Специальные Кэлеровы многообразия и интегрируемые системы

Павел Осипов

НИУ ВШЭ

2022

Определение

Специальным кэлеровым многообразием называется кэлерово многообразия (M, g, ω) плоской симплектической связностью без кручения ∇ удовлетворяющей условию

$$(\nabla_X I)Y = (\nabla_Y I)X \tag{1}$$

для любых $X, Y \in TM$.

Если $\nabla\omega = 0$, то условие (1) эквивалентно симметричности 3-тензора ∇g. Для плоской свзности без кручения ∇g симметричен по трём аргументам тогда и только тогда, когда g — гессианова метрика, то есть локально в ∇-плоских координатах g имеет вид

$$g = \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} dx^i dx^j.$$

Впервые специальные кэлеровы многообразия были введены в суперсимметрической теории поля (B. de Wit, A. Van Proeyen, *Potentials and symmetries of general gauged N=2 supergravity–Yang-Mills models*, Nucl. Phys., 1984).

Первое математическое изложение появилось значительно позже (Freed, D., *Special Kähler manifolds*, Commun. Math. Phys., 1999).

- Кэлерово лагранжево подмногообразие комплексного симплектического пространства является специальным кэлеровым многообразием. Любоей специальное кэлерово многообразие локально изоморфно кэлерову лагранжеву подмногообразию в в комплексном симплектическом пространстве.
- База алгебраической интегрируемой системы является специальным кэлеровым многообразием.
- Расслоением Хигса называется векторное расслоение V вместе с голоморфным сечением $\mathrm{End}(V) \otimes K$, где K каноническое расслоение. Пространство модулей расслоений Хигса над римановой поверхностью рода $g > 1$ является тотальным пространством алгебраической интегрируемой системы.

- Пространство модулей деформаций компактных лагранжевых многообразий гиперкэлерова многообразия является специальным кэлеровым многообразием.
- Пространство калиброванных комплексных структур на трёхмерном многообразии Калаби-Яу допускает структуру специального кэлерова многообразия комплексной сигнатуры (1,n).
- Односвязное специальное кэлерово многообразие изометрично гиперболической аффинной гиперсфере.

Пусть $V = T^*\mathbb{C}^n = \mathbb{C}^{2n}$ — комплексное симплектическое пространство с комплексными координатами $z^1, \dots z^n, w^1, \dots w^n$ и комплексной симплектической формой $\Omega = \sum dz^i \wedge dw^i$, τ — комплексное сопряжение по отношению к $V^\tau = T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$ и $h = \sqrt{-1}\Omega(\cdot, \tau\cdot)$ — эрмитова форма комплексной сигнатуры (n, n).

Определение

Голоморфная иммерсия $\phi : M \to V$ называется кэлеровой, если $\phi^* h$ невырождено и лагранжевой, если $\phi^*\Omega = 0$.

Пусть $\phi : M \to V$ — кэлерова лагранжева иммерсия и $g = \mathrm{re}\ \phi^* h$. Тогда Кэлерова форма $\omega = g(\cdot, I\cdot)$ имеет вид

$$\omega = \sum d\tilde{x}^i \wedge d\tilde{y}^i,$$

где $\tilde{x}^i = \mathrm{Re}\ \phi^* z^i$, $\tilde{y}^i = \mathrm{Re}\ \phi^* w^i$. Координаты $\tilde{x}^i, \tilde{y}^i$ задают плоскую симплектическую связность ∇ на M.

Теорема

Пусть M — комплексное многобразие и $\phi : M \to V$ кэлерова лагранжева иммерсия. Тогда $(M, I, g = \mathrm{Re}\, \pi^* h, \nabla)$ — специальное кэлерово многобразие. Для любого специального кэлерова многооразия существует лагранжева кэлерова индуцирующая данную специальную кэлерову струткуру.

Любая лагранжева иммерсия локально задаётся голоморфной функция F на $U \subset \mathbb{C}^n$ как график 1-формы $dF \subset T^*U \subset T^*\mathbb{C}^n$. Условие кэлеровости эквивалентно положительной определённости $\det \mathrm{Im}\, \partial^2 F$.

Таким образом, специальня кэлерова структура локально определяется одной голоморфной функцией.

Определение

Алгебраической интегрируемой системой называется голоморфное отображение $\pi : X \to M$, где

(i) X — комплексное симплектическое многообразие с голоморфно симплектической формой $\eta \in \Lambda^{2,0}(X)$.

(ii) слои X_m являются лагранжевыми торами.

(iii) существует гладко зависящее от точки семество когомологических классов $[\rho_m] \in H^{1,1}(X_M) \cup H^2(M, \mathbb{Z})$, таких что $[\rho_m]$ представляется положительно определённой инвариантной формой $\rho_m \in \Lambda^{(1,1)}$, то есть на X_m зафиксирована структура абелева торсора.

