

Топология алгебраически разделимых систем

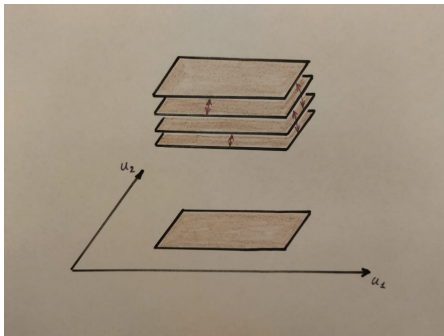
Станислав Николаенко

Московский физико-технический институт

Вторая конференция Математических центров России
7 ноября 2022 г.

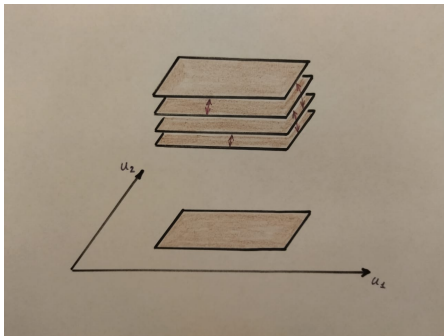
Задача (для школьников)

Дано 2^n одинаковых прямоугольников. Для каждой из четырёх сторон прямоугольники разбиваются на пары и в каждой паре склеиваются вдоль этой стороны. Получается 2-мерный комплекс.



Задача (для школьников)

Дано 2^n одинаковых прямоугольников. Для каждой из четырёх сторон прямоугольники разбиваются на пары и в каждой паре склеиваются вдоль этой стороны. Получается 2-мерный комплекс.



Задача: описать все склейки, при которых этот комплекс гомеоморфен одному или нескольким двумерным торам.

Интегрируемая (по Лиувиллю) гамильтонова система с двумя степенями свободы:

(M^4, ω, H, F) , где

- (M^4, ω) – симплектическое многообразие;
- H – гамильтониан;
- F – дополнительный первый интеграл системы (т.е. $F = \text{const}$ на интегральных траекториях гамильтонова векторного поля $\omega^{-1}dH$).

Слоение Лиувилля

Интегрируемая система $\leadsto$ **слоение Лиувилля**.

Слой слоения Лиувилля — связная компонента поверхности уровня $\{H = h, F = f\}$.

Задача: описать топологию слоения Лиувилля
(хотя бы на инвариантных 3-многообразиях).

Слоение Лиувилля

Интегрируемая система $\leadsto$ **слоение Лиувилля**.

Слой слоения Лиувилля — связная компонента поверхности уровня $\{H = h, F = f\}$.

Задача: описать топологию слоения Лиувилля
(хотя бы на инвариантных 3-многообразиях).

А. Т. Фоменко и его школа:

теория топологической классификации интегрируемых систем с двумя степенями свободы.



А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко

Интегрируемые гамильтоновы системы.

Геометрия, топология, классификация.

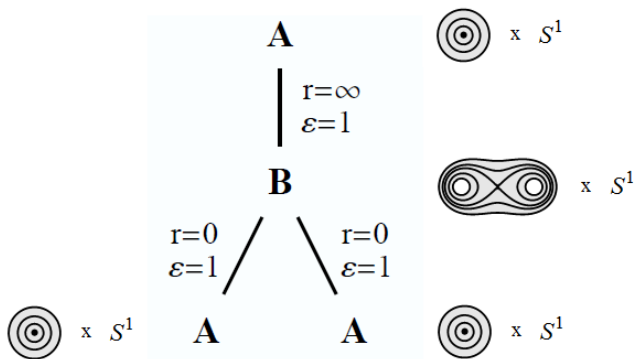
Издательский дом “Удмуртский университет”, 1999.

Меченая молекула

Меченая молекула (А. Т. Фоменко, Х. Цишанг, 1990):

описывает топологию слоения Лиувилля на регулярном компактном невырожденном изоэнергетическом 3-многообразии $\{H = h\}$.

Пример.



В общем случае вычисление топологических инвариантов интегрируемых систем (в частности, меченой молекулы) может оказаться весьма нетривиальной задачей. Однако оно может быть выполнено алгоритмически для **алгебраически разделимых систем**.

