Конечные абелевы подгруппы в группах бирациональных автоморфизмов

Алексей Голота

МЛЗС НИУ ВШЭ, МЦМУ МИАН

8 ноября 2022

Постановка задачи

Пусть X – гладкое проективное многообразие над полем $\mathbb{C}$.

Постановка задачи

Пусть X – гладкое проективное многообразие над полем $\mathbb{C}$. Обозначим через $\mathrm{Bir}(X)$ группу бирациональных автоморфизмов многообразия X:

$$\mathrm{Bir}(X) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(X)).$$

Постановка задачи

Пусть X – гладкое проективное многообразие над полем $\mathbb{C}$. Обозначим через $\mathrm{Bir}(X)$ группу бирациональных автоморфизмов многообразия X:

$$\mathrm{Bir}(X) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(X)).$$

Вопрос

Какие бывают конечные подгруппы в группе $\mathrm{Bir}(X)$ для данного X (или для X из данного класса многообразий)?

Постановка задачи

Пусть X – гладкое проективное многообразие над полем $\mathbb{C}$. Обозначим через $\mathrm{Bir}(X)$ группу бирациональных автоморфизмов многообразия X:

$$\mathrm{Bir}(X) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(X)).$$

Вопрос

Какие бывают конечные подгруппы в группе $\mathrm{Bir}(X)$ для данного X (или для X из данного класса многообразий)?

Примеры

- Случай $\dim(X) = 1$: $\mathrm{Bir}(X) = \mathrm{Aut}(X)$;

Постановка задачи

Пусть X – гладкое проективное многообразие над полем $\mathbb{C}$. Обозначим через $\mathrm{Bir}(X)$ группу бирациональных автоморфизмов многообразия X:

$$\mathrm{Bir}(X) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(X)).$$

Вопрос

Какие бывают конечные подгруппы в группе $\mathrm{Bir}(X)$ для данного X (или для X из данного класса многообразий)?

Примеры

- Случай $\dim(X) = 1$: $\mathrm{Bir}(X) = \mathrm{Aut}(X)$;
- Бирегулярные автоморфизмы $G \subset \mathrm{Aut}(X)$;

Постановка задачи

Пусть X – гладкое проективное многообразие над полем $\mathbb{C}$. Обозначим через $\mathrm{Bir}(X)$ группу бирациональных автоморфизмов многообразия X:

$$\mathrm{Bir}(X) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(X)).$$

Вопрос

Какие бывают конечные подгруппы в группе $\mathrm{Bir}(X)$ для данного X (или для X из данного класса многообразий)?

Примеры

- Случай $\dim(X) = 1$: $\mathrm{Bir}(X) = \mathrm{Aut}(X)$;
- Бирегулярные автоморфизмы $G \subset \mathrm{Aut}(X)$;
- Группа Кремоны $\mathrm{Cr}_2 = \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$.

Постановка задачи

Пусть X – гладкое проективное многообразие над полем $\mathbb{C}$. Обозначим через $\mathrm{Bir}(X)$ группу бирациональных автоморфизмов многообразия X:

$$\mathrm{Bir}(X) = \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}(X)).$$

Вопрос

Какие бывают конечные подгруппы в группе $\mathrm{Bir}(X)$ для данного X (или для X из данного класса многообразий)?

Примеры

- Случай $\dim(X) = 1$: $\mathrm{Bir}(X) = \mathrm{Aut}(X)$;
- Бирегулярные автоморфизмы $G \subset \mathrm{Aut}(X)$;
- Группа Кремоны $\mathrm{Cr}_2 = \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$.

Свойства ограниченности

Определение

Пусть G – группа. Будем говорить, что G

Свойства ограниченности

Определение

Пусть G – группа. Будем говорить, что G

- имеет ограниченные конечные подгруппы,

Определение

Пусть G – группа. Будем говорить, что G

- имеет ограниченные конечные подгруппы, если существует константа $B = B(G)$, такая что для любой конечной подгруппы $H \subset G$ выполнено $|H| \leqslant B$;

Определение

Пусть G – группа. Будем говорить, что G

- имеет ограниченные конечные подгруппы, если существует константа $B = B(G)$, такая что для любой конечной подгруппы $H \subset G$ выполнено $|H| \leqslant B$;
- жорданова,

Свойства ограниченности

Определение

Пусть G – группа. Будем говорить, что G

- имеет ограниченные конечные подгруппы, если существует константа $B = B(G)$, такая что для любой конечной подгруппы $H \subset G$ выполнено $|H| \leqslant B$;
- жорданова, если существует константа $J = J(G)$, такая что для любой конечной подгруппы $H \subset G$ существует нормальная абелева подгруппа $A \subset H$ индекса не больше J.

