Критерий регуляризуемости бирациональных автоморфизмов

Вторая конференция математических центров

Александра Кузнецова

8 ноября 2022

Основной вопрос доклада

Пусть X это проективное алгебраическое многообразие и f это его бирациональный автоморфизм:

$$f\colon X \dashrightarrow X.$$

Вопрос

Какие f регуляризуются?
То есть при каких условиях существуют

- проективное многообразие Y;
- бирациональное отображение $\alpha\colon X \dashrightarrow Y$;

так что композиция является регулярным автоморфизмом Y:

$$\alpha \circ f \circ \alpha^{-1} \in \mathrm{Aut}(Y).$$

Частичные ответы на вопрос

Вопрос

При каких условиях регуляризуется бирациональный автоморфизм:

$$f\colon X \dashrightarrow X.$$

- Если $\dim(X) = 1$;
- Если $f \in G \subset \mathrm{Bir}(X)$ это конечная подгруппа, то ее действие регуляризуется;
- [Weil]: Если $f \in G \subset \mathrm{Bir}(X)$ линейная группа Ли, то ее действие регуляризуется;
- [Blanc, Cantat, Diller, Favre]: Если $\dim(X) = 2$, то можно определить, регуляризуется ли f изучая действие f^* на $N^1(X)$;
- В случае $\dim(X) \geqslant 3$ общих решений задачи нет.

Действие на численных классах

Пусть X это гладкое проективное многообразие.

Определение

Группа численных классов на X это следующая группа:

$$N^i(X) = \mathbb{Z}\{Z \subset X \mid Z \text{ неприводимо}, \operatorname{codim}(Z) = i\}/\sim_{num}.$$

Пусть $f\colon X \dashrightarrow X$ это бирациональный автоморфизм X такой что

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "p"] & \\ X \arrow[rr, dashed, "f"] & & X \end{tikzcd}$$

Определим отображение $f^*\colon N^i(X) \to N^i(X)$ следующим способом:

$$f^* = q_* \circ p^*\colon N^i(X) \to N^i(X).$$

Динамические степени

Пусть $f\colon X \dashrightarrow X$ бирациональный автоморфизм гладкого многообразия X. Пусть $H \in N^1(X)$ обильный класс на X.

Определение

Следующее число называется i**-ой динамической степенью** f:

$$\lambda_i(f) = \lim_{n\to\infty} \left((f^n)^*(H^i) \cdot H^{\dim(X)-i}\right)^{\frac{1}{n}}$$

Теорема (Dinh, Sibony'05)

(1) *Числа* $\lambda_i(f)$ *это бирациональные инварианты* f *и не зависят от* H.

(2) *Имеем* $\lambda_0(f) = \lambda_{\dim(X)}(f) = 1$ *и лог-выпуклость:*

$$\lambda_i(f)^2 \geqslant \lambda_{i-1}(f) \cdot \lambda_{i+1}(f).$$

Мы говорим, что f это автоморфизм с **положительной энтропией**, если $\lambda_i(f) > 1$ для некоторого $1 \leqslant i \leqslant \dim(X) - 1$.

Автоморфизмы поверхностей

Пусть $f\colon X \dashrightarrow X$ бирациональный автоморфизм поверхности.

Теорема (Cantat'99)

Если $\lambda_1(f) > 1$, то минимальная модель X это абелева, K3 или поверхность Энриквеса или же X это рациональная поверхность.

- Для каждого типа поверхности есть много примеров бирациональных автоморфизмов с положительной энтропией.
- [BC'16]: $\lambda_1(f)$ это либо число Салема, либо число Пизо, и:
  если $\lambda_1(f)$ это число Салема, то f регуляризуется;
  если $\lambda_1(f)$ неквадратичное число Пизо, то f не регуляризуется.
- [DF'09]: Критерий регуляризуемости f в зависимости от свойств действия f_0^* на $N^1(X_0)$, где $f_0\colon X_0 \dashrightarrow X_0$ это "хорошая" модель f.

Случай трехмерных многообразий

Определение

Бирациональный автоморфизм $f\colon X \dashrightarrow X$ **не примитивен** если существует B т.ч. $1 \leqslant \dim(B) \leqslant \dim(X) - 1$ и:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, dashed, "\pi"'] & X \arrow[d, dashed, "\pi"] \\ B \arrow[r, dashed] & B \end{tikzcd}$$

g — бирациональный автоморфизм B

<u>**Замечание**</u>**:** Все автоморфизмы поверхностей с положительной энтропией примитивны.

