

Биллиарды с потенциалом Гука на некоторых трехмерных столах, ограниченных софокусными квадриками

Белозеров Г. В.
gleb0511beloz@yandex.ru

кафедра дифференциальной геометрии и приложений
механико-математический факультет
МГУ им. М. В. Ломоносова

7 ноября 2022

Семейство софокусных квадрик

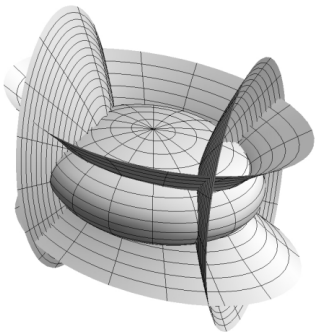
Определение

Семейством софокусных квадрик в $\mathbb{R}^3$ назовем совокупность квадрик, заданных уравнением

$$\begin{aligned}(b - \lambda)(c - \lambda)x^2 + (a - \lambda)(c - \lambda)y^2 + (a - \lambda)(b - \lambda)z^2 = \\ = (a - \lambda)(b - \lambda)(c - \lambda)\end{aligned}$$

где $a > b > c$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ — вещественный параметр. Если квадрика Q из этого семейства такова, что λ_Q равен a , b или c , то она называется **вырожденной**. Иначе квадрике Q называют **невырожденной**.

Три софокусные квадрики



- Если $\lambda \in (-\infty, c)$, то Q_λ — эллипсоид.
- Если $\lambda \in (c, b)$, то Q_λ — однополостный гиперболоид.
- Если $\lambda \in (b, a)$, то Q_λ — двуполостный гиперболоид.

Свойства семейства софокусных квадрик

Утверждение

Касательные плоскости в точках пересечения софокусных квадрик ортогональны.

Утверждение

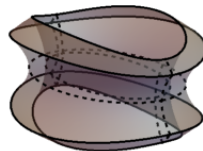
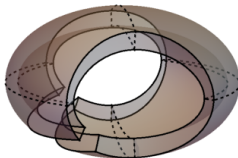
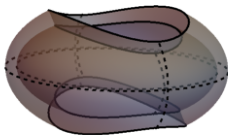
Пусть точка $P = (x, y, z)$ такова, что $x, y, z \neq 0$. Тогда через эту точку проходят в точности 3 софокусные квадрики. Более того, одна из них — эллипсоид, вторая — однополостный гиперболоид, а третья — двуполостный гиперболоид.

Последнее свойство позволяет ввести в $\mathbb{R}^3$ эллиптические координаты $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Здесь $\lambda_1 \in (\infty, c]$ — параметр элл., $\lambda_2 \in [b, c]$ — параметр одн. гип., $\lambda_3 \in [b, a]$ — параметр дв. гип., проходящих через точку.

Биллиардные столы

Определение

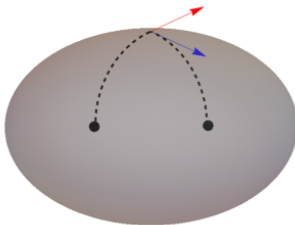
Трехмерным биллиардным столом будем называть компактное в $\mathbb{R}^3$ множество с непустой внутренностью, ограниченное конечным числом гладких граней, лежащих на квадриках этого семейства, и имеющее двугранные углы излома на границе, равные $\frac{\pi}{2}$.



Постановка задачи

Движение шара

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — бильярдный стол. Рассмотрим следующую динамическую систему: материальная точка (шар) единичной массы движется внутри Ω под действием силы упругости (закон Гука), отражаясь от $\partial\Omega$ абсолютно упруго. Мы предполагаем, что центр поля сил совпадает с началом координат.



Первые интегралы задачи

Интеграл энергии

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$$

Дополнительные первые интегралы

Найдем дополнительные первые интегралы, используя первые интегралы бильярда без потенциала. По теореме Якоби–Шаля первыми интегралами задачи без потенциала являются параметры Λ_1, Λ_2 софокусных квадрик, которых одновременно касаются прямые траектории шара. Рассмотрим функции $I_1 = -H(\Lambda_1 + \Lambda_2)$, $I_2 = H\Lambda_1\Lambda_2$. Они также являются первыми интегралами бильярда без потенциала.