Свойства ограниченности

Определение

Пусть G – группа. Будем говорить, что G

- имеет ограниченные конечные подгруппы, если существует константа $B = B(G)$, такая что для любой конечной подгруппы $H \subset G$ выполнено $|H| \leqslant B$;
- жорданова, если существует константа $J = J(G)$, такая что для любой конечной подгруппы $H \subset G$ существует нормальная абелева подгруппа $A \subset H$ индекса не больше J.

Примеры

- Группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ имеет ограниченные конечные подгруппы (Минковский);

Свойства ограниченности

Определение

Пусть G – группа. Будем говорить, что G

- имеет ограниченные конечные подгруппы, если существует константа $B = B(G)$, такая что для любой конечной подгруппы $H \subset G$ выполнено $|H| \leqslant B$;
- жорданова, если существует константа $J = J(G)$, такая что для любой конечной подгруппы $H \subset G$ существует нормальная абелева подгруппа $A \subset H$ индекса не больше J.

Примеры

- Группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ имеет ограниченные конечные подгруппы (Минковский);
- Группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ жорданова (Жордан);

Свойства ограниченности

Определение

Пусть G – группа. Будем говорить, что G

- имеет ограниченные конечные подгруппы, если существует константа $B = B(G)$, такая что для любой конечной подгруппы $H \subset G$ выполнено $|H| \leqslant B$;
- жорданова, если существует константа $J = J(G)$, такая что для любой конечной подгруппы $H \subset G$ существует нормальная абелева подгруппа $A \subset H$ индекса не больше J.

Примеры

- Группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ имеет ограниченные конечные подгруппы (Минковский);
- Группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ жорданова (Жордан);
- Группа $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^1 \times E)$ не жорданова (Зархин).

Определение

Пусть G – группа. Будем говорить, что G

- имеет ограниченные конечные подгруппы, если существует константа $B = B(G)$, такая что для любой конечной подгруппы $H \subset G$ выполнено $|H| \leqslant B$;
- жорданова, если существует константа $J = J(G)$, такая что для любой конечной подгруппы $H \subset G$ существует нормальная абелева подгруппа $A \subset H$ индекса не больше J.

Примеры

- Группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ имеет ограниченные конечные подгруппы (Минковский);
- Группа $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ жорданова (Жордан);
- Группа $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^1 \times E)$ не жорданова (Зархин).

Определение

Проективное многообразие называется

Напоминание из бирациональной геометрии

Определение

Проективное многообразие называется

- Унилинейчатым, если через точку общего положения в X проходит рациональная кривая;

Определение

Проективное многообразие называется

- Унилинейчатым, если через точку общего положения в X проходит рациональная кривая;
- Рационально связным, если через пару точек общего положения в X проходит рациональная кривая.

Напоминание из бирациональной геометрии

Определение

Проективное многообразие называется

- Унилинейчатым, если через точку общего положения в X проходит рациональная кривая;
- Рационально связным, если через пару точек общего положения в X проходит рациональная кривая.

Теорема (Прохоров, Шрамов)

Группа $\mathrm{Bir}(X)$ жорданова в случаях, когда X не унилинейчато, либо рационально связно.

Напоминание из бирациональной геометрии

Определение

Проективное многообразие называется

- Унилинейчатым, если через точку общего положения в X проходит рациональная кривая;
- Рационально связным, если через пару точек общего положения в X проходит рациональная кривая.

Теорема (Прохоров, Шрамов)

Группа $\mathrm{Bir}(X)$ жорданова в случаях, когда X не унилинейчато, либо рационально связно.

