \mathcal{O}_F) = 0$ для $i < q$, тогда $H^i_c(X, \mathcal{O}_X) = 0$ для $i < q$.

Следствие

Если слой F является многообразием Штейна, то $H^i_c(X, \mathcal{O}_X) = 0$ для всех $i < \dim F$.

В частности, для $F = \mathbb{C}^n$ and $n > 1$ получаем результат Р. Двилевича о тривиальности группы $H^1_c(X, \mathcal{O}_X)$.

Расслоения с (1,0)-компактифицируемым слоем

Предложение

Пусть $\phi\colon X \to Y$ *— голоморфное локально тривиальное расслоение со связным некомпактным слоем* F, $\dim F > 1$. *Предположим, что* F *является (1,0)-компактифицируемым. Тогда существует отделимая топология на* $H^1_c(\phi^{-1}(y), \mathcal{O}_X|_{\phi^{-1}(y)})$ *относительно которой канонический гомоморфизм* $\mathcal{O}_{Y,y} \otimes H^1_c(F, \mathcal{O}_F) \to H^1_c(\phi^{-1}(y), \mathcal{O}_X|_{\phi^{-1}(y)})$ *по прежнему имеет плотный образ.*

Доказательство.

1. Существует компактификация F': $H^1(F', \mathcal{O}_{F'}) = 0$ и $Z := F' \setminus F$ связно;
2. Можно считать, что $X = Y \times F$, $\phi = pr_1$, Y — штейново; $F_y = \{y\} \times F$, $X' = Y \times F'$;
3. Морфизм пучков $\mathcal{O}_{Y,y} \otimes \mathcal{O}_{F'_y} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X'}|_{F'_y}$.
4. Из топологической формулы Кюннета:
$$H^1(F'_y, \mathcal{O}_{X'}|_{F'_y}) = 0, H^0(F'_y, \mathcal{O}_{X'}|_{F'_y}) = \mathcal{O}_{Y,y}$$
5. Из формулы универсальных коэффициентов:
$$H^1(F'_y, \mathcal{O}_{Y,y} \otimes \mathcal{O}_{F'_y}) = 0, H^0(F'_y, \mathcal{O}_{Y,y} \otimes \mathcal{O}_{F'_y}) = \mathcal{O}_{Y,y}$$

Расслоения с (1,0)-компактифицируемым слоем

Доказательство.

6. Морфизм пучков $\mathcal{O}_{Y,y} \otimes \mathcal{O}_{F'_y} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X'}|_{F'_y}$ индуцирует коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{tikzcd}
0 \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,y} \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathcal{O}_{Y,y} \otimes H^0(Z_y, \mathcal{O}_{F'_y}|_{Z_y}) \arrow[r] \arrow[d, "h_1"] & \mathcal{O}_{Y,y} \otimes H^1_c(F_y, \mathcal{O}_{F_y}) \longrightarrow 0 \arrow[d, "h_2"] \\
0 \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,y} \arrow[r, "g_1"] & H^0(Z_y, \mathcal{O}_{X'}|_{Z_y}) \arrow[r] & H^1_c(F_y, \mathcal{O}_X|_{F_y}) \longrightarrow 0
\end{tikzcd}$$

7. Образ g_1 замкнут $\Rightarrow$ на $H^1_c(F_y, \mathcal{O}_X|_{F_y})$ есть отделимая топология (фактор-топология);
8. h_1 имеют плотный образ $\Rightarrow$ h_2 имеет плотный образ относительно фактор-топологии.

$\square$

Расслоения с (1,0)-компактифицируемым слоем

Следствие

Пусть $\phi\colon X \to Y$ *— голоморфное локально тривиальное расслоение со связным некомпактным слоем* F, $\dim F > 1$. *Предположим, что* F *является (1,0)-компактифицируемым. Если* $H^1_c(F, \mathcal{O}_F) = 0$, *тогда* $H^1_c(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

Теорема

Пусть $\phi\colon X \to Y$ *— голоморфное локально тривиальное расслоение с (1,0)-компактифицируемым слоем* F, $\dim F > 1$. *Если* F *допускает феномен Хартогса, то* X *также допускает феномен Хартогса.*

Замечание

В случае $\dim F = 1$ *имеем* $H^1_c(F, \mathcal{O}_F) \neq 0$. *Заметим, что* $H^1_c(X, \mathcal{O}_X)$ *не обязательно тривиальна. К примеру, если* $X = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)$, *то* $H^1_c(X, \mathcal{O}_X) = 0$. *Но если* $X = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}$, *то* $H^1_c(X, \mathcal{O}_X) \neq 0$.