SU-линейные операции в комплексных кобордизмах и теория c_1-сферических бордизмов

Черных Георгий Сергеевич

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Вторая конференция Математических центров России

7-11 ноября 2022

Комплексные бордизмы

Комплексные бордизмы

Стабильно комплексная структура на многообразии M:

$$TM \oplus \mathbb{R}^n \cong \xi - \text{комплексное расслоение}$$

Комплексные бордизмы

Стабильно комплексная структура на многообразии M:

$$TM \oplus \mathbb{R}^n \cong \xi - \text{комплексное расслоение}$$

(с точностью до прибавления $\mathbb{C}$).

Комплексные бордизмы

Стабильно комплексная структура на многообразии M:

$$TM \oplus \mathbb{R}^n \cong \xi - \text{комплексное расслоение}$$

(с точностью до прибавления $\mathbb{C}$).

X — топологическое пространство

$$MU_n(X) = \{f\colon M^n \to X,\ M^n - \text{ст. комплексное}\}/\sim$$

Комплексные бордизмы

Стабильно комплексная структура на многообразии M:

$$TM \oplus \mathbb{R}^n \cong \xi \text{ -- комплексное расслоение}$$

(с точностью до прибавления $\mathbb{C}$).

X — топологическое пространство

$$MU_n(X) = \{f \colon M^n \to X,\ M^n \text{ -- ст. комплексное}\}/\sim$$

$(f_1 \colon M_1^n \to X) \sim (f_2 \colon M_2^n \to X)$ (бордантны), если существует

$$F \colon W^{n+1} \to X, \text{ т. ч.}$$

$$\partial W^{n+1} = M_1^n \sqcup -M_2^n \quad \text{и} \quad F|_{M_i^n} = f_i.$$

Комплексные бордизмы

Тогда $MU_n(X)$ — абелева группа относительно дизъюнктного объединения.

Комплексные бордизмы

Тогда $MU_n(X)$ — абелева группа относительно дизъюнктного объединения.

И более того, $MU_*(-)$ образуют обобщённую теорию гомологий — теорию комплексных бордизмов.

Двойственная теория когомологий — теория комплексных кобордизмов $MU^*(-)$.

Эти теории мультипликативны.

Комплексные бордизмы

Тогда $MU_n(X)$ — абелева группа относительно дизъюнктного объединения.

И более того, $MU_*(-)$ образуют обобщённую теорию гомологий — теорию комплексных бордизмов.

Двойственная теория когомологий — теория комплексных кобордизмов $MU^*(-)$.

Эти теории мультипликативны.

Кольцо коэффициентов $MU_*(pt) = \Omega_*^U$ — это просто множество стабильно комплексных многообразий с точностью до бордизма. Кольцевая операция на коэффициентах соответствует декартову произведению многообразий.

SU-бордизмы

SU-структура многообразии M — это стабильно комплексная структура с редукцией структурной группы к $SU(N)$.

SU-бордизмы

SU-структура многообразии M — это стабильно комплексная структура с редукцией структурной группы к $SU(N)$.

Равносильно — тривиализация одномерного комплексного расслоения $\det TM$.

SU-бордизмы

SU-структура многообразии M — это стабильно комплексная структура с редукцией структурной группы к $SU(N)$.

Равносильно — тривиализация одномерного комплексного расслоения $\det TM$.

Аналогично определяются мультипликативные теории (ко)гомологий $MSU_*(-)$ и $MSU^*(-)$ — теории SU-(ко)бордизмов.

SU-бордизмы

SU-структура многообразии M — это стабильно комплексная структура с редукцией структурной группы к $SU(N)$.

Равносильно — тривиализация одномерного комплексного расслоения $\det TM$.

Аналогично определяются мультипликативные теории (ко)гомологий $MSU_*(-)$ и $MSU^*(-)$ — теории SU-(ко)бордизмов.