Теорема (Jinsong Xu)

Если X рационально связно, а G – конечная p-подгруппа в $\mathrm{Bir}(X)$, то при $p > \dim(X) + 1$ группа G абелева и порождена не более чем $n = \dim(X)$ элементами.

Как можно описать "большие"конечные абелевы подгруппы в группах $\mathrm{Bir}(X)$?

Как можно описать "большие"конечные абелевы подгруппы в группах $\mathrm{Bir}(X)$?

Определение

Пусть $\{G_i\}$ – последовательность конечных абелевых групп.

Последовательности конечных абелевых групп

Как можно описать "большие"конечные абелевы подгруппы в группах $\mathrm{Bir}(X)$?

Определение

Пусть $\{G_i\}$ – последовательность конечных абелевых групп. Назовём рангом последовательности $\{G_i\}$ максимальное r, такое что $(\mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z})^r \subset G_i$ для бесконечного числа индексов i и для произвольно больших N_i.

Как можно описать "большие"конечные абелевы подгруппы в группах $\mathrm{Bir}(X)$?

Определение

Пусть $\{G_i\}$ – последовательность конечных абелевых групп. Назовём рангом последовательности $\{G_i\}$ максимальное r, такое что $(\mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z})^r \subset G_i$ для бесконечного числа индексов i и для произвольно больших N_i.

Замечание (аддитивность)

Если для каждого i существует точная последовательность $1 \to G_i' \to G_i \to G_i'' \to 1$, то ранг $\{G_i\}$ равен сумме рангов последовательностей $\{G_i'\}$ и $\{G_i''\}$.

Теорема (I. Mundet i Riera)

Пусть H – вещественная группа Ли. Следующие условия эквивалентны:

Последовательности конечных абелевых групп

Теорема (I. Mundet i Riera)

Пусть H – вещественная группа Ли. Следующие условия эквивалентны:

- H содержит конечные абелевы подгруппы вида $(\mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z})^r$ для произвольно больших N_i и фиксированного r;

Теорема (I. Mundet i Riera)

Пусть H – вещественная группа Ли. Следующие условия эквивалентны:

- H содержит конечные абелевы подгруппы вида $(\mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z})^r$ для произвольно больших N_i и фиксированного r;
- H содержит компактный вещественный тор T^r.

Последовательности конечных абелевых групп

Теорема (I. Mundet i Riera)

Пусть H – вещественная группа Ли. Следующие условия эквивалентны:

- H содержит конечные абелевы подгруппы вида $(\mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z})^r$ для произвольно больших N_i и фиксированного r;
- H содержит компактный вещественный тор T^r.

Следствие

Это верно для групп $\mathrm{Aut}(X)$, где X компактное кэлерово (например, проективное).

Последовательности конечных абелевых групп

Теорема (I. Mundet i Riera)

Пусть H – вещественная группа Ли. Следующие условия эквивалентны:

- H содержит конечные абелевы подгруппы вида $(\mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z})^r$ для произвольно больших N_i и фиксированного r;
- H содержит компактный вещественный тор T^r.

Следствие

Это верно для групп $\mathrm{Aut}(X)$, где X компактное кэлерово (например, проективное).

Вопрос

Можно ли обобщить этот результат на группы бирациональных автоморфизмов?

Основной результат

Теорема (А. Г., 2022)

Пусть X – проективное многообразие размерности n над $\mathbb{C}$.

Основной результат

Теорема (А. Г., 2022)

Пусть X – проективное многообразие размерности n над $\mathbb{C}$. Предположим, что группа $\mathrm{Bir}(X)$ содержит конечные подгруппы G_i, изоморфные $(\mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z})^r$ для произвольно больших N_i и фиксированного r.

Основной результат

Теорема (А. Г., 2022)

Пусть X – проективное многообразие размерности n над $\mathbb{C}$. Предположим, что группа $\mathrm{Bir}(X)$ содержит конечные подгруппы G_i, изоморфные $(\mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z})^r$ для произвольно больших N_i и фиксированного r. Тогда выполнено неравенство

$$r \leqslant 2\dim(X) = 2n.$$

Основной результат

Теорема (А. Г., 2022)

Пусть X – проективное многообразие размерности n над $\mathbb{C}$. Предположим, что группа $\mathrm{Bir}(X)$ содержит конечные подгруппы G_i, изоморфные $(\mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z})^r$ для произвольно больших N_i и фиксированного r. Тогда выполнено неравенство

$$r \leqslant 2\dim(X) = 2n.$$

Более того, если $r = 2n$, то многообразие X бирационально абелеву многообразию.

