Ответ на вопрос J.W. Cannon – S.G. Wayment (1970)

Ольга Фролкина
МГУ имени М.В.Ломоносова
Московский центр фундаментальной и прикладной математики

9 ноября 2022 г.
Вторая конференция Математических центров России
(7–11 ноября 2022 г., МГУ, МИАН, г. Москва)

Два вопроса

Пусть компакт $X \subset \mathbb{R}^N$. Существует ли несчетное семейство $\{X_\alpha\}$ попарно непересекающихся компактов с условием:

(A) гомеоморфность $X_\alpha \cong X$;

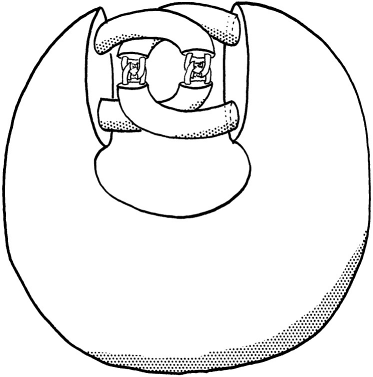
(B) эквивалентность = эквивалентно-вложенность = объемлемо-гомеоморфность $(\mathbb{R}^N, X_\alpha) \cong (\mathbb{R}^N, X)$.

Примеры

(A1) Нет, если $X \subset \mathbb{R}^2$ — триод (R.L. Moore 1928).

(A2) Нет, если $X \subset \mathbb{R}^3$ — лист Мебиуса
(В.В.Грушин–В.П.Паламодов 1962 для полиэдральных листов,
О.Д.Фролкина 2018 для произвольных листов.
Общий многомерный случай — С.А.Мелихов 2018.)

(B1) $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$
Всякое множество попарно непересекающихся *диких* замкнутых поверхностей в $\mathbb{R}^3$ не более чем счетно (R.H. Bing 1957–1961).



ALEXANDER'S HORNED SPHERE

Определение

Подмножество $X \subset \mathbb{R}^N$, гомеоморфное $(N-1)$-сфере, называется *плоским*, если оно объемлемо гомеоморфно стандартной единичной сфере, и *диким* в противном случае.

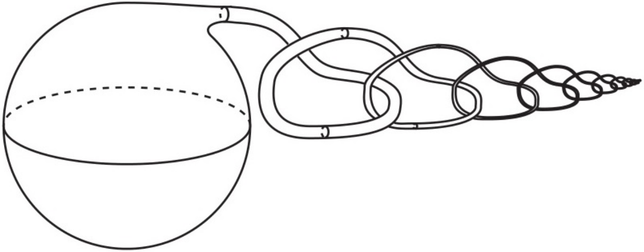


Figure 2.24. The Fox-Artin 2-sphere

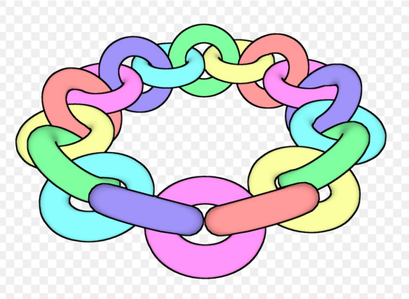
(B2) $S^{N-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$
При $N \geqslant 5$ всякое множество попарно непересекающихся *диких* $(N-1)$-сфер в $\mathbb{R}^N$ не более чем счетно
(J.L.Bryant 1968 + А.В.Чернавский 1973, R.J.Daverman 1973).

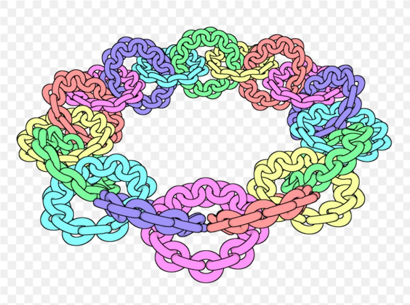
(B3) Нет, если $X \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 4$ — дикое канторово множество В.Крушкаля 2016 (О.Д.Фролкина 2022).

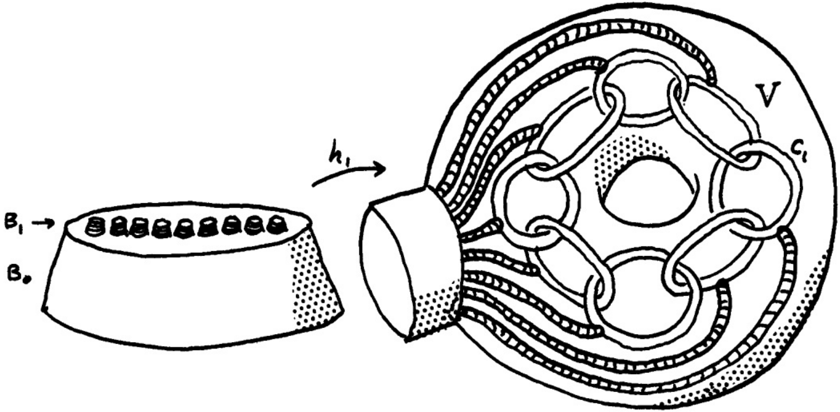
Определение

Нульмерный компакт $X \subset \mathbb{R}^n$ называется *ручным*, если существует такой гомеоморфизм $h : \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n$, что $h(X)$ содержится в прямой; иначе X называется *диким*.