Имеется естественное (забывающее) мультипликативное отображение $MSU^* \to MU^*$. Таким образом теория MU^* становится модулем над теорией MSU^*.

SU-линейные операции

Вопрос

Как устроены SU-линейные когомологические операции $f\colon MU^* \to MU^*$*?*

SU-линейные операции

Вопрос

Как устроены SU-линейные когомологические операции $f\colon MU^* \to MU^*$?

Можно проверить, что SU-линейность операции f равносильна SU-линейности её действия на коэффициентах $f_*\colon \Omega_*^U \to \Omega_*^U$, то есть,

$$f_*([N \times M]) = [N]f_*([M]), \quad [N] \in \Omega_*^{SU}, [M] \in \Omega_*^U$$

SU-линейные операции

С. П. Новиков определил SU-линейные операции ∂_k, $k \geqslant 0$.

SU-линейные операции

С. П. Новиков определил SU-линейные операции ∂_k, $k \geqslant 0$.

На коэффициентах они действуют как $\partial_k([M]) = [N \subset M]$ — подмногообразие, двойственное к $(\det TM)^{\oplus k}$.

SU-линейные операции

С. П. Новиков определил SU-линейные операции ∂_k, $k \geqslant 0$.

На коэффициентах они действуют как $\partial_k([M]) = [N \subset M]$ — подмногообразие, двойственное к $(\det TM)^{\oplus k}$.

Теорема

Любая SU-линейная операция $f\colon MU^* \to MU^*$ единственным образом выражается в виде $\sum\limits_{k\geqslant 0} \alpha_k\partial_k$, $\alpha_k \in \Omega_U^*$.

SU-линейные операции

С. П. Новиков определил SU-линейные операции ∂_k, $k \geqslant 0$.

На коэффициентах они действуют как $\partial_k([M]) = [N \subset M]$ — подмногообразие, двойственное к $(\det TM)^{\oplus k}$.

Теорема

Любая SU-линейная операция $f\colon MU^* \to MU^*$ единственным образом выражается в виде $\sum\limits_{k \geqslant 0} \alpha_k \partial_k$, $\alpha_k \in \Omega_U^*$.

Теорема

Любая SU-полилинейная операция в комплексных кобордизмах имеет вид $\sum \alpha_{i_1,\ldots,i_k} \partial_{i_1} \cdot \ldots \cdot \partial_{i_k}$.

c_1-сферические бордизмы

c_1-сферические бордизмы

c_1-сферическая стабильно комплексная структура на M — это ст. комплексная структура + $\mathbb{C}P^1$-редукция детерминантного расслоения $\det TM$, то есть, отображение $f\colon M \to \mathbb{C}P^1$ т. ч. $\det TM \cong f^*(\eta)$.

c_1-сферические бордизмы

c_1-сферическая стабильно комплексная структура на M — это ст. комплексная структура + $\mathbb{C}P^1$-редукция детерминантного расслоения $\det TM$, то есть, отображение $f\colon M \to \mathbb{C}P^1$ т. ч. $\det TM \cong f^*(\eta)$.

Возникают теории c_1-сферических (ко)бордизмов $W_*(-)$ и $W^*(-)$.

c_1-сферические бордизмы

c_1-сферическая стабильно комплексная структура на M — это ст. комплексная структура + $\mathbb{C}P^1$-редукция детерминантного расслоения $\det TM$, то есть, отображение $f\colon M \to \mathbb{C}P^1$ т. ч. $\det TM \cong f^*(\eta)$.

Возникают теории c_1-сферических (ко)бордизмов $W_*(-)$ и $W^*(-)$.

Декартово произведение многообразий не индуцирует мультипликативную структуру на c_1-сферических (ко)бордизмах!

c_1-сферические бордизмы

c_1-сферическая стабильно комплексная структура на M — это ст. комплексная структура + $\mathbb{C}P^1$-редукция детерминантного расслоения $\det TM$, то есть, отображение $f\colon M \to \mathbb{C}P^1$ т. ч. $\det TM \cong f^*(\eta)$.