Алгебраически разделимые системы

Определение

Интегрируемая система называется **алгебраически разделимой**, если существуют такие функции $u_1, u_2: M^4 \rightarrow \mathbb{R}$, что на каждом слое

- ① гамильтоновы уравнения приобретают вид

$$\dot{u}_i = \sqrt{P_{h,f}(u_i)}, \quad i = 1, 2, \text{ или}$$

$$\dot{u}_i = \frac{\sqrt{P_{h,f}(u_i)}}{u_1 - u_2}, \quad i = 1, 2,$$

($P_{h,f}$ – многочлен, зависящий от значений h, f функций H, F);

- ② фазовые переменные x_k выражаются через u_1, u_2 в виде

$$x_k = a_{k1}A_{k1} + \dots + a_{kn_k}A_{kn_k} \text{ где}$$

$$a_{kj} = a_{kj}(u_1, u_2) - \text{однозначные функции,}$$

$$A_{kj} = \prod \sqrt{u_i - \alpha_m}, \quad \alpha_m = \alpha_m(h, f) \in \mathbb{C}.$$

Случай Горячева–Чаплыгина–Сретенского в динамике твёрдого тела (1963)

Фазовое пространство:

$$\{(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^6 \mid r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1, 4(s_1 r_1 + s_2 r_2) + (s_3 + \lambda)r_3 = 0\}$$

Гамильтониан:

$$H = 2(s_1^2 + s_2^2) + \frac{1}{2}s_3^2 - r_1$$

Дополнительный первый интеграл:

$$F = 2(s_3 - \lambda)(s_1^2 + s_2^2) + 2s_1 r_3$$

Пример алгебраически разделимой системы

Разделение переменных:

$$\dot{u}_1 = \frac{\sqrt{P(u_1)}}{2(u_2 - u_1)}, \quad \dot{u}_2 = \frac{\sqrt{P(u_2)}}{2(u_2 - u_1)}, \quad P(u) = -W(u)W^*(u),$$

$$W(u) = u(u - \lambda)^2 - 2(h + 1)u - 2f, \\ W^*(u) = u(u - \lambda)^2 - 2(h - 1)u - 2f;$$

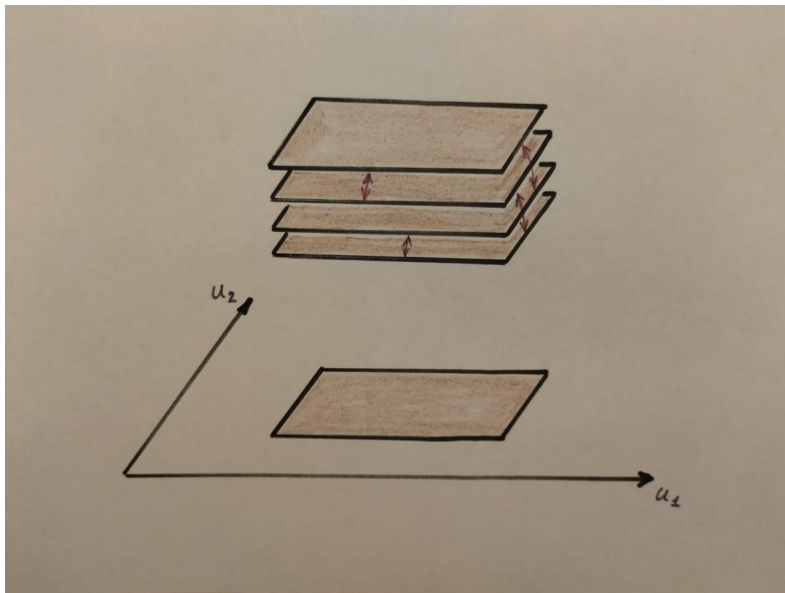
$$s_1 = \frac{1}{8}(R_1 R_2^* + R_1^* R_2), \quad s_2 = \frac{1}{8}(R_1^* R_2^* - R_1 R_2), \quad s_3 = u_1 + u_2 - \lambda, \\ r_1 = 1 - \frac{R_1^2 + R_2^{*2}}{2(u_1 - u_2)}, \quad r_2 = -\frac{R_1 R_1^* + R_2 R_2^*}{2(u_1 - u_2)}, \quad r_3 = \frac{R_1 R_2^* - R_1^* R_2}{2(u_1 - u_2)},$$