Первые интегралы задачи

Интегралы I_1, I_2 задачи без потенциала

$$I_1 = \frac{c+b}{2}\dot{x}^2 + \frac{a+c}{2}\dot{y}^2 + \frac{a+b}{2}\dot{z}^2 - \frac{1}{2}(K_x^2 + K_y^2 + K_z^2)$$

$$I_2 = \frac{cb}{2}\dot{x}^2 + \frac{ac}{2}\dot{y}^2 + \frac{ab}{2}\dot{z}^2 - \frac{1}{2}(aK_x^2 + bK_y^2 + cK_z^2)$$

Интегралы F_1, F_2 задачи с потенциалом Гука

Мы будем искать F_1, F_2 следующим образом:

$$F_1 = I_1 + f_1(x, y, z)$$

$$F_2 = I_2 + f_2(x, y, z)$$

Дополнительные первые интегралы

Дополнительные первые интегралы при $k \neq 0$

$$\begin{aligned}\dot{F}_1 = & -k((c+b)x\dot{x} + (a+c)y\dot{y} + (a+b)z\dot{z}) + \\ & + \partial_x f_1 \dot{x} + \partial_y f_1 \dot{y} + \partial_z f_1 \dot{z} = 0\end{aligned}$$

$$\dot{F}_2 = -k(cbx\dot{x} + acy\dot{y} + abz\dot{z}) + \partial_x f_2 \dot{x} + \partial_y f_2 \dot{y} + \partial_z f_2 \dot{z} = 0$$

Дополнительные первые интегралы

Интегралы F_1, F_2 задачи с потенциалом Гука

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{c+b}{2} \dot{x}^2 + \frac{a+c}{2} \dot{y}^2 + \frac{a+b}{2} \dot{z}^2 - \\ &\quad - \frac{1}{2}(K_x^2 + K_y^2 + K_z^2) + \frac{k}{2}((b+c)x^2 + (a+c)y^2 + (a+b)z^2) \\ F_2 &= \frac{cb}{2} \dot{x}^2 + \frac{ac}{2} \dot{y}^2 + \frac{ab}{2} \dot{z}^2 - \\ &\quad - \frac{1}{2}(aK_x^2 + bK_y^2 + cK_z^2) + \frac{k}{2}(bcx^2 + acy^2 + abz^2) \end{aligned}$$

Разделение переменных

Утверждение

Для всех $i = 1, 2, 3$ верно следующее соотношение:

$$F_2 - \lambda_i F_1 + \lambda_i^2 H = 2\Delta_i p_i^2 + \frac{k}{2}\Delta_i,$$

где $\Delta_i = (a - \lambda_i)(b - \lambda_i)(c - \lambda_i)$.

Разделение переменных

$$\dot{\lambda}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = 4 \frac{\Delta_i}{(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k)} p_i$$

Разделение переменных

Разделение переменных

Выражая p_i из утверждения и подставляя его в уравнения Гамильтона, получаем следующие формулы:

$$\dot{\lambda}_i = \pm \frac{4}{\sqrt{2}(\lambda_i - \lambda_j)(\lambda_i - \lambda_k)} \sqrt{V(\lambda_i)},$$

где

$V(z) = (f_2 - zf_1 + z^2h - \frac{k}{2}(a-z)(b-z)(c-z))(a-z)(b-z)(c-z)$,
где f_1, f_2, h — значения интегралов F_1, F_2, H соответственно.

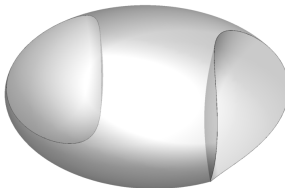
Области возможного движения шара

Утверждение

Многочлен $V(z)$ имеет 6 вещественных корней с учетом кратности.

