

Магнитные геодезические потоки на двумерных многообразиях вращения

Кобцев Иван Федорович¹ Кудрявцева Елена Александровна²

¹Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

²Московский центр фундаментальной и прикладной математики

Вторая конференция Математических центров России
(7–11 ноября 2022 г., МГУ, МИАН, г. Москва)

Определение

Гамильтонова система v на симплектическом многообразии M^{2n} вполне интегрируема по Лиувиллю, если существуют функции $f_1, \dots, f_n$ такие, что:

- 1 $f_1, \dots, f_n$ — первые интегралы системы,
- 2 $\text{grad } f_1, \dots, \text{grad } f_n$ линейно независимы п. в. на M^{2n} ,
- 3 $\{f_i, f_j\} = 0$,
- 4 гамильтоновы потоки, соответствующие $f_1, \dots, f_n$, полны.

Определение

Слоение Лиувилля интегрируемой системы — разбиение многообразия M^{2n} на связные компоненты совместных поверхностей уровня интегралов $f_1, \dots, f_n$.

Определение

Интегрируемые гамильтоновы системы лиувиллево эквивалентны, если существует диффеоморфизм, переводящий слоение Лиувилля первой системы в слоение Лиувилля второй системы.

Рассматривается изоэнергетическое многообразие $Q_h^3 = \{x \in M^4: H(x) = h\}$, при этом $dH|_{Q_h^3} \neq 0$, а $K|_{Q_h^3}$ — функция Ботта.

Слой слоения Лиувилля: $F_{h,k} = \{x \in M^4: H(x) = h, K(x) = k\}$

- регулярный — диффеоморфен nT^2 ;
- особый.

Определение

Атом — расслоенная окрестность особого слоя слоения Лиувилля в Q_h^3 .

Определение

Молекула интегрируемой системы (грубый инвариант Фоменко) на неособом компактном Q_h^3 — база слоения Лиувилля на Q_h^3 , граф с обозначением атомов в его вершинах.

Его вершины — бифуркации торов Лиувилля, ребра — однопараметрические семейства торов.

Меченая молекула (тонкий инвариант Фоменко–Цишанга): граничные торы атомов, отвечающих смежным вершинам (на ребрах) склеиваются.

Целочисленная матрица склейки $\Rightarrow r$ -, ε -, n -метки на ребрах графа (молекулы).

(Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, 

Постановка задачи

Определение

Магнитный геодезический поток типа $(f(r), \Lambda(r))$ на M — это динамическая система $S(f, \Lambda)$ на T^*M с гамильтонианом стандартного геодезического потока и «подкрученной» симплектической структурой ω , которые имеют вид

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2f^2(r)}, \quad \omega = dp_r \wedge dr + dp_\varphi \wedge d\varphi + \beta. \quad (1)$$

Здесь β — гладкая S^1 -инвариантная 2-форма на M , задающая магнитное поле ($\Rightarrow \omega + \pi^*\beta$ — гладкая симплектическая форма на T^*M , $\pi: T^*M \rightarrow M$ — каноническая проекция), $f, \Lambda: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкие функции, $\beta = \Lambda'(r)dr \wedge d\varphi$.

Пусть $M \approx S^2$. Определим 1-форму $A = (\Lambda(r) - \Lambda(0))d\varphi$ в $M \setminus S$, тогда $\beta|_{M \setminus S} = dA$. При диффеоморфизме $(p, q) \rightarrow (p + A, q): T^*(M \setminus S) \rightarrow T^*(M \setminus S)$ система (1) на $T^*(M \setminus S)$ переходит в

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{(K - \Lambda(r))^2}{2f^2(r)}, \quad \omega = dp_r \wedge dr + dK \wedge d\varphi. \quad (2)$$

Здесь $(p_r, p_\varphi, r, \varphi) \rightarrow (p_r, K, r, \varphi)$, и за $K + \Lambda(0)$ сохранено обозначение K . Следовательно, в случае $\Lambda(0) = \Lambda(L)$ представления (1) и (2) магнитного геодезического потока эквивалентны на всем T^*M .