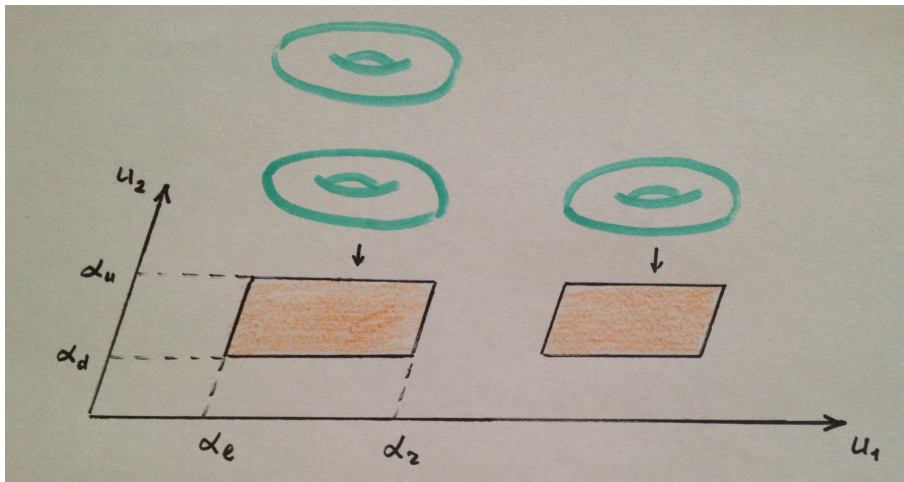
$$R_1 = \sqrt{-W(u_1)},$$

$$R_1^* = \sqrt{W^*(u_1)}$$

$$R_2 = \sqrt{W(u_2)},$$

$$R_2^* = \sqrt{-W^*(u_2)}.$$







Орёл О. Е.

Функция вращения для интегрируемых задач, сводящихся к уравнениям Абеля. Траекторная классификация систем Горячева—Чаплыгина.

Математический сборник. 1995, **186**:2, 105-128.

М. П. Харламов:

систематический подход к изучению топологии алгебраически разделимых систем.

Для этого использована техника булевых функций.



Харламов М. П.

Топологический анализ и булевы функции:

I. Методы и приложения к классическим системам.

II. Приложения к новым алгебраическим решениям.

Нелинейная динамика. I: 2010, **6**:4, 769-805. II: 2011, **7**:1, 25-51.

Откуда же булевы функции?

$$x = a_1 A_1 + \dots + a_n A_n,$$

$$A_j = \prod \sqrt{u_i - \alpha_m}.$$

Откуда же булевы функции?

$$x = a_1 A_1 + \dots + a_n A_n,$$
$$A_j = \prod \sqrt{u_i - \alpha_m}.$$

$$\text{bsgn}(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \geq 0, \\ 1, & \theta < 0. \end{cases}$$

- $\text{bsgn}(\theta_1 \theta_2) = \text{bsgn}(\theta_1) \oplus \text{bsgn}(\theta_2)$ ($\oplus$ – сложение mod 2).

Откуда же булевы функции?

$$x = a_1 A_1 + \dots + a_n A_n,$$
$$A_j = \prod \sqrt{u_i - \alpha_m}.$$

$$\text{bsgn}(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \geq 0, \\ 1, & \theta < 0. \end{cases}$$

- $\text{bsgn}(\theta_1 \theta_2) = \text{bsgn}(\theta_1) \oplus \text{bsgn}(\theta_2)$ ($\oplus$ – сложение mod 2).

$$z_m^i = \text{bsgn} \sqrt{\pm(u_i - \alpha_m)} \text{ (или } \text{bsgn} \sqrt{\pm(u_i - \alpha_m)(u_i - \overline{\alpha_m})}).$$

$$A_j = \prod \sqrt{u_i - \alpha_m} \mapsto \sum z_m^i.$$

Получаем $\mathbb{Z}_2$ -линейное отображение $\mathbb{Z}_2^p \rightarrow \mathbb{Z}_2^q$, где

p – число всех радикалов $\sqrt{u_i - \alpha_m}$,

q – число всех мономов A_j .