Вопрос

Существуют ли примеры примитивных регулярных автоморфизмов рациональных трехмерных многообразий с положительной энтропией?

[OT'15]: Единственный известный пример такого автоморфизма.

Псевдо-автоморфизмы

Наблюдение: Когда мы обобщаем конструкцию регулярного автоморфизма поверхности с положительной энтропией в размерность 3, обычно полученный автоморфизм не регулярен.

Определение

Бирациональный автоморфизм $f\colon X \dashrightarrow X$ называется **псевдо-автоморфизмом**, если ни f, ни f^{-1} не стягивают дивизоров.

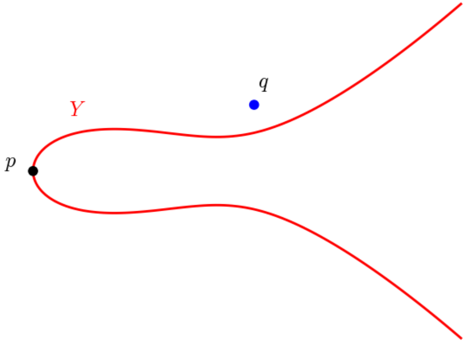
Замечание: В случае когда X это гладкая поверхность, то любой псевдо-автоморфизм регулярен.

Вопрос

Дан псевдо-автоморфизм $f\colon X \dashrightarrow X$ трехмерного многообразия X. Можно ли построить регуляризацию f?

Пример автоморфизма с положительной энтропией - 1

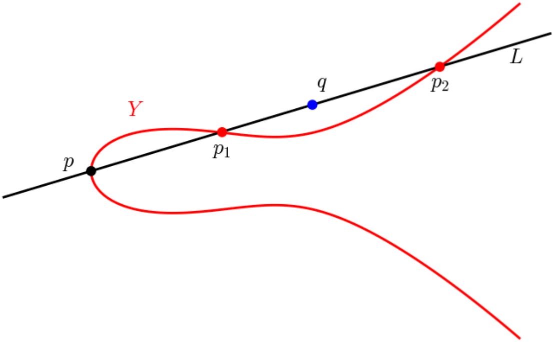
Пусть Y это кубическая гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ и пусть p точка на Y. Мы строим инволюцию $\sigma_p \colon \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$.



$$\sigma_p(q) = ?$$

Пример автоморфизма с положительной энтропией - 1

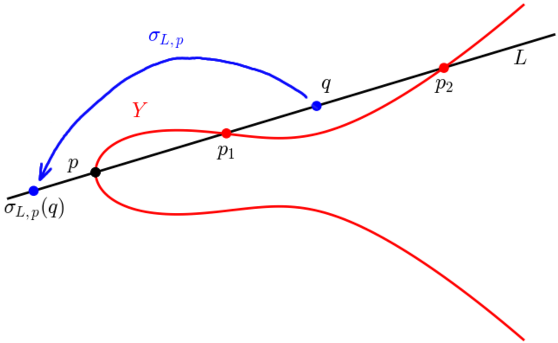
Пусть Y это кубическая гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ и пусть p точка на Y. Мы строим инволюцию $\sigma_p \colon \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$.



$$\sigma_p(q) = ?$$

Пример автоморфизма с положительной энтропией - 1

Пусть Y это кубическая гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ и пусть p точка на Y. Мы строим инволюцию $\sigma_p \colon \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$.



$$\sigma_p(q) = \sigma_{L,p}(q),$$

Здесь $\sigma_{L,p}$ это единственная инволюция L сохраняющая точки p_1 и p_2.

Пример автоморфизма с положительной энтропией - 2

Пусть Y это гладкая кубическая гиперповерхность в $\mathbb{P}^n$ и p точка на Y. Мы построили бирациональную инволюцию:

$$\sigma_p : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n.$$

Теорема (Blanc'13)

Пусть точки $p_1, \ldots, p_k \in Y$ достаточно общие и $k \geqslant 3$, тогда

$$F = \sigma_{p_k} \circ \cdots \circ \sigma_{p_1} : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$$

это бирациональный автоморфизм, такой что $\lambda_1(F) > 1$.
Если $n = 2$, то F регуляризуется.