Возникают теории c_1-сферических (ко)бордизмов $W_*(-)$ и $W^*(-)$.

Декартово произведение многообразий не индуцирует мультипликативную структуру на c_1-сферических (ко)бордизмах!

Это промежуточная теория: $MSU_* \to W_* \to MU_*$.
W^* — тоже MSU^*-модуль (умножать на SU-многообразия можно).

c_1-сферические бордизмы

c_1-сферические бордизмы

$W^*(-)$ выделяется прямым слагаемым в $MU^*(-)$. Существуют проекторы $\pi\colon MU^* \to W^*$.

c_1-сферические бордизмы

$W^*(-)$ выделяется прямым слагаемым в $MU^*(-)$. Существуют проекторы $\pi\colon MU^* \to W^*$.

Например, проектор Стонга $\pi_0([M]) = [N \subset M \times \mathbb{C}P^1]$ — подмногообразие, двойственное к $\det TM \otimes \bar{\eta}$.

c_1-сферические бордизмы

$W^*(-)$ выделяется прямым слагаемым в $MU^*(-)$. Существуют проекторы $\pi\colon MU^* \to W^*$.

Например, проектор Стонга $\pi_0([M]) = [N \subset M \times \mathbb{C}P^1]$ — подмногообразие, двойственное к $\det TM \otimes \bar{\eta}$.

Проектор Стонга SU-линеен.

Любой SU-линейный проектор π задаёт на W^* SU-билинейное умножение

$$a *_\pi b = \pi(a \cdot b),$$

где $a \cdot b$ — умножение в MU^*.

Умножения

Для умножения $*$, задаваемого проектором Стонга, имеет место формула

$$a * b = a \cdot b + 2V \partial a \partial b,$$

где $\partial = \partial_1$, а $V = [\mathbb{C}P^1]^2 - [\mathbb{C}P^2]$.

Умножения

Для умножения $*$, задаваемого проектором Стонга, имеет место формула

$$a * b = a \cdot b + 2V\partial a\partial b,$$

где $\partial = \partial_1$, а $V = [\mathbb{C}P^1]^2 - [\mathbb{C}P^2]$.

Теорема

Любое SU-билинейное умножение на W^* имеет вид

$$a \cdot b + (2[V] + w)\partial a\partial b$$

для $w \in \Omega_4^W$. Все такие умножения ассоциативны и коммутативны. При этом из SU-линейных проекторов получаются в точности те умножения, для которых $w = 2\tilde{w}$, $\tilde{w} \in \Omega_4^W$.

Умножения

Теорема (Стонг)

Относительно умножения $*$ имеет место равенство

$$\Omega_*^W = \mathbb{Z}[x_1, x_3, x_4, \ldots], \quad |x_i| = 2i.$$

В качестве x_1 можно взять $[\mathbb{C}P^1]$.

Умножения

Теорема (Стонг)

Относительно умножения $*$ *имеет место равенство*

$$\Omega_*^W = \mathbb{Z}[x_1, x_3, x_4, \ldots], \quad |x_i| = 2i.$$

В качестве x_1 *можно взять* $[\mathbb{C}P^1]$*.*

В частности, $\Omega_4^W = \mathbb{Z}\langle[\mathbb{C}P^1] * [\mathbb{C}P^1]\rangle$.

Умножения

Следовательно, произвольное SU-билинейное умножение на W^* имеет вид

$$a *_k b = a \cdot b + (2[V] + k[\mathbb{C}P^1] * [\mathbb{C}P^1])\partial a \partial b, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Умножения

Следовательно, произвольное SU-билинейное умножение на W^* имеет вид

$$a *_k b = a \cdot b + (2[V] + k[\mathbb{C}P^1] * [\mathbb{C}P^1])\partial a \partial b, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Теорема

Относительно умножения $*_k$ имеет место равенство

$$\Omega_*^W[1/2] = \mathbb{Z}[1/2][x_1, y_2, y_3 \ldots]/(x_1 *_k x_1 = (4k+1)y_2),$$

$$|x_1| = 2, \ |y_i| = 2i.$$

Комплексные ориентации

Комплексные ориентации

Теория W^* комплексно-ориентированная, т. е. для всех комплексных расслоений в W^* существует класс Тома.
Тогда, например, в теории W^* определены классы Чженя c_i^W.