Откуда же булевы функции?

$$x = a_1 A_1 + \dots + a_n A_n,$$
$$A_j = \prod \sqrt{u_i - \alpha_m}.$$

$$\text{bsgn}(\theta) = \begin{cases} 0, & \theta \geq 0, \\ 1, & \theta < 0. \end{cases}$$

- $\text{bsgn}(\theta_1 \theta_2) = \text{bsgn}(\theta_1) \oplus \text{bsgn}(\theta_2)$ ($\oplus$ – сложение mod 2).

$$z_m^i = \text{bsgn} \sqrt{\pm(u_i - \alpha_m)} \quad (\text{или } \text{bsgn} \sqrt{\pm(u_i - \alpha_m)(u_i - \overline{\alpha_m})}).$$

$$A_j = \prod \sqrt{u_i - \alpha_m} \quad \mapsto \quad \sum z_m^i.$$

Получаем $\mathbb{Z}_2$ -линейное отображение $\mathbb{Z}_2^p \rightarrow \mathbb{Z}_2^q$, где

p – число всех радикалов $\sqrt{u_i - \alpha_m}$,

q – число всех мономов A_j .

Матрица A этого линейного отображения знает всё про топологию слоения Лиувилля!

Основной результат

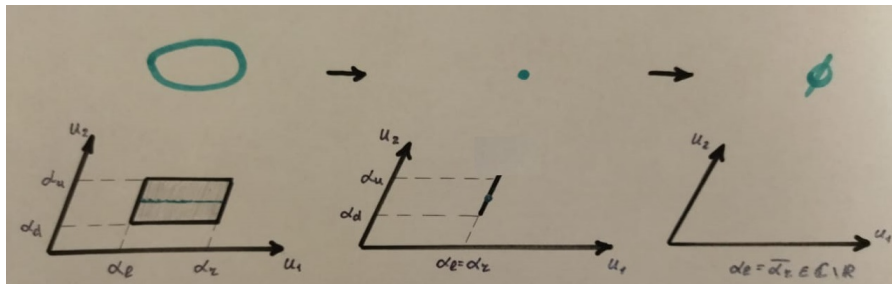
Для алгебраически разрешимых систем
построен алгоритм нахождения меченой молекулы
(и, следовательно, описания топологии слоения Лиувилля).

Бифуркации слоения Лиувилля происходят при $\alpha_m = \alpha_s$ для некоторых m, s .

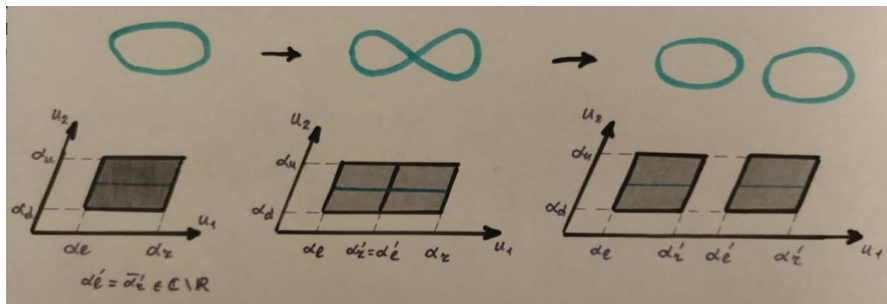
Определение

Назовём 3-мерную бифуркацию **простой**, если она отвечает совпадению единственной пары чисел α_m, α_s .

