Некоторые экзотические свойства топологических пространств и соответствующих C^*-алгебр

Д. В. Фуфаев

Вторая конференция Математических центров России

07.11.2022 г.

Определение. C^*-алгебра $\mathcal{A}$ — это банахово пространство с заданными операциями умножения ($\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$) и инволюции ($\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $a \to a^*$), для которых выполняются следующие свойства:

1) $||a \cdot b|| \leq ||a|| \cdot ||b||$ (мультипликативное неравенство)
2) $(a^*)^* = a$
3) $(a + b^*) = a^* + b^*$
4) $(ab)^* = b^* a^*$
5) $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$
6) $||a^* a|| = ||a||^2$ (C^*-тождество)

для любых $a, b \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Определение. C^*-алгебра $\mathcal{A}$ — это банахово пространство с заданными операциями умножения ($\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$) и инволюции ($\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $a \to a^*$), для которых выполняются следующие свойства:

1) $||a \cdot b|| \leq ||a|| \cdot ||b||$ (мультипликативное неравенство)
2) $(a^*)^* = a$
3) $(a + b^*) = a^* + b^*$
4) $(ab)^* = b^* a^*$
5) $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$
6) $||a^* a|| = ||a||^2$ (C^*-тождество)

для любых $a, b \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Пример 1. Пусть K — локально компактное хаусдорфово пространство. $C_0(K) = \{f \in C(K), \forall \varepsilon > 0 \; \exists K_\varepsilon \subset K -$ компакт, т.ч.$|f(t)| < \varepsilon \; \forall t \in K \setminus K_\varepsilon\}$ — пространство функций, убывающих на бесконечности. Инволюция — комплексное сопряжение.
Пример 2. Пусть H — гильбертово пространство, $\mathcal{A} \subset B(H)$ — замкнутая по норме подалгебра. Инволюция — переход к сопряженному оператору.

Определение. C^*-алгебра $\mathcal{A}$ — это банахово пространство с заданными операциями умножения ($\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$) и инволюции ($\mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $a \to a^*$), для которых выполняются следующие свойства:

1) $||a \cdot b|| \leq ||a|| \cdot ||b||$ (мультипликативное неравенство)
2) $(a^*)^* = a$
3) $(a + b^*) = a^* + b^*$
4) $(ab)^* = b^* a^*$
5) $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$
6) $||a^* a|| = ||a||^2$ (C^*-тождество)

для любых $a, b \in \mathcal{A}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

Пример 1. Пусть K — локально компактное хаусдорфово пространство. $C_0(K) = \{f \in C(K), \forall \varepsilon > 0\ \exists K_\varepsilon \subset K$ – компакт, т.ч.$|f(t)| < \varepsilon\ \forall t \in K \setminus K_\varepsilon\}$ — пространство функций, убывающих на бесконечности. Инволюция — комплексное сопряжение.
Пример 2. Пусть H — гильбертово пространство, $\mathcal{A} \subset B(H)$ — замкнутая по норме подалгебра. Инволюция — переход к сопряженному оператору.

Теорема. (Гельфанд, Наймарк) Всякая C^*-алгебра инволютивно изометрически изоморфна алгебре из примера 1 или 2.

Определение. Предгильбертов C^*-модуль $\mathcal{N}$ — это векторное пространство, снабженное структурой правого модуля над C^*-алгеброй $\mathcal{A}$, вместе с внутренним умножением $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{A}$ со следующими свойствами:

1) $\langle x, ya \rangle = \langle x, y \rangle a$
2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$
3) $\langle x, x \rangle \geq 0$
4) $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

На предгильбертовом модуле определена норма $||x||_{\mathcal{N}} = \sqrt{||\langle x, x \rangle||_{\mathcal{A}}}$. Если он полон по этой норме, то модуль называется гильбертовым.
При $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ получаем определение гильбертова пространства.

Определение. Предгильбертов C^*-модуль $\mathcal{N}$ — это векторное пространство, снабженное структурой правого модуля над C^*-алгеброй $\mathcal{A}$, вместе с внутренним умножением $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{A}$ со следующими свойствами:

1) $\langle x, ya \rangle = \langle x, y \rangle a$
2) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$
3) $\langle x, x \rangle \geq 0$
4) $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

На предгильбертовом модуле определена норма $||x||_{\mathcal{N}} = \sqrt{||\langle x, x \rangle||_{\mathcal{A}}}$. Если он полон по этой норме, то модуль называется гильбертовым.
При $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ получаем определение гильбертова пространства.