Комплексные ориентации

Теория W^* комплексно-ориентированная, т. е. для всех комплексных расслоений в W^* существует класс Тома.
Тогда, например, в теории W^* определены классы Чженя c_i^W.

Комплексная ориентация определяется выбором первого класса Чженя для одномерного универсального расслоения: $c_1^W(\bar{\eta}) = w \in \widetilde{W}^2(\mathbb{C}P^\infty)$.

Комплексные ориентации

Теория W^* комплексно-ориентированная, т. е. для всех комплексных расслоений в W^* существует класс Тома.
Тогда, например, в теории W^* определены классы Чженя c_i^W.

Комплексная ориентация определяется выбором первого класса Чженя для одномерного универсального расслоения: $c_1^W(\bar{\eta}) = w \in \widetilde{W}^2(\mathbb{C}P^\infty)$.

Фиксируем такой элемент и умножение

$$a *_k b = ab + Q_k \partial a \partial b,$$

$$Q_k = 2V + k[\mathbb{C}P^1] * [\mathbb{C}P^1]$$

В этом случае

$$W^*(\mathbb{C}P^\infty) = \Omega_W^*[[w]],$$

$$W^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) = \Omega_W^*[[w_1, w_2]].$$

В этом случае

$$W^*(\mathbb{C}P^\infty) = \Omega_W^*[[w]],$$

$$W^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) = \Omega_W^*[[w_1, w_2]].$$

Тогда $c_1^W(\eta_1 \otimes \eta_2) = F_W(c_1^W(\eta_1), c_1^W(\eta_1))$, где $F_W \in \Omega_W^*[[w_1, w_2]]$ — формальная группа, т.е.

Комплексные ориентации

В этом случае

$$W^*(\mathbb{C}P^\infty) = \Omega^*_W[[w]],$$

$$W^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) = \Omega^*_W[[w_1, w_2]].$$

Тогда $c_1^W(\eta_1 \otimes \eta_2) = F_W(c_1^W(\eta_1), c_1^W(\eta_1))$, где $F_W \in \Omega^*_W[[w_1, w_2]]$ — формальная группа, т.е.

$$F_W(w, 0) = F_W(0, w) = w$$

$$F_W(w_1, F_W(w_2, w_3)) = F_W(F_W(w_1, w_2), w_3)$$

$$F(w_2, w_1) = F_W(w_1, w_2)$$

Формальные группы

Рассмотрим мультипликативную теорию когомологий

$$\Gamma^* = MU^*[t]/(t^2 = -[\mathbb{C}P^1]t + Q_k)$$

Формальные группы

Рассмотрим мультипликативную теорию когомологий

$$\Gamma^* = MU^*[t]/(t^2 = -[\mathbb{C}P^1]t + Q_k)$$

и преобразование $\varphi\colon W^* \to \Gamma^*$, $x \mapsto x + t\partial x$.

Формальные группы

Рассмотрим мультипликативную теорию когомологий

$$\Gamma^* = MU^*[t]/(t^2 = -[\mathbb{C}P^1]t + Q_k)$$

и преобразование $\varphi\colon W^* \to \Gamma^*$, $x \mapsto x + t\partial x$.

Теорема (В. М. Бухштабер)

Преобразование φ мультипликативно и

$$\varphi_* F_W(w_1, w_2) = \gamma F(\gamma^{-1}(w_1), \gamma^{-1}(w_2)),$$

где $F(u,v)$ — формальная группа в комплексных кобордизмах, $\gamma(u) \in \Gamma^*[[u]]$ — ряд, выражающий ориентацию $\varphi(w)$ через каноническую ориентацию $u \in MU^2(\mathbb{C}P^\infty) \subset \Gamma^2(\mathbb{C}P^\infty)$.