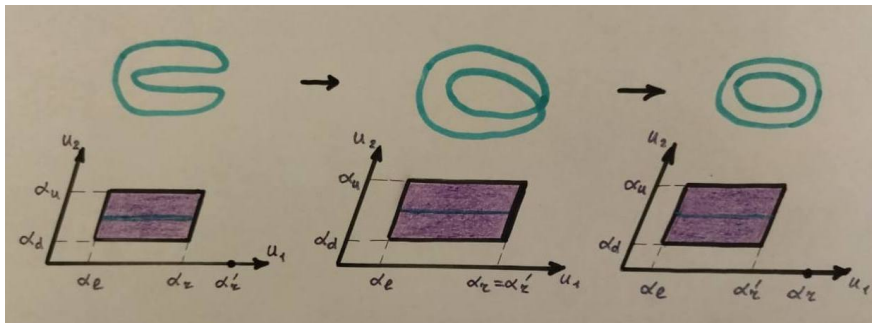
1. Вырождение



2. Расщепление



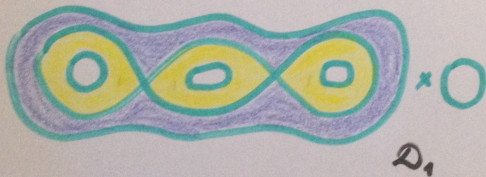
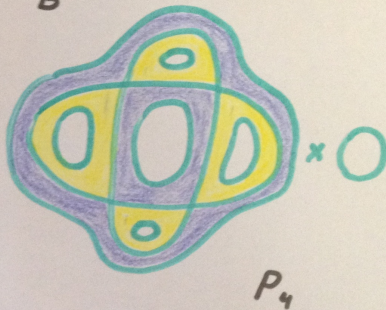
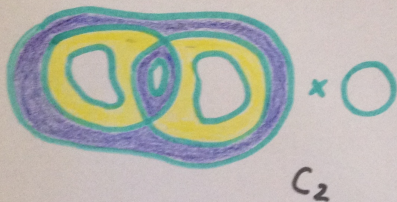
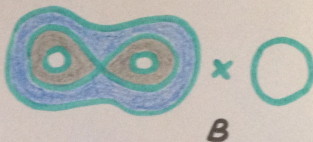
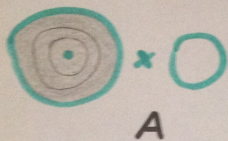
3. Замещение



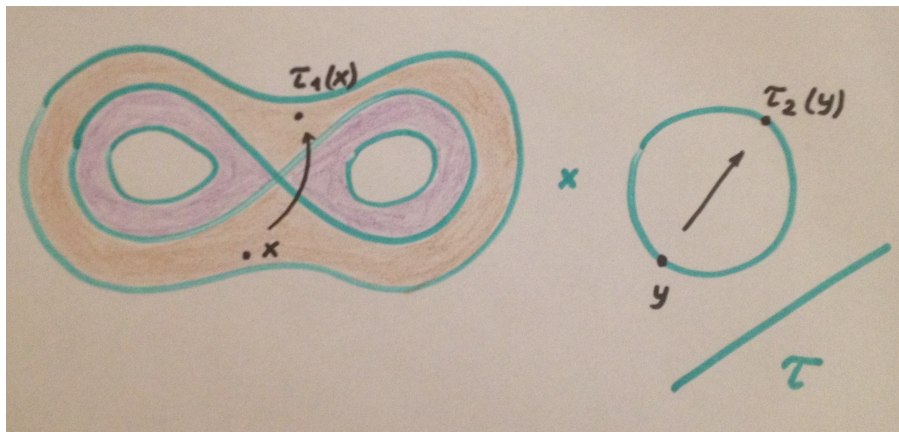
Теорема

Пусть разным наборам знаков мономов A_j отвечают разные точки в фазовом пространстве. Тогда любая простая компактная невырожденная топологически устойчивая бифуркация имеет тип одного из следующих атомов:

- *вырождение: A ;*
- *расщепление: B, C_2, P_4, D_1 ;*
- *замещение: B, C_2, A^*, A^{**} .*