Система $S(f, \Lambda)$

Условия гладкости метрики и магнитного поля в полюсах:

1. $f(r)$ продолжается до гладкой нечетной $2L$ -периодической функции на $\mathbb{R}$;
2. $\Lambda(r)$ продолжается до гладкой четной $2L$ -периодической функции на $\mathbb{R}$;
3. $f'(0) = 1, f'(L) = -1$.

Технические условия:

4. $f(r), \Lambda(r)$ — функции Морса;
5. $(\Lambda'(r))^2 + (f'(r))^2 > 0$;
6. $k(r)$ — функция Морса (требуется не всегда).

Замечание

Эти условия эквиваленты следующему геометрическому описанию.

Дана регулярно параметризованная плоская кривая $(f(r), \Lambda(r))$, такая что начало и конец — на оси $O\Lambda$, кривая лежит в полуплоскости $f > 0$, при отражении относительно оси $O\Lambda$ превращается в регулярную замкнутую кривую. В точках перегиба этой кривой касательная к кривой не вертикальна и не горизонтальна (и точка перегиба невырождена в случае требования морсовости $k(r)$).

Особенности системы $S(f, \Lambda)$

Теорема

(Е.А. Кудрявцева, А.А. Ошемков, 2020)

- 1 Система $S(f, \Lambda)$ имеет ровно две особые точки ранга 0 — $(0, N)$ и $(0, S)$, обе они невырождены и имеют тип центр-центр. Их образами при отображении момента $\mathcal{F} = (H, K) : T^*M \rightarrow \mathbb{R}^2$ являются точки $(0, \Lambda(0))$ и $(0, \Lambda(L))$.
- 2 Особые точки ранга 1 объединены в 2 семейства:
 - $K_1^1 = \{(p_r, k, r, \varphi) = (0, k(r), r, \varphi) \mid r \in I, \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$, где $k(r) = \Lambda(r) - f(r) \frac{\Lambda'(r)}{f'(r)}$,
 - $K_2^1 = \{(p_r, k, r, \varphi) = (0, \Lambda(r), r, \varphi) \mid r \in (0, L), \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$, где $(r, \varphi) \in [0, L] \times (\mathbb{R} \bmod 2\pi\mathbb{Z})$.

$$\mathcal{F}(K_1^1) = \gamma_1 = \{(h(r), k(r)) \mid r \in I\}, \quad h(r) = \frac{1}{2} \left(\frac{\Lambda'}{f'} \right)^2.$$

$$\mathcal{F}(K_2^1) = \gamma_2 = \{(0, \Lambda(r)) \mid r \in (0, L)\}.$$

[2] Kudryavtseva E. A., Oshemkov A. A., "Bifurcations of integrable mechanical systems with magnetic field on surfaces of revolution," *Chebyshevsky sb.*, **21**, No. 2, 244–265 (2020).

Обозначим $U_k(r) = \frac{(k - \Lambda(r))^2}{2f^2(r)}$ — эффективный потенциал системы $S(f, \Lambda)$,
тогда $H = \frac{p_r^2}{2} + U_k(r)$.

Теорема (Свойства невырожденных одномерных орбит)

Любая критическая орбита

$\{(p_r, k, r, \varphi) = (0, \Lambda(r), r, \varphi) \mid r = \text{fix}, \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\} \approx S^1$, содержащаяся в $K_2^1 \setminus K_1^1$, является невырожденной и имеет эллиптический тип. Для любого $r \in (0, L)$ такого, что $f'(r) \neq 0$, следующие условия равносильны:

(i) критическая орбита $\{(p_r, k, r, \varphi) = (0, k(r), r, \varphi) \mid \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$ из семейства K_1^1 невырождена,

(ii) $U''_{k(r)}(r) \neq 0$,

(iii) $k'(r)\Lambda'(r) \neq 0$,

(iv) $\Lambda'(r) \neq 0$ или кривизна плоской кривой (f, Λ) не равна 0 в точке r .