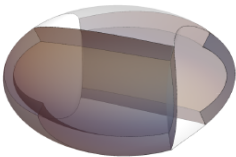
Корни $V(z)$

Пусть $\xi_1, \xi_2, \xi_3, a, b, c$ – корни многочлена $V(z)$ с учетом кратности. Будем считать, что $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \xi_3$.

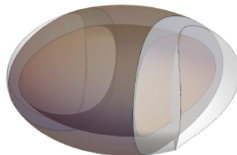


Области возможного движения шара при $k > 0$

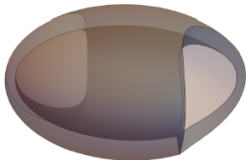
1. $\xi_1 \leq 0 < \xi_2 < c < \xi_3 < b$



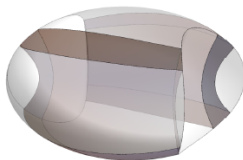
2. $\xi_1 \leq 0 \leq \xi_2 < c < b < \lambda_0 < \xi_3 < a$



3. $\xi_1 \leq 0 < \xi_2 < c < b < \xi_3 \leq \lambda_0$

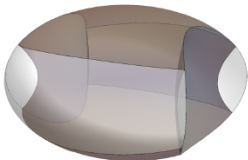


4. $\xi_1 \leq 0 < c < \xi_2 < \xi_3 < b$

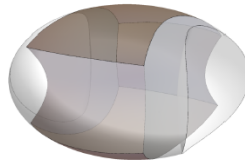


Области возможного движения шара при $k > 0$

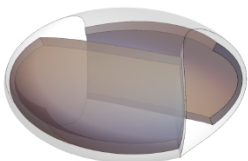
5. $\xi_1 \leq 0 < c < \xi_2 < b < \xi_3 \leq \lambda_0$



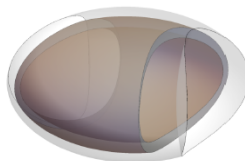
6. $\xi_1 \leq 0 < c < \xi_2 < b < \lambda_0 < \xi_3 < a$



7. $0 < \xi_1 < \xi_2 < c < \xi_3 < b$

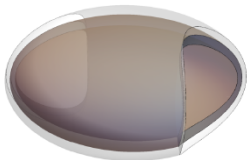


8. $0 < \xi_1 < \xi_2 < c < b < \lambda_0 < \xi_3 < a$

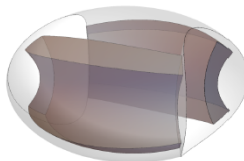


Области возможного движения шара при $k > 0$

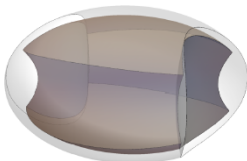
9. $0 < \xi_1 < \xi_2 < c < b < \xi_3 \leq \lambda_0$



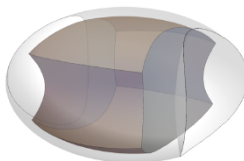
10. $0 < \xi_1 < c < \xi_2 < \xi_3 < b$



11. $0 < \xi_1 < c < \xi_2 < b < \xi_3 \leq \lambda_0$

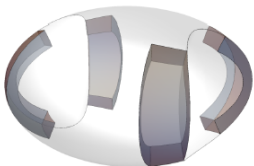


12. $0 < \xi_1 < c < \xi_2 < b < \lambda_0 < \xi_3 < a$



Области возможного движения шара при $k < 0$

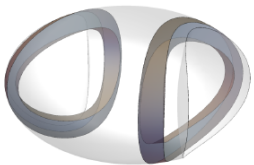
1. $0 < \xi_1 < c < \xi_2 < b < \lambda_0 < \xi_3 < a$



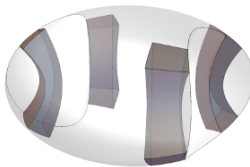
2. $0 < \xi_1 < c < b < \xi_2 \leq \lambda_0 < \xi_3 < a$