Пример 1. Любая C^*-алгебра $\mathcal{A}$ может быть наделена структурой гильбертова $\mathcal{A}$-модуля: внутреннее умножение определяется по формуле $\langle a, b \rangle = a^* b$.
(в коммутативном случае $\mathcal{A} \cong C_0(K)$, $\langle f, g \rangle(t) = \overline{f(t)} g(t)$)
Пример 2. Пусть $\{\mathcal{N}_i\}_i$ — семейство (возможно, несчетное) $\mathcal{A}$-модулей. Тогда определен модуль $\bigoplus_i \mathcal{N}_i = \{a = (a_i) : \sum\limits_i \langle a_i, a_i \rangle_{\mathcal{N}_i}$ сходится по норме в $\mathcal{A}\}$, с внутренним произведением $\langle a, b \rangle = \sum\limits_i \langle a_i, b_i \rangle_{\mathcal{N}_i}$.
В частности, $\ell_2(\mathcal{A}) = \bigoplus_i \mathcal{A}$ — стандартный $\mathcal{A}$-модуль.

Определение. Семейство $\{x_j\}_{j\in J}$ элементов модуля $\mathcal{N}$ называется **стандартным фреймом** в $\mathcal{N}$, если существуют положительные постоянные c_1, c_2, такие что для любого $x \in \mathcal{N}$ ряд $\sum_j \langle x, x_j\rangle\langle x_j, x\rangle$ сходится по норме в $\mathcal{A}$ и справедливо следующее неравенство:

$$c_1\langle x, x\rangle \leq \sum_j \langle x, x_j\rangle\langle x_j, x\rangle \leq c_2\langle x, x\rangle.$$

Определение. Семейство $\{x_j\}_{j\in J}$ элементов модуля $\mathcal{N}$ называется **стандартным фреймом** в $\mathcal{N}$, если существуют положительные постоянные c_1, c_2, такие что для любого $x \in \mathcal{N}$ ряд $\sum_j \langle x, x_j\rangle\langle x_j, x\rangle$ сходится по норме в $\mathcal{A}$ и справедливо следующее неравенство:

$$c_1\langle x, x\rangle \leq \sum_j \langle x, x_j\rangle\langle x_j, x\rangle \leq c_2\langle x, x\rangle.$$

Теорема (Франк, Ларсон). Гильбертов C^*-модуль $\mathcal{N}$ над унитальной C^*-алгеброй $\mathcal{A}$ можно представить в виде ортогонального прямого слагаемого в стандартном модуле некоторой мощности $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда в $\mathcal{N}$ существует стандартный фрейм.

Определение. Семейство $\{x_j\}_{j\in J}$ элементов модуля $\mathcal{N}$ называется **стандартным фреймом** в $\mathcal{N}$, если существуют положительные постоянные c_1, c_2, такие что для любого $x \in \mathcal{N}$ ряд $\sum_j \langle x, x_j\rangle\langle x_j, x\rangle$ сходится по норме в $\mathcal{A}$ и справедливо следующее неравенство:

$$c_1\langle x, x\rangle \leq \sum_j \langle x, x_j\rangle\langle x_j, x\rangle \leq c_2\langle x, x\rangle.$$

Теорема (Франк, Ларсон). Гильбертов C^*-модуль $\mathcal{N}$ над унитальной C^*-алгеброй $\mathcal{A}$ можно представить в виде ортогонального прямого слагаемого в стандартном модуле некоторой мощности $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда в $\mathcal{N}$ существует стандартный фрейм.

Следствие. Гильбертов C^*-модуль $\mathcal{N}$ над C^*-алгеброй $\mathcal{A}$ можно представить в виде ортогонального прямого слагаемого в стандартном модуле некоторой мощности над унитализованной алгеброй $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \dot{\mathcal{A}}$ тогда и только тогда, когда в $\mathcal{N}$ существует стандартный фрейм.
($\dot{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ в случае, если $\mathcal{A}$ — алгебра с единицей, и $\mathcal{A}$ с присоединенной единицей, если без);

Определение. Семейство $\{x_j\}_{j\in J}$ элементов модуля $\mathcal{N}$ называется **стандартным фреймом** в $\mathcal{N}$, если существуют положительные постоянные c_1, c_2, такие что для любого $x \in \mathcal{N}$ ряд $\sum\limits_j \langle x, x_j\rangle\langle x_j, x\rangle$ сходится по норме в $\mathcal{A}$ и справедливо следующее неравенство:

$$c_1\langle x, x\rangle \leq \sum_j \langle x, x_j\rangle\langle x_j, x\rangle \leq c_2\langle x, x\rangle.$$

Теорема (Франк, Ларсон). Гильбертов C^*-модуль $\mathcal{N}$ над унитальной C^*-алгеброй $\mathcal{A}$ можно представить в виде ортогонального прямого слагаемого в стандартном модуле некоторой мощности $\bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда в $\mathcal{N}$ существует стандартный фрейм.