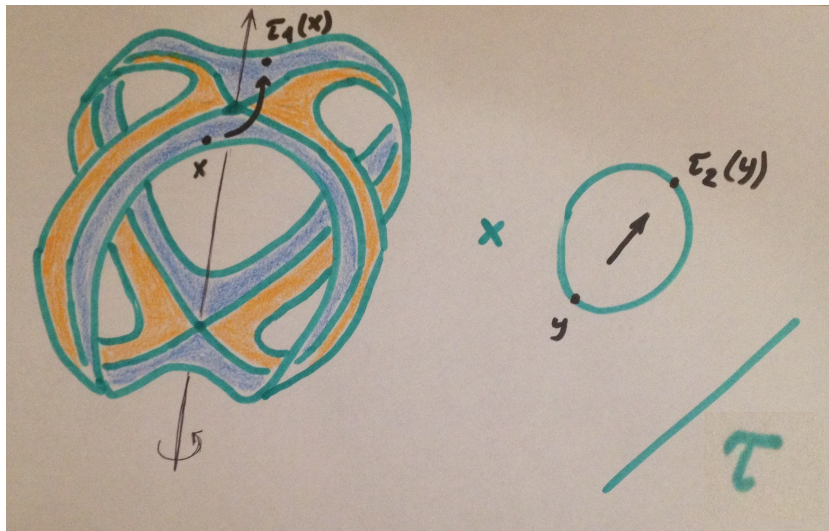


$$A^* = (B \times S^1)/\mathbb{Z}_2$$



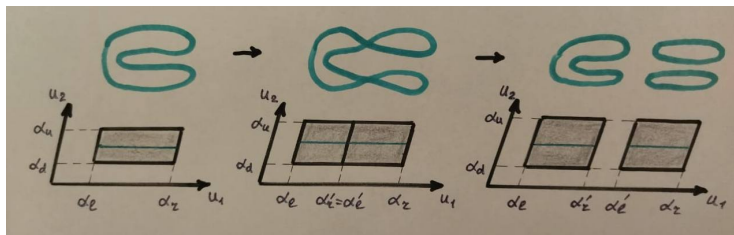
$$\tau(x, y) = (\tau_1(x), \tau_2(y))$$

$$A^{**} = (C_2 \times S^1)/\mathbb{Z}_2$$

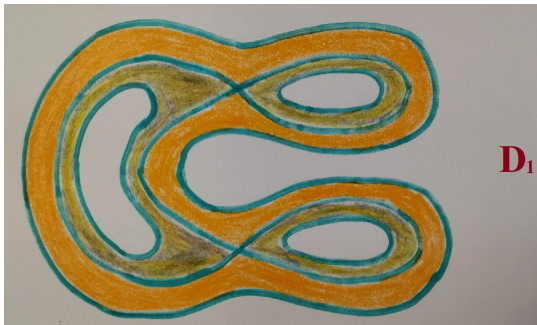
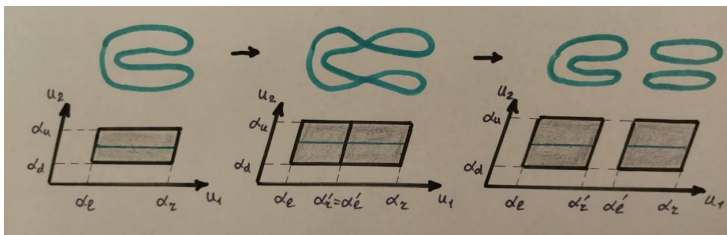


$$\tau(x, y) = (\tau_1(x), \tau_2(y))$$

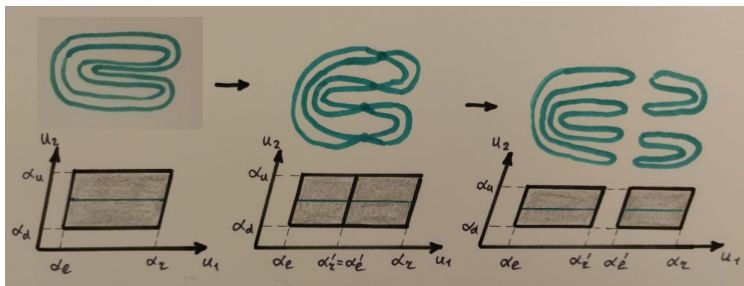
Пример 1



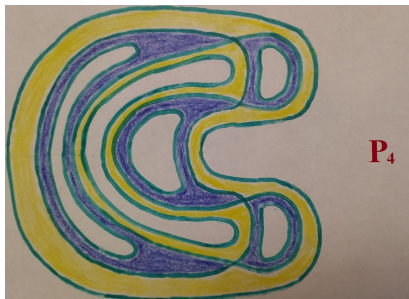
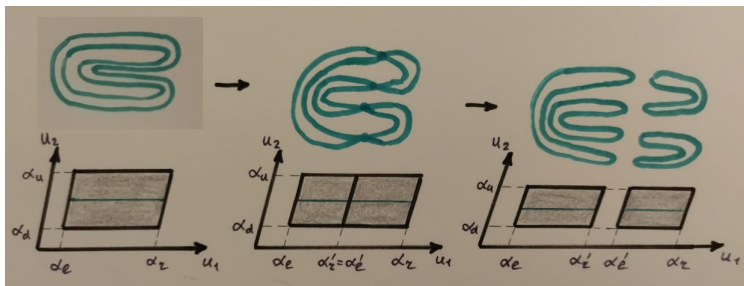
Пример 1