3. $0 < \xi_1 < c < b < \lambda_0 < \xi_2 < \xi_3 < a$

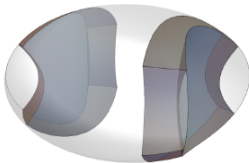


4. $c < \xi_1 < \xi_2 \leq b < \lambda_0 < \xi_3 < a$

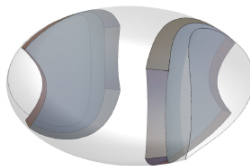


Области возможного движения шара при $k < 0$

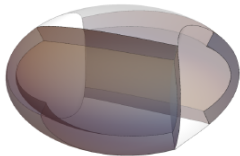
5. $c < \xi_1 < b < \xi_2 \leq \lambda_0 < \xi_3 < a$



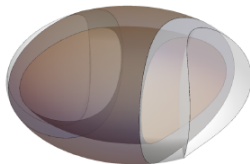
6. $c < \xi_1 < b < \lambda_0 < \xi_2 < \xi_3 < a$



7. $0 < \xi_1 < c < \xi_2 < b < a < \xi_3$

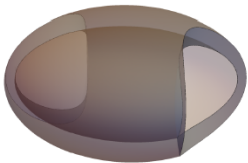


8. $0 < \xi_1 < c < \lambda_0 < \xi_2 < a < \xi_3$

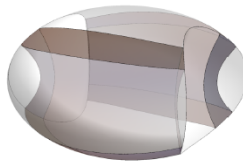


Области возможного движения шара при $k < 0$

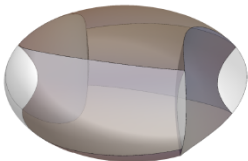
9. $0 < \xi_1 < c < \xi_2 \leq \lambda_0 < a < \xi_3$



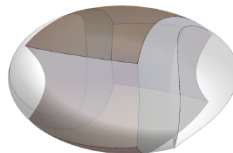
10. $c < \xi_1 < \xi_2 < b < a < \xi_3$



11. $c < \xi_1 < b < \xi_2 \leq \lambda_0 < a \leq \xi_3$



12. $c < \xi_1 < b < \lambda_0 < \xi_2 < a \leq \xi_3$



Переход к новым первым интегралам

Новые первые интегралы

Поскольку $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \xi_3$ — корни кубического многочлена, коэффициенты которого зависят только от первых интегралов и констант a, b, c, k , то ξ_1, ξ_2, ξ_3 — первые интегралы рассматриваемой задачи.

Теорема

Функции ξ_1, ξ_2, ξ_3 — функционально независимые попарно коммутирующие (относительно стандартной скобки Пуассона) первые интегралы рассматриваемой задачи.

Особые точки

Определение

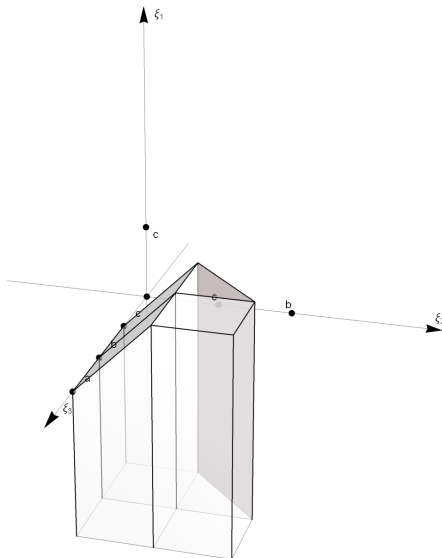
Точку $P = (\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0)$ образа отображения момента будем называть **особой**, если она удовлетворяет одному из следующих условий:

- P лежит на границе образа отображения момента;
- среди чисел $\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0, a, b, c$ есть хотя бы два равных.