Если $U''_{k(r)}(r) > 0$ ($\iff k'(r)\Lambda'(r) < 0 \iff \frac{d\Lambda}{df} \cdot \frac{d^2\Lambda}{df^2} > 0$), то критическая окружность имеет эллиптический тип, если $U''_{k(r)}(r) < 0$ — гиперболический.

Теорема (Свойства вырожденных одномерных орбит)

Вырожденные критические окружности $\{(p_r, k, r, \varphi) = (0, k(r), r, \varphi) \mid \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$ семейства K_1^1 бывают двух типов (при условии, что функция $k(r)$ является морсовской на каждом интервале области определения):

- параболическая окружность — при таком $r \in I$, что $k'(r) = 0$ (ее образ на диаграмме — точка возврата кривой γ_1), при условии, что функция $k(r)$ является морсовской на каждом интервале области определения. Прообраз этой точки при отображении момента является «каспидальным тором», а росток слоения Лиувилля в этом торе имеет тип «каспидальный тор»;
- критическая орбита, содержащаяся в обоих семействах K_1^1 , K_2^1 и соответствующая точке касания кривых γ_1 и γ_2 , т.е. такому $r \in I$, что $\Lambda'(r) = 0$. Росток слоения Лиувилля в прообразе этой точки при отображении момента имеет тип «эллиптическая вилка».

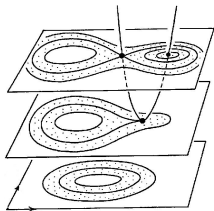
Таких вырожденных критических орбит конечное число. Параболические орбиты структурно устойчивы относительно малых гладких интегрируемых возмущений системы. А вырожденные орбиты второго типа структурно устойчивы относительно малых гладких возмущений пары функций (f, Λ) . Однако они не структурно устойчивы относительно возмущений в классе магнитных геодезических потоков с потенциалом, инвариантных относительно вращений.

Слоение в окрестности вырожденных одномерных орбит

$K = p_2$, $f = f(p_1, p_2, q_1)$, q_2 — циклическая координата (на самом деле $(p_1, p_2, q_1, q_2) = (p_r, K, q_1(r), \varphi)$).

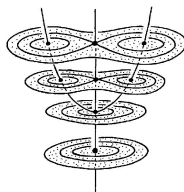
K, f задают одномерное слоение на $\mathbb{R}^3$.

Симплектическая форма: $\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2$



$$f = p_1^2 + q_1^3 - p_2 q_1, \quad K = p_2$$

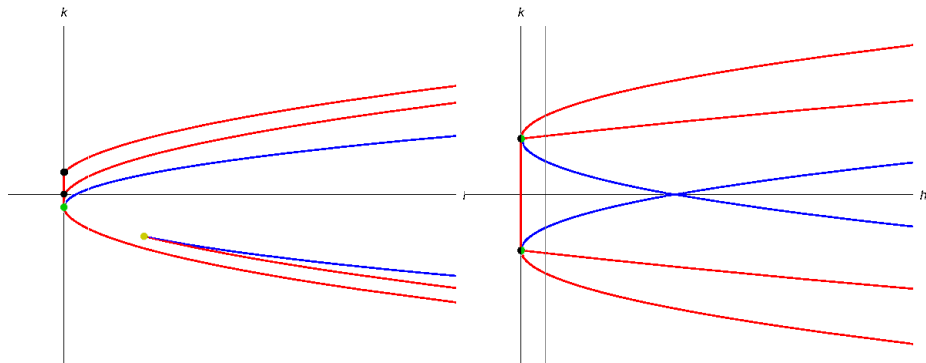
росток слоения типа «каспидальный тор»



$$f = p_1^2 + q_1^4 - p_2 q_1^2, \quad K = p_2$$

росток слоения типа «эллиптическая вилка»

Пример бифуркационной диаграммы: особенности



Цветами отмечены:

критические точки ранга 0 (в $\mathcal{F}^{-1}$), **эллиптические критические траектории** (в $\mathcal{F}^{-1}$), **гиперболические критические траектории** (в $\mathcal{F}^{-1}$), **эллиптическая вилка** (несимметричная, в окрестности $\mathcal{F}^{-1}$), **каспидальный тор** (в окрестности $\mathcal{F}^{-1}$)