Формальные группы

Теорема

Ни для какой комплексной ориентации W^* и ни для какого умножения $*_k$ коэффициенты формальной группы F_W не порождают всё кольцо $(\Omega^*_W, *_k)$.

Формальные группы

Теорема

Ни для какой комплексной ориентации W^* *и ни для какого умножения* $*_k$ *коэффициенты формальной группы* F_W *не порождают всё кольцо* $(\Omega^*_W, *_k)$.

Теорема

После обращения 2 для любого умножения $*_k$ *существует комплексная ориентация* W^* *такая, что коэффициенты формальной группы* F_W *порождают всё кольцо* $(\Omega^*_W[1/2], *_k)$.

Точность по Ландвеберу

Теорема (Квиллен)

Для любой формальной группы F_R над кольцом R существует единственный гомоморфизм $\psi\colon \Omega_U^* \to R$ такой, что $\psi_*(F) = F_R$.

Точность по Ландвеберу

Теорема (Квиллен)

Для любой формальной группы F_R над кольцом R существует единственный гомоморфизм $\psi\colon \Omega_U^* \to R$ такой, что $\psi_*(F) = F_R$.

Для формальной группы F_R определим по индукции формальные ряды $[0]_{F_R}(u) = 0$, $[n]_{F_R}(u) = F_R([n-1]_{F_R}(u), u)$.

Точность по Ландвеберу

Теорема (Квиллен)

Для любой формальной группы F_R над кольцом R существует единственный гомоморфизм $\psi\colon \Omega_U^* \to R$ такой, что $\psi_*(F) = F_R$.

Для формальной группы F_R определим по индукции формальные ряды $[0]_{F_R}(u) = 0$, $[n]_{F_R}(u) = F_R([n-1]_{F_R}(u), u)$.

Для простого числа p обозначим коэффициент при u^{p^n} в $[p]_{F_R}(u)$ через $v_{p,n}$.

Точность по Ландвеберу

Теорема (Ландвебер)

Если для любого простого p и для любого $n \geqslant 0$ умножение на $v_{p,n}$ инъективно в факторкольце $R/(p, v_{p,1}, \ldots, v_{p,n-1})$, то функторы $MU^*(-) \otimes_{\Omega_U^*} R$ составляют теорию когомологий.

Точность по Ландвеберу

Теорема (Ландвебер)

Если для любого простого p и для любого $n \geqslant 0$ умножение на $v_{p,n}$ инъективно в факторкольце $R/(p, v_{p,1}, \ldots, v_{p,n-1})$, то функторы $MU^*(-) \otimes_{\Omega_U^*} R$ составляют теорию когомологий.

Такие формальные группы называют точными по Ландвеберу.

Точность по Ландвеберу

Теорема (Ландвебер)

Если для любого простого p и для любого $n \geqslant 0$ умножение на $v_{p,n}$ инъективно в факторкольце $R/(p, v_{p,1}, \ldots, v_{p,n-1})$, то функторы $MU^*(-) \otimes_{\Omega_U^*} R$ составляют теорию когомологий.

Такие формальные группы называют точными по Ландвеберу.

Следствие

Если формальная группа, соответствующая комплексно-ориентированной теории когомологий h^*, точна по Ландвеберу, то $h^*(-) \cong MU^*(-) \otimes_{\Omega_U^*} h^*(pt)$.

Точность по Ландвеберу

Теорема

Для любого умножения $*_k$ *формальная группа* F_W *точна по Ландвеберу. В частности,* $(W^*(-), *_k) = MU^*(-) \otimes_{\Omega_U^*} (\Omega_W^*, *_k)$.

Спасибо за внимание!