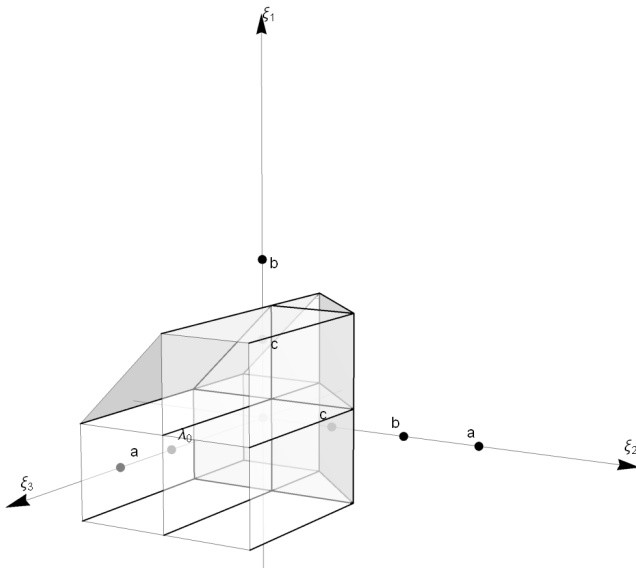
Определение

Бифуркационной диаграммой отображения момента (ξ_1, ξ_2, ξ_3) будем называть совокупность всех его особых точек.

Бифуркационная диаграмма. Случай $k > 0$



Бифуркационная диаграмма. Случай $k < 0$



Кратность и виды особых точек

Определение

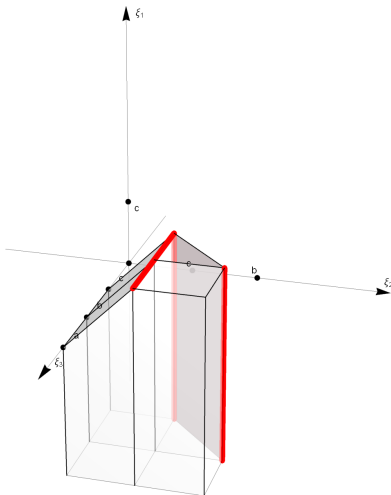
Особую точку P будем называть **неправильной**, если через P проходят хотя бы три плоскости бифуркационной диаграммы, пересекающиеся по одной прямой. Остальные особые точки будем называть **правильными**.

Определение

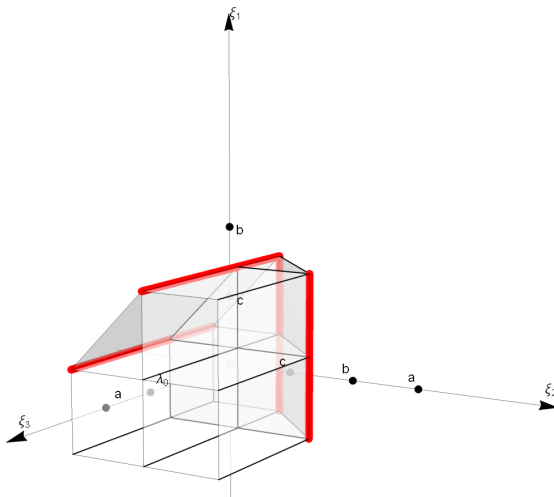
Кратностью особой точки P будем называть количество плоскостей бифуркационной диаграммы, содержащих эту точку. Будет обозначать это число через $N(P)$.

Из устройства бифуркационных диаграмм вытекает, что кратность правильной особой точки не превосходит трех.

Неправильные особые точки при $k > 0$



Неправильные особые точки при $k < 0$



Виды правильных особых точек

Определение

Правильную особую точку P будем называть **внешней**, если она лежит на границе образа отображения момента. Иначе точку P будем называть **внутренней**.

Определение

Внешнюю особую точку P точку будем называть **угловой**, если она лежит на границе всех участков плоскостей бифуркационной диаграммы, пересекающихся в ней. Иначе P будем называть **неугловой**.

Неособые точки

Теорема

Пусть T_P — неособая поверхность уровня интегралов ξ_1, ξ_2, ξ_3 биллиарда с потенциалом Гука внутри стола D . Тогда T_ξ гомеоморфно либо тору $\mathbb{T}^3$, либо несвязному объединению нескольких торов $\mathbb{T}^3$. Более того, слоение Лиувилля в некоторой окрестности U поверхности T_P тривиально, то есть гомеоморфно прямому произведению T_P на диск D^3 .