Инвариант Фоменко системы $S(f, \Lambda)$

Теорема

- 1 В задаче $S(f, \Lambda)$ изоэнергетическое многообразие $Q_h^3 = \{H = h\} \subset T^*M$ является неособым тогда и только тогда, когда $h \neq 0$. При любом $h > 0$ оно диффеоморфно $\mathbb{R}P^3$.
- 2 Если функция $k(r)$ является морсовской на каждом интервале области определения и $h > 0$ отлично от значений h в точках возврата кривой γ_1 , то $K|_{Q_h^3}$ — функция Ботта и граф Фоменко функции Ботта $K|_{Q_h^3}$ является деревом, в концевых вершинах которого стоят 3-атомы A , а в других вершинах — седловые 3-атомы $V = V_{\sigma_1 \dots \sigma_k} \times S^1$.

Параметризация слоения Лиувилля:

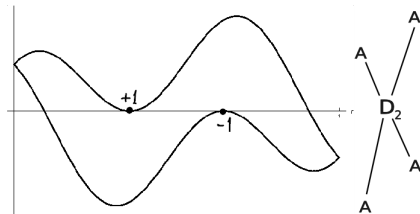
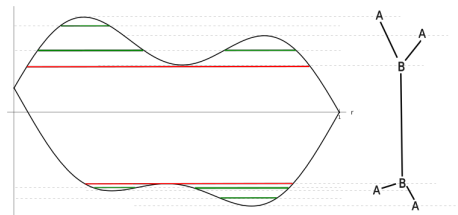
на $Q_h^+ = Q_h^3 \cap \{p_\varphi > 0\}$: $k_+(p_r, r) = \Lambda(r) + \sqrt{2hf^2(r) - p_r^2}$

на $Q_h^- = Q_h^3 \cap \{p_\varphi < 0\}$: $k_-(p_r, r) = \Lambda(r) - \sqrt{2hf^2(r) - p_r^2}$

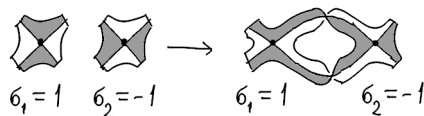
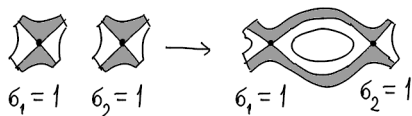
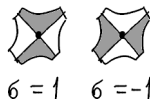
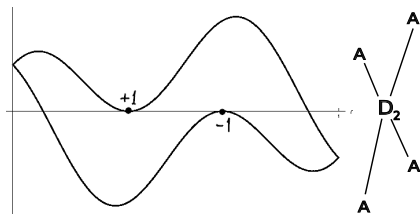
(кроме слоя $p_\varphi = 0$, на котором не определен угол φ)

Построение инварианта Фоменко

Графики функций $\Lambda(r) + \sqrt{2hf}(r)$, $\Lambda(r) - \sqrt{2hf}(r)$



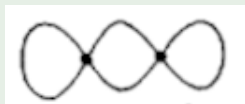
Построение бифуркаций торов Лиувилля



Example

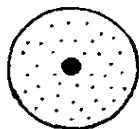


$$-D_1 \equiv (V_{++})$$

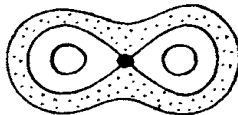


$$= D_2 = (V_{+-})$$

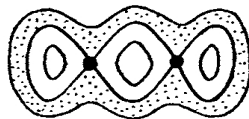
Встречающиеся в задаче $S(f, \Lambda)$ бифуркации (примеры)



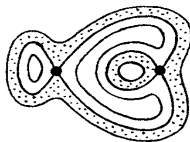
$$A: 1T^2 \rightarrow \emptyset$$



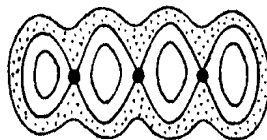
$$B: 1T^2 \rightarrow 2T^2$$



$$D_1: 1T^2 \rightarrow 3T^2$$



$$D_2: 2T^2 \rightarrow 2T^2$$



$$G_1: 1T^2 \rightarrow 4T^2$$

Теорема (Описание слоения Лиувилля системы $S(f, \Lambda)$)

Изоэнергетическое многообразие $Q_h^3 = \{H = h\} \subset T^*M$ является неособым тогда и только тогда, когда $h \neq 0$. При любом $h > 0$ оно диффеоморфно $\mathbb{R}P^3$.