Пример 2



Пример 2



Алгоритм определения типа бифуркации

Пусть Z_l, Z_r, Z_d, Z_u – столбцы матрицы $\mathcal{A}$, отвечающие переменным

$$z_l = \text{bsgn} \sqrt{u_1 - \alpha_l},$$

$$z_r = \text{bsgn} \sqrt{\alpha_r - u_1},$$

$$z_d = \text{bsgn} \sqrt{u_2 - \alpha_d},$$

$$z_u = \text{bsgn} \sqrt{\alpha_u - u_2}.$$

Вырождение $\Rightarrow \mathbf{A}$

Расщепление

$$\mathcal{B} = (Z_l, Z_r, Z_d, Z_u), \mathcal{B}' = (Z_l, Z_{r'}, Z_{l'}, Z_r, Z_d, Z_u) \quad (Z_{l'} = Z_{r'})$$

- $\text{rank } \mathcal{B} = 2, \text{rank } \mathcal{B}' = 3 \Rightarrow \mathbf{C}_2$
- $\text{rank } \mathcal{B} = 3, \text{rank } \mathcal{B}' = 4, Z_d = Z_u \Rightarrow \mathbf{P}_4$
- $\text{rank } \mathcal{B} = 3, \text{rank } \mathcal{B}' = 4, Z_l = Z_r \Rightarrow \mathbf{C}_2$
- $\text{rank } \mathcal{B} = 3, \text{rank } \mathcal{B}' = 4, Z_d \neq Z_u, Z_l \neq Z_r \Rightarrow \mathbf{C}_2$
- $\text{rank } \mathcal{B} = 4, \text{rank } \mathcal{B}' = 5 \Rightarrow \mathbf{P}_4$

Алгоритм определения типа бифуркации

Расщепление (продолжение)

- $\text{rank } \mathcal{B} = \text{rank } \mathcal{B}' = 2 \Rightarrow \mathbf{B}$
- $\text{rank } \mathcal{B} = \text{rank } \mathcal{B}' = 3, Z_d = Z_u \Rightarrow \mathbf{D}_1$
- $\text{rank } \mathcal{B} = \text{rank } \mathcal{B}' = 3, Z_l = Z_r \Rightarrow \mathbf{B}$
- $\text{rank } \mathcal{B} = \text{rank } \mathcal{B}' = 3, Z_d \neq Z_u, Z_l \neq Z_r \Rightarrow \mathbf{B}$
- $\text{rank } \mathcal{B} = \text{rank } \mathcal{B}' = 4 \Rightarrow \mathbf{D}_1$

Замещение

$$\mathcal{B} = (Z_l, Z_r, Z_d, Z_u), \mathcal{B}' = (Z_l, Z_r, Z_{r'}, Z_d, Z_u)$$

- $\text{rank } \mathcal{B} = 2, \text{rank } \mathcal{B}' = 3 \Rightarrow \mathbf{B}$
- $\text{rank } \mathcal{B} = 3, \text{rank } \mathcal{B}' = 4, Z_d = Z_u \Rightarrow \mathbf{C}_2$
- $\text{rank } \mathcal{B} = 3, \text{rank } \mathcal{B}' = 4, Z_l = Z_r \Rightarrow \mathbf{B}$
- $\text{rank } \mathcal{B} = 4, \text{rank } \mathcal{B}' = 5 \Rightarrow \mathbf{C}_2$
- $\text{rank } \mathcal{B} = \text{rank } \mathcal{B}' = 3 \Rightarrow \mathbf{A}^*$
- $\text{rank } \mathcal{B} = \text{rank } \mathcal{B}' = 4, Z_{r'} = Z_l + Z_d + Z_u \Rightarrow \mathbf{B}$
- $\text{rank } \mathcal{B} = \text{rank } \mathcal{B}' = 4, Z_{r'} = Z_r + Z_d + Z_u \Rightarrow \mathbf{A}^{**}$

Случай Горячева–Чаплыгина–Сретенского в динамике твёрдого тела (1963)

Фазовое пространство:

$$\{(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3) \in \mathbb{R}^6 \mid r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1, 4(s_1 r_1 + s_2 r_2) + (s_3 + \lambda) r_3 = 0\}$$