Правильные особые точки кратности 1

Теорема

Пусть P — правильная особая точка кратности 1 и T_P — соответствующая поверхность уровня. Тогда

1. Если P — внутренняя точка, то T_P гомеоморфно несвязному объединению прямых произведений особого слоя седлового 3-атома и окружности. Более того, прообраз малой окрестности точки P гомеоморфен несвязному объединению прямых произведений вида $V \times S^1 \times D^2$, где D^2 — диск, а V один из следующих седловых 3-атомов: A^* , $C_2^{(3)}$, $B^{(3)}$.
2. Если P — внешняя точка, то T_P гомеоморфно несвязному объединению торов $\mathbb{T}^2$. Более того, прообраз малой окрестности такой точки гомеоморфен несвязному объединению прямых произведений вида: $A^{(2)} \times \mathbb{T}^2 \times D^2$.

Правильные особые точки кратности 2

Теорема

Пусть P — внешняя правильная особая точка кратности 2 и T_P — соответствующая поверхность уровня. Тогда

1. Если P — угловая точка, то прообраз малой окрестности точки P гомеоморфен несвязному объединению прямых произведений вида $A^{(2)} \times A^{(2)} \times S^1 \times D^1$.
2. Если P — неугловая точка, то прообраз малой окрестности точки P гомеоморфен несвязному объединению прямых произведений вида $V \times A^{(2)} \times D^1$, где V один из следующих седловых 3-атомов: A^* , $C_2^{(3)}$, $B^{(3)}$.

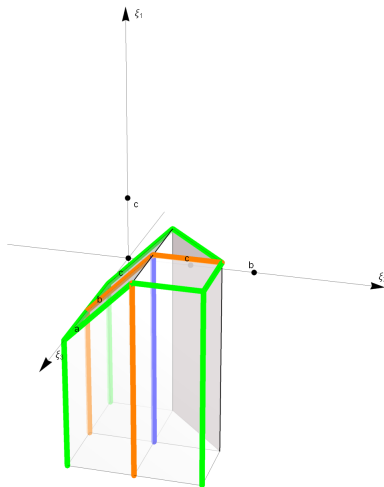
Правильные особые точки кратности 2

Теорема

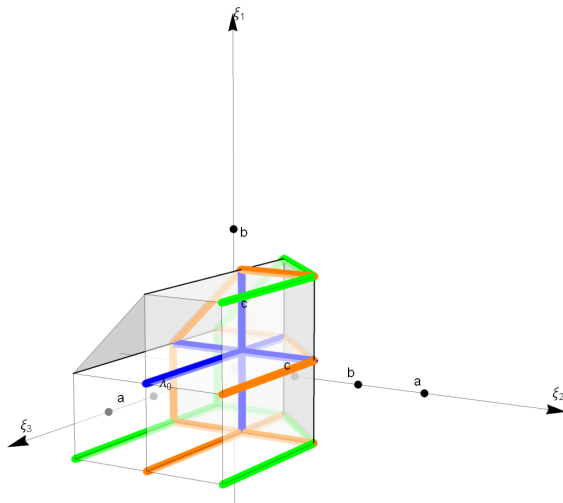
Пусть P — внутренняя правильная особая точка кратности 2 и T_P — соответствующая поверхность уровня. Тогда

1. Если $k > 0$, то прообраз малой окрестности точки P гомеоморфен произведению вида $(B^{(2)} \times C_2^{(2)}) / \mathbb{Z}_2 \times S^1 \times D^1$.
2. Если $k < 0$, то прообраз малой окрестности точки P гомеоморфен несвязному объединению одного или двух произведений вида:
 - $(B^{(2)} \times C_2^{(2)}) / \mathbb{Z}_2 \times S^1 \times D^1$;
 - $B^{(3)} \times B^{(2)} \times D^1$;
 - $C_2^{(3)} \times B^{(2)} \times D^1$;
 - $A^* \times B^{(2)} \times D^1$.

