Бесконечная серия компактных гиперболических 3-многообразий с вполне геодезическим краем и каспами и их минимальные триангуляции

Вторая конференция Математических центров России

Даниил Нигомедьянов

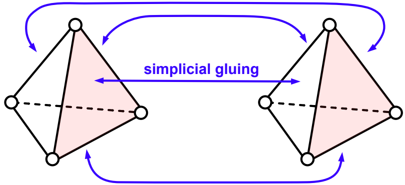
Международный матеметический институт им. Леонарда Эйлера

10 ноября, 2022

Идеальные триангуляции 3-многообразий с краем

$\mathcal{M} = \{$компактные связные 3-многообразия с непустым краем$\}$

$\mathscr{T} = \{$идеальные триангуляции$\}$



Минимальная триангуляция $=$ триангуляция данного многообразия с наименьшим числом тетраэдров

Триангуляционная сложность $c_\Delta(M) =$ число тетраэдров в минимальной триангуляции многообразия M

Точные значения c_Δ для табулированных многообразий

Вопрос: как найти триангуляционную сложность данного 3-многообразия?

Гиперболические многообразия с каспами

- $c_\Delta \leqslant 9$: полный список ориентируемых гиперболических многообразий (B. A. Burton, arXiv: 1405.2695);
- $c_\Delta \leqslant 25$: гиперболические многообразия, склеенные из правильных гиперболических идеальных тетраэдров (E. Fominykh, S. Garoufalidis, M. Goerner, V. Tarkaev, A. Vesnin, 2016).

Гиперболические многообразия с вполне геодезическим краем

- $c_\Delta = 2$: ровно 8 многообразий, минимальный объём (M. Fujii, 1990);
- $c_\Delta \leqslant 4$: 150 многообразий сложности 3, 5002 многообразий сложности 4 (R. Frigerio, B. Martelli, C. Petronio, 2004).

Нижняя оценка $c_\Delta(M)$ через $\mathbb{Z}_2$-гомологии

Теорема (Н.-Фоминых)

Пусть M — связное компактное 3-многообразие с непустым краем. Тогда

$$c_\Delta(M) \geqslant \beta_1(M, \mathbb{Z}_2).$$

Задача: Изучить многообразия, для которых достигается нижняя оценка триангуляционной сложности.

$$\mathcal{M}_h = \left\{ \begin{array}{c} \text{компактные связные 3-многообразия } M \text{ с непустым краем} \\ \text{обладающие идеальными триангуляциями с } \beta_1(M,\mathbb{Z}_2) \text{ тетраэдрами} \end{array} \right\}$$

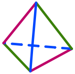
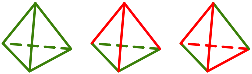
Идеальная триангуляция называется гомологически минимальной если она содержит в точности $\beta_1(M, \mathbb{Z}_2)$ тетраэдров.

Анатомия гомологически минимальных триангуляций

Ребро e идеальной трианг. $\mathcal{T}$ наз. **чётным** (соотв., **нечётным**) если каждая модельная грань $\mathcal{T}$ содержит чётное (соотв., нечётное) число прообразов e.

Лемма

$\mathcal{T}$ гомологически минимальна $\iff$ $\mathcal{T}$ содержит только чётные и нечётные рёбра

рёбра	**модельные тетраэдры**	**подклассы $\mathcal{M}_h$**
одно нечётное		$\mathcal{M}_o^1$
три нечётных		$\mathcal{M}_o^2$
одно нечётное и несколько чётных		$\mathcal{M}_e$

Три подкласса $\mathcal{M}_h$

$\mathcal{M}_o^1$ (Фриджерио–Мартелли–Петронио, 2003)
$\mathcal{M}_o^2$ (Фоминых–Малютин–Шумакова, 2021)

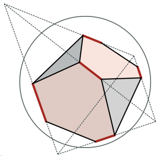
- гиперболичность
- ∂M связен
- асимптотика $\sim n^n$

Вопрос: Что можно сказать про подкласс $\mathcal{M}_e$?

Теорема (Н.-Фоминых)

Пусть M — 3-многообразие из $\mathcal{M}_e$. Если $c_\Delta(M) \geqslant 3$, то M является гиперболическим многообразием с вполне геодезическим краем и каспами.

