Устойчивость решения проблемы Ферма-Штейнера в гиперпространствах над конечномерными нормированными пространствами

Галстян Арсен Хачатурович,
аспирант (мехмат, каф. ДГиП)

Научный руководитель:
д-р физ.-мат. наук, проф. Тужилин Алексей Августинович

МГУ
2022

Всюду далее X — это конечномерное нормированное пространство и $\mathcal{H}(X)$ — пространство всех непустых компактных подмножеств пространства X, наделённое метрикой Хаусдорфа d_H.
Пусть $x \in X$, тогда

$$B_r(x) := \{a : |ax| \le r\}.$$

Пусть $A \in \mathcal{H}(X)$, тогда

$$B_r(A) := \bigcup_{a \in A} B_r(a).$$

Пусть $A, B \in \mathcal{H}(X)$, тогда по определению

$$d_H(A, B) = \min\{r : A \subset B_r(B), B \subset B_r(A)\}.$$

Задача (проблема Ферма–Штейнера в $\mathcal{H}(X)$): Пусть дан конечный набор компактов $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{H}(X)$. Требуется найти все компакты K, реализующие минимум функции

$$S_{\mathcal{A}}(K) = \sum_{i=1}^{n} d_H(K, A_i).$$

Множество решений обозначается через $\Sigma(\mathcal{A})$. Известно, что $\Sigma(\mathcal{A})$ разбивается на попарно непересекающиеся классы $\Sigma_d(\mathcal{A})$, каждый из которых соответствует своему вектору расстояний по Хаусдорфу

$$d = (d_1, \ldots, d_n),$$

где d_i — это расстояние Хаусдорфа от A_i до любого компакта из $\Sigma_d(\mathcal{A})$. Каждый класс решений $\Sigma_d(\mathcal{A})$ содержит в себе единственный максимальный по включению компакт K_d и некоторое количество минимальных по включению компактов K_λ.

Утверждение (Иванов А.О., Тропин А.М., Тужилин А.А.)

(*i*) *В ограниченно компактном пространстве* Y *для* $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\} \subset \mathcal{H}(Y)$ *верно*

$$\Sigma(\mathcal{A}) \neq \emptyset.$$

(*ii*) $K \in \Sigma_d(\mathcal{A})$ *тогда и только тогда, когда*

$$K_\lambda \subset K \subset K_d$$

для некоторого минимального компакта $K_\lambda \in \Sigma_d(\mathcal{A})$ *и максимального компакта* $K_d \in \Sigma_d(\mathcal{A})$.

(*iii*) *Если* K_d *— максимальный компакт в* $\Sigma_d(\mathcal{A})$, *то* $K_d = \bigcap_{i=1}^{n} B_{d_i}(A_i)$.

Вопрос устойчивости

Введём отображение $\mathrm{Conv} : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$, которое каждому элементу $\mathcal{H}(X)$ ставит в соответствие его выпуклую оболочку.
Положим
$$\mathcal{A}^{\mathrm{Conv}} := \{\mathrm{Conv}(A_1), \ldots, \mathrm{Conv}(A_n)\}.$$

Решение называется **устойчивым**, если
$$\min_{K \in \mathcal{H}(X)} S_{\mathcal{A}}(K) = \min_{K \in \mathcal{H}(X)} S_{\mathcal{A}^{\mathrm{Conv}}}(K).$$

Сохранение векторов решений

Положим $K_d^{\mathrm{Conv}} := \bigcap\limits_{i=1}^{n} B_{d_i}\big(\mathrm{Conv}(A_i)\big)$.

Утверждение (Галстян А.Х., Тужилин А.А.)

Для всех A_i верно

$$d_H(\mathrm{Conv}(A_i), K_d^{\mathrm{Conv}}) \le d_i,$$

где $d_i = d_H(A_i, K_d)$.

Сохранение векторов решений

Следствие (Галстян А.Х., Тужилин А.А.)

Если решение неустойчиво, то

$$\min_{K\in\mathcal{H}(X)} S_{\mathcal{A}}(K) > \min_{K\in\mathcal{H}(X)} S_{\mathcal{A}^{\mathrm{Conv}}}(K).$$

Следствие (Галстян А.Х., Тужилин А.А.)

Если решение для границы $\mathcal{A}=\{A_1,\dots,A_n\}$ устойчиво, то K_d^{Conv} является максимальным компактом Штейнера для $\mathcal{A}^{\mathrm{Conv}}$.