Теорема (Kollar–Miyaoka–Mori; Campana)

Пусть X – нормальное проективное многообразие.

Максимальное рационально связное расслоение

Теорема (Kollar–Miyaoka–Mori; Campana)

Пусть X – нормальное проективное многообразие. Существует доминантное рациональное отображение $\mu\colon X \dashrightarrow Z$ со связными слоями, такое что

Теорема (Kollar–Miyaoka–Mori; Campana)

Пусть X – нормальное проективное многообразие. Существует доминантное рациональное отображение $\mu\colon X \dashrightarrow Z$ со связными слоями, такое что

- слои μ рационально связны;

Максимальное рационально связное расслоение

Теорема (Kollar–Miyaoka–Mori; Campana)

Пусть X – нормальное проективное многообразие. Существует доминантное рациональное отображение $\mu\colon X \dashrightarrow Z$ со связными слоями, такое что

- слои μ рационально связны;
- база B нормальна.

Теорема (Kollar–Miyaoka–Mori; Campana)

Пусть X – нормальное проективное многообразие. Существует доминантное рациональное отображение $\mu\colon X \dashrightarrow Z$ со связными слоями, такое что

- слои μ рационально связны;
- база B нормальна.

Оно называется MPC-расслоением.

Максимальное рационально связное расслоение

Теорема (Kollar–Miyaoka–Mori; Campana)

Пусть X – нормальное проективное многообразие. Существует доминантное рациональное отображение $\mu\colon X \dashrightarrow Z$ со связными слоями, такое что

- слои μ рационально связны;
- база B нормальна.

Оно называется MPC-расслоением.

Теорема (Graber–Harris–Starr)

База MPC-расслоения не унилинейчата.

Теорема (Kollar–Miyaoka–Mori; Campana)

Пусть X – нормальное проективное многообразие. Существует доминантное рациональное отображение $\mu\colon X \dashrightarrow Z$ со связными слоями, такое что

- слои μ рационально связны;
- база B нормальна.

Оно называется MRC-расслоением.

Теорема (Graber–Harris–Starr)

База MRC-расслоения не унилинейчата.

Замечание

Группа $\mathrm{Bir}(X)$ естественно действует на MRC-расслоении.

Предложение 1

Пусть X – неунилинейчатое многообразие размерности n.

Доказательство основной теоремы

Предложение 1

Пусть X – неунилинейчатое многообразие размерности n. Предположим, что группа $\mathrm{Bir}(X)$ содержит конечные абелевы подгруппы $G_i \simeq (\mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z})^r$ для произвольно больших N_i и фиксированного r.

Доказательство основной теоремы

Предложение 1

Пусть X – неунилинейчатое многообразие размерности n. Предположим, что группа $\mathrm{Bir}(X)$ содержит конечные абелевы подгруппы $G_i \simeq (\mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z})^r$ для произвольно больших N_i и фиксированного r. Тогда выполнено неравенство $r \leqslant 2n$.

Доказательство основной теоремы

Предложение 1

Пусть X – неунилинейчатое многообразие размерности n. Предположим, что группа $\mathrm{Bir}(X)$ содержит конечные абелевы подгруппы $G_i \simeq (\mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z})^r$ для произвольно больших N_i и фиксированного r. Тогда выполнено неравенство $r \leqslant 2n$. Более того, группа $\mathrm{Bir}(X)$ содержит абелево многообразие размерности $\lceil r/2 \rceil$.

Доказательство основной теоремы

Предложение 1

Пусть X – неунилинейчатое многообразие размерности n. Предположим, что группа $\mathrm{Bir}(X)$ содержит конечные абелевы подгруппы $G_i \simeq (\mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z})^r$ для произвольно больших N_i и фиксированного r. Тогда выполнено неравенство $r \leqslant 2n$. Более того, группа $\mathrm{Bir}(X)$ содержит абелево многообразие размерности $\lceil r/2 \rceil$.