Если $k(r)$, $r \in I$ — функция Морса и $h > 0$ отлично от значений h в точках возврата кривой γ_1 , то $K|_{Q_h^3}$ — функция Ботта и имеет место следующее:

- 1) граф Фоменко функции Ботта $K|_{Q_h^3}$ является деревом, в концевых вершинах которого стоят 3-атомы A , а в других вершинах — седловые 3-атомы $V = V_{\sigma_1 \dots \sigma_k} \times S^1$;
- 2) топологический инвариант Фоменко–Цишанга слоения Лиувилля на изоэнергетическом многообразии Q_h^3 (с ориентацией гиперболических орбит, заданной потоком $\text{sgrad } K$) задается этим графом Фоменко с метками $r = 0$, $\varepsilon = 1$ на ребрах $A - V$, метками $r = \infty$, $\varepsilon = 1$ на ребрах $V - V'$, а все седловые атомы образуют единственную семью с n -меткой 2;
- 3) если граф Фоменко имеет вид $A - A$, то метки на единственном ребре $r = 1/2$, $\varepsilon = 1$.

Определение

$RP(f, \Lambda)$ — это магнитный геодезический поток на проективной плоскости.

Пусть $M^2 = S^2(r, \varphi)$

Рассмотрим инволюцию $\xi: (r, \varphi) \rightarrow (L - r, \varphi + \pi)$

Имеем $S^2/\xi = \mathbb{R}P^2$

Действие ξ на $T^*M: (p_r, k, r, \varphi) \rightarrow (-p_r, k, L - r, \varphi + \pi)$

Что при этом произойдет с меченой молекулой?

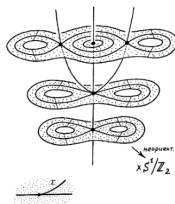
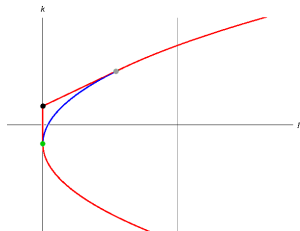
Список условий для системы $RP(f, \Lambda)$:

- 1 $f(r)$ продолжается до гладкой нечетной $2L$ -периодической функции на $\mathbb{R}$;
- 2 $\Lambda(r)$ продолжается до гладкой четной $2L$ -периодической функции на $\mathbb{R}$;
- 3 $f(L - r) = f(r)$, $\Lambda(L - r) = \Lambda(r)$;
- 4 $f'(0) = 1$, $f'(L) = -1$.

Дополнительно будем предполагать, что:

- 1 $f(r)$, $\Lambda(r)$ — функции Морса;
- 2 $(\Lambda'(r))^2 + (f'(r))^2 > 0$ всюду, кроме $r = L/2$.

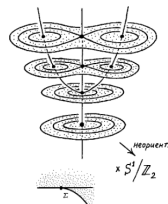
Диаграмма и особенности системы $RP(f, \Lambda)$



$$f = p_1^2 - q_1^4 + p_2 q_1^2,$$

$$K = p_2$$

росток слоения типа
«гиперболическое
удвоение периода»