Следствие. Гильбертов C^*-модуль $\mathcal{N}$ над C^*-алгеброй $\mathcal{A}$ можно представить в виде ортогонального прямого слагаемого в стандартном модуле некоторой мощности над унитализованной алгеброй $\bigoplus\limits_{\lambda\in\Lambda} \dot{\mathcal{A}}$ тогда и только тогда, когда в $\mathcal{N}$ существует стандартный фрейм.
($\dot{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ в случае, если $\mathcal{A}$ — алгебра с единицей, и $\mathcal{A}$ с присоединенной единицей, если без);

Вопрос 1. Для заданного Гильбертова C^*-модуля $\mathcal{N}$ существует ли стандартный фрейм?

Определение. Семейство $\{x_j\}_{j\in J}$ элементов из $\mathcal{N}$ называется **фреймом** в $\mathcal{N}$, если существуют положительные постоянные c_1, c_2 такие, что для любого $x \in \mathcal{N}$ ряд $\sum\limits_j \langle x, x_j\rangle\langle x_j, x\rangle$ сходится в ультраслабой топологии в универсальной обертывающей алгебре фон Неймана $\mathcal{A}''$ и справедливо следующее неравенство:

$$c_1\langle x, x\rangle \leq \sum_j \langle x, x_j\rangle\langle x_j, x\rangle \leq c_2\langle x, x\rangle.$$

Определение. Семейство $\{x_j\}_{j\in J}$ элементов из $\mathcal{N}$ называется **фреймом** в $\mathcal{N}$, если существуют положительные постоянные c_1, c_2 такие, что для любого $x \in \mathcal{N}$ ряд $\sum\limits_j \langle x, x_j\rangle\langle x_j, x\rangle$ сходится в ультраслабой топологии в универсальной обертывающей алгебре фон Неймана $\mathcal{A}''$ и справедливо следующее неравенство:

$$c_1\langle x, x\rangle \leq \sum_j \langle x, x_j\rangle\langle x_j, x\rangle \leq c_2\langle x, x\rangle.$$

Лемма. Семейство $\{x_j\}_{j\in J}$ элементов $\mathcal{N}$ является **фреймом** в $\mathcal{N}$ тогда и только тогда, когда существуют положительные постоянные c_1, c_2 такие, что для любого $x \in \mathcal{N}$ и любого состояния φ на $\mathcal{A}$ (т.е. положительного линейного функционала нормы 1) имеют место следующие неравенства:

$$c_1\varphi(\langle x, x\rangle) \leq \sum_j \varphi(\langle x, x_j\rangle\langle x_j, x\rangle) \leq c_2\varphi(\langle x, x\rangle)$$

Определение. Семейство $\{x_j\}_{j\in J}$ элементов из $\mathcal{N}$ называется **фреймом** в $\mathcal{N}$, если существуют положительные постоянные c_1, c_2 такие, что для любого $x \in \mathcal{N}$ ряд $\sum_j \langle x, x_j\rangle\langle x_j, x\rangle$ сходится в ультраслабой топологии в универсальной обертывающей алгебре фон Неймана $\mathcal{A}''$ и справедливо следующее неравенство:

$$c_1\langle x, x\rangle \leq \sum_j \langle x, x_j\rangle\langle x_j, x\rangle \leq c_2\langle x, x\rangle.$$

Лемма. Семейство $\{x_j\}_{j\in J}$ элементов $\mathcal{N}$ является **фреймом** в $\mathcal{N}$ тогда и только тогда, когда существуют положительные постоянные c_1, c_2 такие, что для любого $x \in \mathcal{N}$ и любого состояния φ на $\mathcal{A}$ (т.е. положительного линейного функционала нормы 1) имеют место следующие неравенства:

$$c_1\varphi(\langle x, x\rangle) \leq \sum_j \varphi(\langle x, x_j\rangle\langle x_j, x\rangle) \leq c_2\varphi(\langle x, x\rangle)$$

Вопрос 2. Для заданного Гильбертова C^*-модуля $\mathcal{N}$ существует ли фрейм?

Рассмотрим случай $C_0(K)$ как модуля над собой. Тогда наличие фрейма равносильно тому, что $C_0(K)$ можно представить как прямое слагаемое в стандартном модуле $\bigoplus_i \dot{C}_0(K)$.
$\dot{C}_0(K) \cong C(\alpha K)$, где $\alpha K = K \cup \{t_\infty\}$ — одноточечная компактификация K.