Определение точек сцепки

Пусть все элементы $\mathcal{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ конечны, то есть $A_i = \bigcup\limits_{j=1}^{m_i} \{a_j^i\}$.

Обозначим $B_{d_i}(a_j^i)$ через B_j^i.

Определение

Если $\#\left(B_j^i \cap K_d\right) < \infty$, то будем называть $B_j^i \cap K_d$ *множеством точек сцепки* K_d *с* B_j^i и обозначать его через $\mathrm{HP}_d(a_j^i)$.

Множество всех таких a_j^i, для которых $\#\left(B_j^i \cap K_d\right) < \infty$ обозначим через D. Введём обозначение

$$\mathrm{HP}_d(D) := \bigcup_{a_j^i \in D} \mathrm{HP}_d(a_j^i).$$

Теорема о существовании точек сцепки

Теорема (Галстян А.Х., Тужилин А.А.)

Для любого $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$, где все A_i конечны, существует такая $a_j^i \in A_i$, что $\mathrm{HP}_d(a_j^i) \neq \emptyset$.

Следствие (Галстян А.Х., Тужилин А.А.)

Для любого $K \in \Sigma_d(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ — набор конечных множеств, верно $\partial K_d \cap K \neq \emptyset$.

Достаточное условие неустойчивости

Пусть все элементы $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ конечны, все d_i положительны, $\mathrm{Int}\, K_d^{\mathrm{Conv}} \neq \emptyset$, а норма пространства X строго выпукла. Тогда справедлива

Теорема (Галстян А.Х., Тужилин А.А.)

Решение является неустойчивым, если существует компакт $A_s \in \mathcal{A}$ такой, что

$$\bigcup_{j=1}^{m_s} \partial B_j^s \cap \mathrm{HP}_d(D) \subset \mathrm{Int}\, K_d^{\mathrm{Conv}}.$$

Пример применения достаточного условия

В качестве примера возьмём конфигурацию из работы [1], где $A = \{A_1, A_2, A_3\} \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ и $A_i = \{a_i, b_i\}$ для всех i.

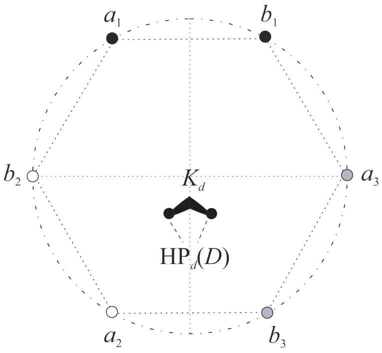

Рис.: Конфигурация из работы [1].

1. A. Kh. Galstyan, A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin, "*The Fermat–Steiner problem in the space of compact subsets of $\mathbb{R}^m$ endowed with the Hausdorff metric*", Sb. Math., 212:1 (2021), 25–56

Пример применения достаточного условия

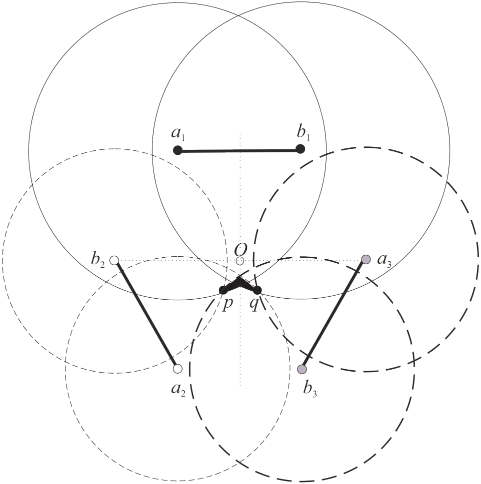

Рис.: Граница $\mathcal{A}^{\mathrm{Conv}}$ и окрестности $U_{d_1}(A_1), U_{d_2}(A_2), U_{d_3}(A_3)$.

Пример применения достаточного условия

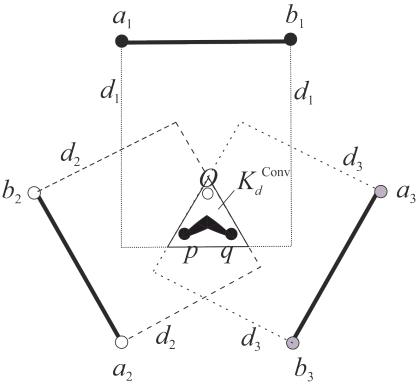

Рис.: $\mathrm{HP}_d(D) \subset \operatorname{Int} K_d^{\mathrm{Conv}}$.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!