$$f = p_1^2 + q_1^4 - p_2 q_1^2,$$

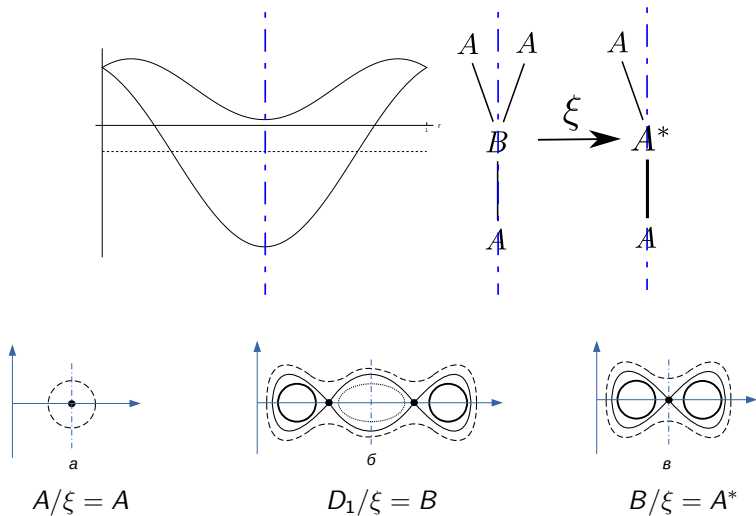
$$K = p_2$$

росток слоения типа
«эллиптическое
удвоение периода»

Цветаи отмечены:

критические точки ранга 0, **эллиптические критические траектории** (в $\mathcal{F}^{-1}$), **гиперболические критические траектории** (в $\mathcal{F}^{-1}$), **эллиптическое удвоение периода** (в окрестности $\mathcal{F}^{-1}$), гиперболическое удвоение периода (в окрестности $\mathcal{F}^{-1}$)

Построение системы $RP(f, \Lambda)$



Ограничение ξ на плоскость (r, p_r) : $(r, p_r) \rightarrow (L - r, -p_r)$ (центральная симметрия относительно точки $(L/2, 0)$)

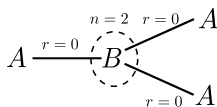
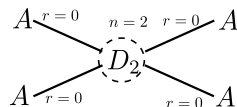
Теорема (Описание слоения Лиувилля системы $RP(f, \Lambda)$)

1. Если в задаче $RP(f, \Lambda)$ $k(r)$, $r \in I$ — функция Морса и $h > 0$ отлично от значений h в точках возврата кривой γ_1 , то $K|_{Q_h^3}$ — функция Ботта;
- 1) граф Фоменко функции Ботта $K|_{Q_h^3}$ является деревом, в концевых вершинах которого стоят 3-атомы A , а в других вершинах — седловые 3-атомы $V_{\eta_1 \dots \eta_s}, V_{\eta_1 \dots \eta_s}^*$;
- 2) если граф Фоменко отличен от $A - A$, то топологический инвариант Фоменко–Цишанга слоения Лиувилля на изоэнергетическом многообразии Q_h^3 (с ориентацией гиперболических орбит, заданной потоком $\text{sgrad } K$) задается этим графом Фоменко с со следующими метками:
- $r = 1/2, \varepsilon = 1$, если ребро соединяет центральный атом A и центральный седловой атом V ;
 - $r = 0, \varepsilon = 1$, если ребро соединяет нецентральный атом A и седловой атом V (центральный или нецентральный);
 - $r = \infty, \varepsilon = 1$, если ребро соединяет два седловых атома (центральных или нецентральных);
- 3) все седловые атомы образуют единственную семью с меткой $p = 0$ или $p = -2$, в зависимости от ориентации Q_h^3 ;
- 4) если граф Фоменко имеет вид $A - A$, то метки на единственном ребре $r = 1/4, \varepsilon = 1$.

Примеры инвариантов, реализуемых системой $S(f, \Lambda)$

(ε -метки везде равны +1)

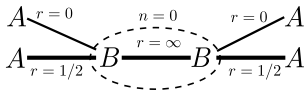
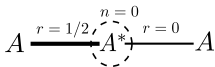
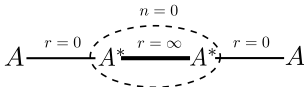
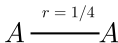
$A \xrightarrow{r=1/2} A$
случай Лагранжа



случай Жуковского

Примеры инвариантов, реализуемых системой $RP(f, \Lambda)$

(ε -метки везде равны +1)



Спасибо за внимание!