Голоморфная симплектическая форма η задаёт изоморфизм

$$i : T^*M \ \to \ V,$$

где V расслоение инвариантных касательных векторов вдоль слоёв. Пусть Λ — ядро экспоненциального отображения в $T^*M \simeq V$. Пространство T^*M обладает канонической комплексной симплектической структурой $\hat{\eta}$.

Утверждение

$\Lambda \subset T^*M$ — комплексное лагранжево подмногообразие.

Следствие

Комплексная симплектическая структура $\hat{\eta}$ опускается с T^*M на $A = T^*M/\Lambda$.

Локальные лагранжевы сечения расслоения $\pi : X \to M$ над любой открытой окрестностью $U \subset M$ индуцируют локальный симплектоморфизм $X|_U \simeq A|_U$. Локальные лагранжевы сечение отличаются на сдвиг вдоль слоя. Поэтому семейство поляризаций ρ_m на слоях X_M задаёт семейство поляризаций $\hat{\rho}_m$ на слоях A_m.

Мы связали с алгебраической интегрируемой системой X, алгебраическую интегрируемую систему A, слои которой являются абелевыми многообразиями.

Решётка Λ задаёт плоскую связность ∇ на T^*M, а значит и на TM. Форма $\hat{\rho}$ на T^*M при ограничении на Λ задаёт целую симплектическую форму. Поэтому двойственная форма ω на TM является ∇-плоской.

Теорема

(a) Пусть $(X \to M, \eta, [\rho_m])$ алгебраическая структура тогда (∇, ω) задаёт специальную кэлерову структуру на M. Кроме того, существует ∇-плоская решётка $\Lambda^* \subset TM$, чья двойственная решётка $\lambda \subset T^*M$ — лагранжево подмногообразие.

(b) Пусть (M, ∇, ω) — специальное кэлерово многообразие. Предположим существует ∇-плоская решётка $\Lambda^* \in TM$, чья двойственная решётка $\lambda \subset T^*M$ — лагранжево подмногообразие. Тогда $A = T^*M/\Lambda \to M$ допускает структуру алгебраической интегрируемой системы, чьи слои — абелевы многообразия.

Плоская связность ∇ определяет комплекс

$$0 \xrightarrow{d_\nabla} \Lambda^0 M \otimes TM \xrightarrow{d_\nabla} \Lambda^1 M \otimes TM \xrightarrow{d_\nabla} \Lambda^2 TM \xrightarrow{d_\nabla} \ldots$$

Утверждение

Пусть ∇ симплектическая плоская связность без кручения на кэлеровом многообразии (M, I, ω) специальнои кэлеровом многообразии. Тогда следующие условия эквивалентны:

(i) (M, I, ω, ∇) специальное кэлерово многообразие.

(ii) $d_\nabla I{=}0$.

(iii) $d_\nabla \pi^{(1,0)} = 0$.

(iv) локально выполняется $\pi^{(1,0} = \nabla\zeta$, для некоторого векторного поля ζ.

Пусть $\gamma_i = dx^i, \delta_i = dy^i$ — симплектический базис $\Lambda \subset T^*M$. Кроме того, γ_i, δ_i задают семейства циклов на $A = T^*M/\Lambda$. Существуют голоморфные функции z^i, w^i такие, что

$$dz^i = \int_{\gamma^i} \hat{\eta}, \quad dw^j = \int_{\delta^i} = \hat{\eta}$$

Легко проверить, что Re $dz^i = dx^i$, Re $dw^i = dy^i$. Мы можем считать, что Re $z^i = x^i$, Re $w^i = y^i$. Тогда, поле

$$\zeta = \sum \left(z^i \frac{\partial}{\partial x^i} - w^i \frac{\partial}{\partial y^i} \right)$$

удовлетворяет условию $\nabla\zeta = \pi^{(1,0)}$.

Теорема

Пусть (M, I, g, ∇) — специально кэлерово многообразие. Связность ∇ задаёт разложение $T\,(T^*M) = T^h\,(T^*M) \oplus T^v\,(T^*M) \simeq \pi^*TM \oplus \pi^*TM$, где $\pi : TM \to M$ — проекция, $T^h\,(T^*M)$ и $T^v\,(T^*M)$ — горизонтальное и вертикальные распределения определённые при помощи ∇. Использу это разложение определим

$$g^c = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g^{-1} \end{pmatrix}, \quad I_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I^* \end{pmatrix}, \quad I_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^{-1} \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, \quad I_3 = I_1 I_2.$$

Тогда $(T^*M, I_1, I_2, I_3, g^c)$ — гиперкэлерово многообразие.

Следствие

Пусть $X \to M$ алгебраическая интегрируемая система. Тогда X допускает гиперкэлерову структуру.