Гамильтониан:

$$H = 2(s_1^2 + s_2^2) + \frac{1}{2}s_3^2 - r_1$$

Дополнительный первый интеграл:

$$F = 2(s_3 - \lambda)(s_1^2 + s_2^2) + 2s_1 r_3$$

Пример применения алгоритма

Разделение переменных:

$$\dot{u}_1 = \frac{\sqrt{P(u_1)}}{2(u_2 - u_1)}, \quad \dot{u}_2 = \frac{\sqrt{P(u_2)}}{2(u_2 - u_1)}, \quad P(u) = -W(u)W^*(u),$$

$$W(u) = u(u - \lambda)^2 - 2(h + 1)u - 2f, \\ W^*(u) = u(u - \lambda)^2 - 2(h - 1)u - 2f;$$

$$s_1 = \frac{1}{8}(R_1 R_2^* + R_1^* R_2), \quad s_2 = \frac{1}{8}(R_1^* R_2^* - R_1 R_2), \quad s_3 = u_1 + u_2 - \lambda, \\ r_1 = 1 - \frac{R_1^2 + R_2^{*2}}{2(u_1 - u_2)}, \quad r_2 = -\frac{R_1 R_1^* + R_2 R_2^*}{2(u_1 - u_2)}, \quad r_3 = \frac{R_1 R_2^* - R_1^* R_2}{2(u_1 - u_2)},$$

$$R_1 = \sqrt{-W(u_1)},$$

$$R_1^* = \sqrt{W^*(u_1)}$$

$$R_2 = \sqrt{W(u_2)},$$

$$R_2^* = \sqrt{-W^*(u_2)}.$$

Пример применения алгоритма

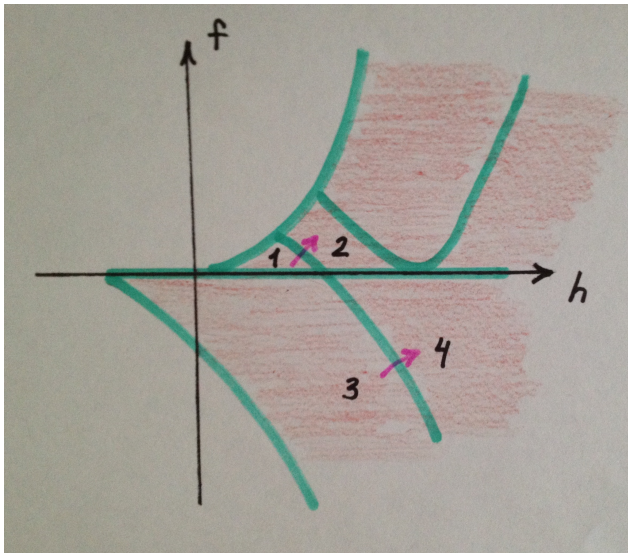
Пусть e_1, e_2, e_3 – корни $W(u)$, e_1^*, e_2^*, e_3^* – корни $W^*(u)$,

$$z_{im} = \text{bsgn} \sqrt{u_i - e_m}, \quad z_{im}^* = \text{bsgn} \sqrt{u_i - e_m^*}.$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{11}^* & Z_{12}^* & Z_{13}^* & Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & Z_{21}^* & Z_{22}^* & Z_{23}^* \\ \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Пример применения алгоритма

$$2/\sqrt{3} < \lambda < 2$$



Пример применения алгоритма

$$1: [e_1^*, e_3] \times [e_1, e_2];$$

$$2: ([e_1^*, e_2^*] \cup [e_3^*, e_3]) \times [e_1, e_2].$$

$$\begin{array}{cccccc} Z_{11}^* & Z_{12}^* & Z_{13}^* & Z_{13} & Z_{21} & Z_{22} \\ B' = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & D_1 \end{array}$$

$$3: [e_2, e_3] \times [e_1, e_1^*];$$

$$4: ([e_2, e_2^*] \cup [e_3^*, e_3]) \times [e_1, e_1^*].$$

$$B' = \begin{matrix} & \begin{matrix} Z_{12} & Z_{12}^* & Z_{13}^* & Z_{13} & Z_{21} & Z_{21}^* \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{B} \end{matrix}$$

Спасибо за внимание!