Вопрос

Можно ли построить регуляризацию F при $n \geqslant 3$?

Удобная модель в размерности 3

Пусть S гладкая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$ и $p_1, \ldots, p_k$ точки на S.

$$F = \sigma_{p_k} \circ \cdots \circ \sigma_{p_1} \colon \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3.$$

Пусть $\Gamma_i \subset S$ это следующая кривая:

$$\Gamma_i = \{q \in S | \text{ прямая } \langle p_i, q \rangle \text{ касательная к } S \text{ в } q\}.$$

Лемма

Пусть $\delta \colon X \to \mathbb{P}^3$ это последовательное раздутие $p_1, \ldots, p_k, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ в $\mathbb{P}^3$. Тогда

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, "\delta"'] & X \arrow[d, "\delta"] \\ \mathbb{P}^3 \arrow[r, dashed, "F"] & \mathbb{P}^3 \end{tikzcd}$$

и f это псевдо-автоморфизм X.

Результат

Пусть S гладкая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$ и $p_1, \ldots, p_k$ точки на S.

$$\sigma_{p_k} \circ \cdots \circ \sigma_{p_1} \colon \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3.$$

Теорема (К.)

Пусть $S \subset \mathbb{P}^3$ очень общая комплексная кубическая поверхность и $p_1, p_2, p_3 \in S$ достаточно общие точки. Тогда

$$\sigma_{p_3} \circ \sigma_{p_2} \circ \sigma_{p_1} \colon \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$$

это нерегуляризующийся автоморфизм с положительной энтропией.

Критерий

Пусть $f : X \dashrightarrow X$ это псевдо-автоморфизм гладкого трехмерного X.

$$f^* \colon N^1(X) \to N^1(X)$$

[Truong'14]: Если $\lambda_1(f)^2 > \lambda_2(f)$, то $\exists! \ \theta \in N^1(X)$ так что класс θ псевдо-эффективен и

$$f^*(\theta) = \lambda_1(f)\theta.$$

Теорема (К.)

Пусть псевдо-автоморфизм f удовлетворяет следующим условиям:

(1) $\lambda_1(f)^2 > \lambda_2(f)$;

(2) *существует кривая C такая что $\theta \cdot [C] < 0$;*

(3) *существует бесконечно много $m > 0$ так что $C \not\subset \mathrm{Ind}(f^{-m})$.*

Тогда f не регуляризуется.

Критерий

Пусть $f\colon X \dashrightarrow X$ это псевдо-автоморфизм гладкого трехмерного X.

$$f^*\colon N^1(X) \to N^1(X)$$

[Truong'14]: Если $\lambda_1(f)^2 > \lambda_2(f)$, то $\exists!\ \theta \in N^1(X)$ так что класс θ псевдо-эффективен и

$$f^*(\theta) = \lambda_1(f)\theta.$$

Теорема (K.)

Пусть псевдо-автоморфизм f удовлетворяет следующим условиям:

(1) $\lambda_1(f)^2 > \lambda_2(f)$; лог-выпуклость $\Rightarrow \lambda_1(f)^2 \geqslant \lambda_2(f)$

(2) *существует кривая C такая что $\theta \cdot [C] < 0$;*

(3) *существует бесконечно много $m > 0$ так что $C \not\subset \mathrm{Ind}(f^{-m})$.*

Тогда f не регуляризуется.

Применение критерия к автоморфизму Бланка

Пусть S гладкая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$ и p_1, p_2, p_3 точки на S.
Пусть $\delta\colon X \to \mathbb{P}^3$ последовательное раздутие $p_1, p_2, p_3, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ в $\mathbb{P}^3$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, "\delta"'] & X \arrow[d, "\delta"] \\ \mathbb{P}^3 \arrow[r, dashed, "\sigma_{p_3}\circ\sigma_{p_2}\circ\sigma_{p_1}"] & \mathbb{P}^3 \end{tikzcd}$$

Теорема

Псевдо-автоморфизм $f\colon X \dashrightarrow X$ не регуляризуется, если

(1) $\lambda_1(f)^2 > \lambda_2(f)$;

(2) *существует кривая C такая что $\theta \cdot [C] < 0$;*

(3) *существует бесконечно много $m > 0$ так что $C \not\subset \mathrm{Ind}(f^{-m})$.*

План: Нужно проверить, что f удовлетворяет условиям $(1-3)$.