Идея доказательства

Пусть $\varphi\colon X \dashrightarrow X'$ – квази-минимальная модель.

Доказательство основной теоремы

Предложение 1

Пусть X – неунилинейчатое многообразие размерности n. Предположим, что группа $\mathrm{Bir}(X)$ содержит конечные абелевы подгруппы $G_i \simeq (\mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z})^r$ для произвольно больших N_i и фиксированного r. Тогда выполнено неравенство $r \leqslant 2n$. Более того, группа $\mathrm{Bir}(X)$ содержит абелево многообразие размерности $\lceil r/2 \rceil$.

Идея доказательства

Пусть $\varphi\colon X \dashrightarrow X'$ – квази-минимальная модель. Рассматривая действие $\mathrm{Bir}(X')$ на $H^{1,1}(X,\mathbb{Q})$, сведём задачу к случаю, когда G_i лежат в $\mathrm{Aut}^0(X')$.

Доказательство основной теоремы

Предложение 2

Пусть X – рационально связное многообразие размерности n.

Предложение 2

Пусть X – рационально связное многообразие размерности n. Предположим, что группа $\mathrm{Bir}(X)$ содержит конечные абелевы подгруппы G_i, изоморфные $(\mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z})^r$ для произвольно больших N_i и фиксированного r.

Предложение 2

Пусть X – рационально связное многообразие размерности n. Предположим, что группа $\mathrm{Bir}(X)$ содержит конечные абелевы подгруппы G_i, изоморфные $(\mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z})^r$ для произвольно больших N_i и фиксированного r. Тогда выполнено неравенство $r \leqslant n$.

Доказательство основной теоремы

Предложение 2

Пусть X – рационально связное многообразие размерности n. Предположим, что группа $\mathrm{Bir}(X)$ содержит конечные абелевы подгруппы G_i, изоморфные $(\mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z})^r$ для произвольно больших N_i и фиксированного r. Тогда выполнено неравенство $r \leqslant n$.

Завершение доказательства

Рассмотрим MPC-расслоение $\mu\colon X \dashrightarrow Z$.

Доказательство основной теоремы

Предложение 2

Пусть X – рационально связное многообразие размерности n. Предположим, что группа $\mathrm{Bir}(X)$ содержит конечные абелевы подгруппы G_i, изоморфные $(\mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z})^r$ для произвольно больших N_i и фиксированного r. Тогда выполнено неравенство $r \leqslant n$.

Завершение доказательства

Рассмотрим MPC-расслоение $\mu\colon X \dashrightarrow Z$. Тогда получим точные последовательности $1 \to G_i' \to G_i \to G_i'' \to 1$, где G_i' действуют послойно, а G_i'' действуют на базе.

Предложение 2

Пусть X – рационально связное многообразие размерности n. Предположим, что группа $\mathrm{Bir}(X)$ содержит конечные абелевы подгруппы G_i, изоморфные $(\mathbb{Z}/N_i\mathbb{Z})^r$ для произвольно больших N_i и фиксированного r. Тогда выполнено неравенство $r \leqslant n$.

Завершение доказательства

Рассмотрим MPC-расслоение $\mu\colon X \dashrightarrow Z$. Тогда получим точные последовательности $1 \to G_i' \to G_i \to G_i'' \to 1$, где G_i' действуют послойно, а G_i'' действуют на базе. Из предложений 1 и 2 и аддитивности ранга следует

$$r \leqslant \dim(X_\eta) + 2\dim(B) \leqslant 2\dim(X).$$

Некоторые открытые вопросы

Вопрос (Jinsong Xu)

В предположениях основной теоремы верно ли, что на X существует действие коммутативной алгебраической группы или полуабелева многообразия?

Вопрос (Jinsong Xu)

В предположениях основной теоремы верно ли, что на X существует действие коммутативной алгебраической группы или полуабелева многообразия?

Вопрос

Пусть X – рационально связное многообразие размерности 3 с действием "большой"абелевой подгруппы вида $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$. Верно ли, что X рационально?

Спасибо за внимание!