Классификация K — локально компактных хаусдорфовых пространств.

Классификация K — локально компактных хаусдорфовых пространств.

$\mathcal{K}_{\mathsf{I}}$ — σ-компактные пространства (т.е. пространства, которые можно покрыть счетным семейством компактных подмножеств);

Классификация K — локально компактных хаусдорфовых пространств.

$\mathcal{K}_{\mathbf{I}}$ — σ-компактные пространства (т.е. пространства, которые можно покрыть счетным семейством компактных подмножеств);
$\mathcal{K}_{\mathbf{II}}$ — не σ-компактные пространства, имеющие плотное σ-компактное подмножество;

Классификация K — локально компактных хаусдорфовых пространств.

$\mathcal{K}_{\mathrm{I}}$ — σ-компактные пространства (т.е. пространства, которые можно покрыть счетным семейством компактных подмножеств);
$\mathcal{K}_{\mathrm{II}}$ — не σ-компактные пространства, имеющие плотное σ-компактное подмножество;
$\mathcal{K}_{\mathrm{III}}$ — пространства, в которых ни одно σ-компактное подмножество не является плотным, т. е. дополнение к любому σ-компактному подмножеству имеет внутреннюю точку, но точка на бесконечности (в одноточечной компактификации) может не быть внутренней для дополнения; эквивалентно, существует σ-компактное не предкомпактное подмножество;

Классификация K — локально компактных хаусдорфовых пространств.

$\mathcal{K}_{\mathsf{I}}$ — σ-компактные пространства (т.е. пространства, которые можно покрыть счетным семейством компактных подмножеств);
$\mathcal{K}_{\mathsf{II}}$ — не σ-компактные пространства, имеющие плотное σ-компактное подмножество;
$\mathcal{K}_{\mathsf{III}}$ — пространства, в которых ни одно σ-компактное подмножество не является плотным, т. е. дополнение к любому σ-компактному подмножеству имеет внутреннюю точку, но точка на бесконечности (в одноточечной компактификации) может не быть внутренней для дополнения; эквивалентно, существует σ-компактное не предкомпактное подмножество;
$\mathcal{K}_{\mathsf{IV}}$ — пространства, в которых дополнение к любому σ-компактному подмножеству имеет внутреннюю точку, а (в одноточечной компактификации) бесконечно удаленная точка всегда является внутренней для дополнения; эквивалентно, каждое σ-компактное подмножество предкомпактно.

Примеры. $\mathcal{K}_{\mathbf{II}}$**.** (не σ-компактные пространства, имеющие плотное σ-компактное подмножество)

1. Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ с топологией рациональных последовательностей.

Примеры. $\mathcal{K}_{\mathbf{II}}$**.** (не σ-компактные пространства, имеющие плотное σ-компактное подмножество)

1. Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ с топологией рациональных последовательностей.

2. $\beta\mathbb{N} \setminus \{t'\}$, где $t' \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ — стоун-чеховская компактификация множества натуральных чисел без произвольный точки из нароста.

Примеры. $\mathcal{K}_{\mathbf{II}}$**.** (не σ-компактные пространства, имеющие плотное σ-компактное подмножество)

1. Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ с топологией рациональных последовательностей.

2. $\beta\mathbb{N} \setminus \{t'\}$, где $t' \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ — стоун-чеховская компактификация множества натуральных чисел без произвольный точки из нароста.

Пространства из 1. и 2. сепарабельны.

Примеры. $\mathcal{K}_{\mathbf{II}}$**.** (не σ-компактные пространства, имеющие плотное σ-компактное подмножество)

1. Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ с топологией рациональных последовательностей.

2. $\beta\mathbb{N} \setminus \{t'\}$, где $t' \in \beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ — стоун-чеховская компактификация множества натуральных чисел без произвольный точки из нароста.

Пространства из 1. и 2. сепарабельны.

3. $K = \alpha P \times [0, \omega_0] \setminus \{(p_\infty, \omega_0)\}$, где P — локально-компактное, не σ-компактное хаусдорфово пространство, $\alpha P = P \cup \{p_\infty\}$ — его одноточечная компактификация.
(например, $P = \Lambda$ — несчетное дискретное пространство или $[0, \omega_1)$).
Напомним, что $[0, \omega_0]$ — это пространство всех ординалов не больше первого бесконечного. $[0, \omega_0] \cong \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Примеры. $\mathcal{K}_{\mathbf{III}}$**.** (пространства, в которых ни одно σ-компактное подмножество не является плотным, т. е. дополнение к любому σ-компактному подмножеству имеет внутреннюю точку, но точка на бесконечности (в одноточечной компактификации) может не быть внутренней для дополнения; эквивалентно, существует σ-компактное не предкомпактное подмножество)

1. $K = \Lambda$ — несчетное дискретное пространство;
(более общо, $K = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$, где K_λ — локально-компактное пространство).