(1): $\lambda_1(f)^2 > \lambda_2(f)$

Пусть S гладкая кубическая поверхность в $\mathbb{P}^3$ и p_1, p_2, p_3 точки на S. Пусть $\delta\colon X \to \mathbb{P}^3$ последовательное раздутие $p_1, p_2, p_3, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ в $\mathbb{P}^3$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, "\delta"'] & X \arrow[d, "\delta"] \\ \mathbb{P}^3 \arrow[r, dashed, "\sigma_{p_3}\circ\sigma_{p_2}\circ\sigma_{p_1}"] & \mathbb{P}^3 \end{tikzcd}$$

[Blanc'13]: Если точки p_1, p_2, p_3 достаточно общие, то

$$\lambda_1(f) = \lambda_2(f) > 1.$$

Следовательно условие (1) выполнено.

Лемма (Blanc'13)

Можно посчитать класс $\theta \in N^1(X)$ такой что $f^*(\theta) = \lambda_1(f)\theta$.

(2): Существует кривая C такая что $\theta \cdot [C] < 0$

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, "\delta"'] & X \arrow[d, "\delta"] \\
L \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^3 \arrow[r, dashed, "F=\sigma_{p_3}\circ\sigma_{p_2}\circ\sigma_{p_1}"] & \mathbb{P}^3
\end{tikzcd}$$

- Пусть q точка в $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \subset S$.
- Пусть $L = \langle p_1, q \rangle \subset \mathbb{P}^3$ прямая, проходящая через p_1 и q.
- Пусть C это собственный прообраз L в X.

Лемма

Пусть $\theta \in N^1(X)$ это псевдо-эффективный класс т.ч. $f^*(\theta) = \lambda_1(f)\theta$. Тогда

$$\theta \cdot C < 0.$$

Следовательно, условие (2) выполнено.

(3): Существует бесконечно много $m > 0$: $C \not\subset \mathrm{Ind}(f^{-m})$

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, "\delta"'] & X \arrow[d, "\delta"] \\
L \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^3 \arrow[r, dashed, "F=\sigma_{p_3}\circ\sigma_{p_2}\circ\sigma_{p_1}"] & \mathbb{P}^3
\end{tikzcd}
$$

- Достаточно показать, что $L = \langle p_1, q \rangle \not\subset \mathrm{Ind}(F^{-m})$ для всех $m > 0$.
- Можно выбрать координаты так что:

$$
\begin{aligned}
q &= (1:0:0:0); & p_1 &= (0:1:0:0);\\
p_2 &= (0:0:1:0); & p_3 &= (0:0:0:1).
\end{aligned}
$$

  это позволяет записать формулы для $\sigma_{p_1}, \sigma_{p_2}$ и σ_{p_3} и уравнение L.
- Фиксируем $p = (X : Y : 0 : 0) \in L$ где X и Y это трансцендентные числа и доказываем, что $p \notin \mathrm{Ind}(F^{-m})$.

Следовательно, условие (3) выполнено и теорема доказана.

Вычисление

В координатах (z_0, z_1, z_2, z_3) на $\mathbb{P}^3$ поверхность S задана уравнением:

$$\sum_{|J|=3} a_J z^J = 0$$

Пусть $R = \mathbb{Z}[a_J]$ кольцо порожденное коэффициентами S.
Инволюции σ_{p_i} задаются формулами, которые зависят от a_J.
Тогда F задает бирациональное отображение над кольцом $R[X, Y]$:

$$F\colon \mathbb{P}^3_{R[X,Y]} \dashrightarrow \mathbb{P}^3_{R[X,Y]}.$$

Теорема

Пусть $p = (X : Y : 0 : 0)$ и пусть $m > 0$ целое число. Тогда

$$F^{-m}(p) = (M_0(X, Y) : M_1(X, Y) : M_2(X, Y) : M_3(X, Y))$$

и многочлены $M_i(X, Y)$ ненулевые.

Спасибо за внимание!