Правильные особенности кратности 2 при $k > 0$



Правильные особенности кратности 2 при $k < 0$



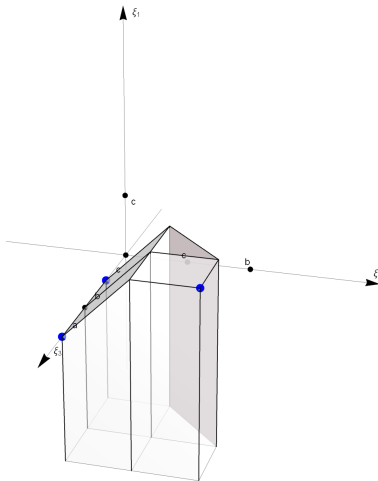
Правильные особые точки кратности 3

Теорема

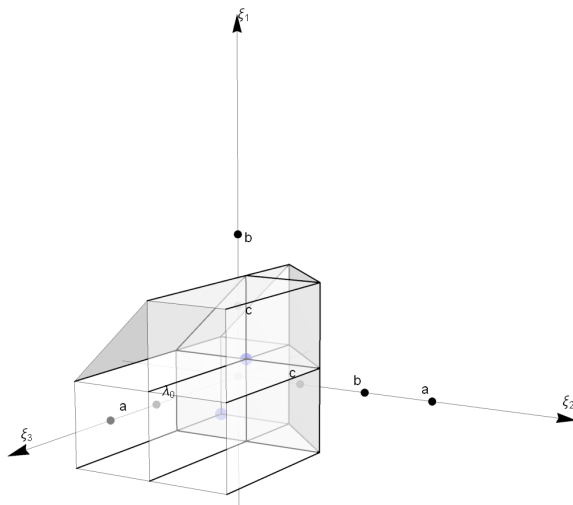
Пусть P — правильная особая точка кратности 3 и T_P — соответствующая поверхность уровня. Тогда

1. Если P является внешней точкой, то P является угловой точкой и прообраз ее малой окрестности гомеоморфен несвязному объединению прямых произведений вида: $A^{(2)} \times A^{(2)} \times A^{(2)}$.
2. Если P является внутренней точкой и $k < 0$, то $P = (c, b, a)$ и прообраз ее малой окрестности гомеоморфен прямому произведению вида $(B^{(2)} \times C_2^{(2)}) / \mathbb{Z}_2 \times B^{(2)}$. При $k > 0$ внутренних особых точек кратности 3 нет.

Правильные особенности кратности 3 при $k > 0$



Правильные особенности кратности 3 при $k < 0$



Неправильные особые точки

Теорема

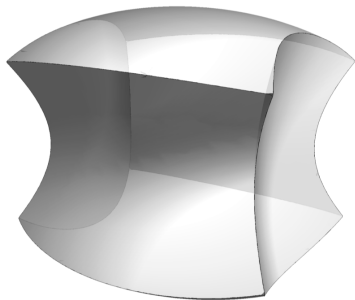
Пусть P — неправильная особая точка кратности 3, тогда ее пробораз гомеоморфен несвязному объединению торов $\mathbb{T}^2$.

$$N(P) \geq 4$$

- В случае $k > 0$ есть ровно 3 особые точки кратности 4 (это (c, c, a) , (c, b, b) , (c, c, b)) и одна особая точка кратности 5 (это (c, c, c)).
- В случае $k < 0$ есть ровно 8 особых точек кратности 4 (это (c, c, a) , (b, b, a) , (b, a, a) , (c, a, a) , $(0, a, a)$, (c, c, λ_0) , $(0, b, \lambda_0)$, (c, b, λ_0)) и одна особая точка кратности 5 (это (b, b, λ_0)).

Прообразы этих особых точек представляют собой одномерные и двумерные комплексы.

Биллиард в области без фокальных кривых



$k > 0$ Прообраз малой окрестности внутренней особой точки кратности 2 гомеоморфен прямому произведению

$$B^{(2)} \times B^{(2)} \times S^1 \times D^1$$

$k < 0$ Прообраз малой окрестности внутренней особой точки кратности 3 гомеоморфен прямому произведению

$$B^{(2)} \times B^{(2)} \times B^{(2)}$$

Спасибо за внимание!