Примеры. $\mathcal{K}_{\mathrm{III}}$. (пространства, в которых ни одно σ-компактное подмножество не является плотным, т. е. дополнение к любому σ-компактному подмножеству имеет внутреннюю точку, но точка на бесконечности (в одноточечной компактификации) может не быть внутренней для дополнения; эквивалентно, существует σ-компактное не предкомпактное подмножество)

1. $K = \Lambda$ — несчетное дискретное пространство;
(более общо, $K = \bigsqcup\limits_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$, где K_λ — локально-компактное пространство).

2. $K = P_1 \sqcup P_2$, где $P_1 \in \mathcal{K}_{\mathrm{IV}}$ or $\mathcal{K}_{\mathrm{III}}$, $P_2 \in \mathcal{K}_{\mathrm{I}}$, $\mathcal{K}_{\mathrm{II}}$ or $\mathcal{K}_{\mathrm{III}}$.

Примеры. $\mathcal{K}_{\mathbf{IV}}$**.** (пространства, в которых дополнение к любому σ-компактному подмножеству имеет внутреннюю точку, а (в одноточечной компактификации) бесконечно удаленная точка всегда является внутренней для дополнения; эквивалентно, каждое σ-компактное подмножество предкомпактно.)

1. $K = [0, \omega_1)$, где ω_1 — первый несчетный ординал, т.е. K это пространство всех не более чем счетных ординалов с порядковой топологией.

Теорема. (Д.В. Фуфаев, 2022)

	Стандартный фрейм	Фрейм
$\mathcal{K}_{\mathrm{I}}$	Всегда да	Всегда да
$\mathcal{K}_{\mathrm{II}}$	Всегда нет	Пример да (для сепарабельных всегда нет)
$\mathcal{K}_{\mathrm{III}}$	Пример да, пример нет	Пример да, пример нет
$\mathcal{K}_{\mathrm{IV}}$	Всегда нет	Всегда нет

Теорема. (Д.В. Фуфаев, 2022)

	Стандартный фрейм	Фрейм
$\mathcal{K}_{\mathrm{I}}$	Всегда да	Всегда да
$\mathcal{K}_{\mathrm{II}}$	Всегда нет	Пример да (для сепарабельных всегда нет)
$\mathcal{K}_{\mathrm{III}}$	Пример да, пример нет	Пример да, пример нет
$\mathcal{K}_{\mathrm{IV}}$	Всегда нет	Всегда нет

Теорема. (Д.В. Фуфаев, 2022)

	Стандартный фрейм	Фрейм
$\mathcal{K}_{\mathrm{I}}$	Всегда да	Всегда да
$\mathcal{K}_{\mathrm{II}}$	Всегда нет	Пример да (для сепарабельных всегда нет)
$\mathcal{K}_{\mathrm{III}}$	Пример да, пример нет	Пример да, пример нет
$\mathcal{K}_{\mathrm{IV}}$	Всегда нет	Всегда нет

В частности, найдется $K \in \mathcal{K}_{\mathrm{II}}$ такое, что $C_0(K)$ не имеет стандартных фреймов, но имеет нестандартные фреймы.

Теорема. (Д.В. Фуфаев, 2022)

	Стандартный фрейм	Фрейм
$\mathcal{K}_{\mathrm{I}}$	Всегда да	Всегда да
$\mathcal{K}_{\mathrm{II}}$	Всегда нет	Пример да (для сепарабельных всегда нет)
$\mathcal{K}_{\mathrm{III}}$	Пример да, пример нет	Пример да, пример нет
$\mathcal{K}_{\mathrm{IV}}$	Всегда нет	Всегда нет

В частности, найдется $K \in \mathcal{K}_{\mathrm{II}}$ такое, что $C_0(K)$ не имеет стандартных фреймов, но имеет нестандартные фреймы.
А именно, $K = \alpha\Lambda \times [0, \omega_0] \setminus \{(p_\infty, \omega_0)\}$

[1] Д. В. Фуфаев, "Гильбертов C^*-модуль с экстремальными свойствами"// Функц. анализ и его прил., **56**:1 (2022), 94–105.
[2] D. V. Fufaev, "Topological and Frame Properties of Certain Pathological C^*-Algebras"// Russian Journal of Mathematical Physics, **29**:2 (2022), 170–182.

Спасибо за внимание!