Дикие канторовы множества в $\mathbb{R}^N$ существуют при всех $N \geqslant 3$.
$N = 2$ — только ручные (теорема Л.Антуана).






B_1
B_0
h_1
V
C_1

Определение

Последовательность множеств $X_1, X_2, \ldots \subset \mathbb{R}^N$ сходится гомеоморфно к множеству $X_0 \subset \mathbb{R}^N$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое целое число n, что $i \geqslant n$ влечет существование гомеоморфизма $h_i : X_0 \cong X_i$, перемещающего каждую точку не более, чем на ε.

Для любого непустого компакта $\mathfrak{X}$ пространство $Emb(\mathfrak{X}, \mathbb{R}^N)$ вложений $\mathfrak{X} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$ с метрикой $\rho(f, g) = \sup\{d(fx, gx) \mid x \in \mathfrak{X}\}$ является сепарабельным.

Следствие (известное):

Пусть $\mathcal{F}$ — несчетное семейство попарно непересекающихся гомеоморфных копий компакта $\mathfrak{X}$ в $\mathbb{R}^N$; тогда существует такая последовательность $X_0, X_1, X_2, \ldots \in \mathcal{F}$, что $X_i \neq X_0$ (значит, $X_i \cap X_0 = \emptyset$) для каждого $i > 0$, и $\{X_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ сходится гомеоморфно к X_0.

В 1970 году J.W. Cannon, S.G. Wayment поставили вопрос:

Предположим, что $X_0, X_1, X_2, \ldots \subset \mathbb{R}^N$ — последовательность попарно непересекающихся континуумов, гомеоморфно сходящихся к X_0.
Верно ли, что существует несчетное семейство попарно непересекающихся гомеоморфных копий X_0 в $\mathbb{R}^N$?

Этот вопрос открыт. Cannon–Wayment получили положительный ответ при дополнительном предположении: $X_0, X_1, X_2, \ldots$ вложены в $\mathbb{R}^N$ эквивалентно друг другу.

Определение

Два подмножества $X, X' \subset \mathbb{R}^N$ *объемлемо гомеоморфны* (или *эквивалентно вложены*), если существует такой гомеоморфизм h пространства $\mathbb{R}^N$ на себя, что $h(X) = X'$. Пишем $h : (\mathbb{R}^N, X) \cong (\mathbb{R}^N, X')$.

Но даже при таком предположении *не всегда удается найти искомое несчетное семейство так, чтобы все его элементы были вложены эквивалентно пределу* $X_0 \subset \mathbb{R}^N$. Это подтверждается примерами.

Для $N = 2$, см. R.H. Bing (1951) или J.H. Roberts (1930); пространства X_0 имеют довольно сложную структуру.

Для $N = 3$ или $N \geqslant 5$, Cannon и Wayment построили последовательность $X_0, X_1, X_2, \ldots$ попарно непересекающихся диких $(N-1)$-сфер в $\mathbb{R}^N$ так, что: $\{X_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ сходится гомеоморфно к X_0; $(\mathbb{R}^N, X_i) \cong (\mathbb{R}^N, X_0)$ для каждого i; но нет возможности найти несчетное множество попарно непересекающихся $(N-1)$-сфер в $\mathbb{R}^N$, каждая из которых вложена эквивалентно X_0.

Случай $N = 4$ не покрыт примерами J.W. Cannon and S.G. Wayment.

Для $N \geqslant 4$ мы строим новые серии вложений:
✓ для $(N-1)$-сфер;
✓ для более широкого класса компактов положительной размерности;
✓ и для канторовых множеств.

В доказательствах мы не используем сложные результаты Р.Бинга (1957-1961), Дж.Брайента (1968), А.В.Чернавского (1973) и Р.Давермана (1973).
Вместо этого применяем дикие канторовы множества В.Крушкаля.

Теорема (Ф., 2022)

Для каждого $N \geqslant 4$ существует такая последовательность попарно непересекающихся диких $(N-1)$-сфер $\Sigma, X_1, X_2, \ldots \subset \mathbb{R}^N$, что
1) $\{X_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ гомеоморфно сходится к Σ;
2) $(\mathbb{R}^N, X_i) \cong (\mathbb{R}^N, \Sigma)$ для каждого $i \in \mathbb{N}$; и
3) любое дизъюнктное семейство $\{Y_\alpha \subset \mathbb{R}^N\}$, в котором $(\mathbb{R}^N, Y_\alpha) \cong (\mathbb{R}^N, \Sigma)$ для каждого α, содержит не более чем счетное число элементов.

Случай более общих компактов положительной размерности рассмотрен в препринте arXiv:2204.02457
Случай канторовых множеств также интересен. Имеем

Теорема (Ф., 2022)

Для каждого $N \geqslant 4$ существует такая последовательность попарно непересекающихся диких канторовых множеств $X, X_1, X_2, \ldots \subset \mathbb{R}^N$, что
1) $\{X_i, i \in \mathbb{N}\}$ сходится гомеоморфно к X;
2) $(\mathbb{R}^N, X_i) \cong (\mathbb{R}^N, X)$ для каждого $i \in \mathbb{N}$; и
3) любое дизъюнктное семейство канторовых множеств $Y_\alpha \subset \mathbb{R}^N$, в котором $(\mathbb{R}^N, Y_\alpha) \cong (\mathbb{R}^N, X)$ для каждого α, не более чем счетно.

Спасибо за внимание!