M	$c_\Delta(M)$	$\chi(M)$	∂M
$L(4,1) \setminus B^3$	1	1	S^2
m001	2	0	T^2
m002	2	0	$T^2 \sqcup T^2$



Бесконечные серии многообразий из $\mathcal{M}_e$

$\{\mathcal{M}_{g,k}\}_{g \geqslant k > 0}$ (Фриджерио–Мартелли–Петронио, 2003).

$$\mathcal{M}_{g,k} = \left\{ \begin{array}{l} \text{компактные ориентируемые многообразия } M \text{ обладающие} \\ \text{идеальными триангуляциями с } g+k \text{ тетраэдрами и таких,} \\ \text{что } \partial M = \Sigma_g \sqcup \left(\bigsqcup_{i=1}^{k} T_i \right) \end{array} \right\}$$

Лемма

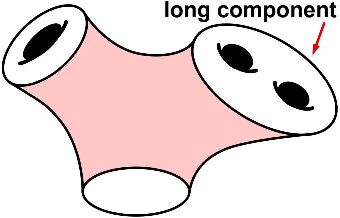
Имеется включение: $\mathcal{M}_e \supseteq \{\mathcal{M}_{g,k}\}_{g \geqslant k > 0}$.

Вопрос: Что можно сказать про $\mathcal{M}_e \setminus \{\mathcal{M}_{g,k}\}_{g \geqslant k > 0}$?

Край многообразий из $\mathcal{M}_e$

$\mathcal{F}$ = конечное множество связных замкнутых поверхностей.

$\Phi_0 \in \mathcal{F}$ называется длинной поверхностью если $\chi(\Phi_0) = \min_{\Phi \in \mathcal{F}}(\chi(\Phi))$.



Лемма

Пусть $M \in \mathcal{M}_e$ и $c_\Delta(M) \geqslant 3$. Тогда выполнены следующие утверждения:

1. $\chi(\Phi) \leqslant 0$ для каждой $\Phi \in \partial M$;
2. ∂M содержит единственную длинную 2-компоненту, обозначим её Φ_0;
3. $\chi(\Phi_0) \leqslant 4 - 2|\partial M| + 3\sum_{\Phi \in \partial M \setminus \{\Phi_0\}} \chi(\Phi)$.

Многообразия из $\mathcal{M}_e$ с заданным краем

Теорема 1

Пусть $\mathcal{F}$ — конечный набор связных замкнутых поверхностей таких, что $\chi(\Phi) \leqslant 0$ для каждой $\Phi \in \mathcal{F}$. Положим $a = 2 - |\mathcal{F}| + 3\sum_{\Phi\in\mathcal{F}} \chi(\Phi)$. Тогда для любого $b \in \mathbb{N}$ такого, что $b < a$ и $b \equiv_2 a$, существует замкнутая связная поверхность Φ_0 и многообразие $M \in \mathcal{M}_e$ такие, что $\partial M = \mathcal{F} \cup \{\Phi_0\}$ и $\chi(\Phi_0) = b$.

Теорема 2

Пусть $\mathcal{F}$ — конечный набор связных замкнутых ориентируемых поверхностей таких, что $\chi(\Phi) \leqslant 0$ для каждой $\Phi \in \mathcal{F}$. Тогда существует ориентируемая поверхность Φ_0 и ориентируемое $M \in \mathcal{M}_e$ такие, что $\partial M = \mathcal{F} \cup \{\Phi_0\}$.

Замечание: Φ_0 будет длинной компонентой ∂M.

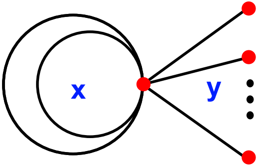
Идеи доказательства

Пусть $\mathcal{T}$ — идеальная триангуляция многообразия M.
Ассоциированным графом будем называть граф $\Gamma_{\mathcal{T}} = (V, E)$, где

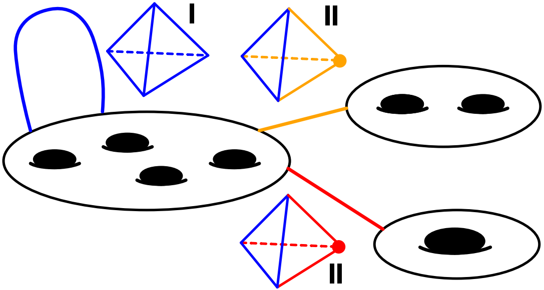
- $V = \{$компоненты $\partial M\}$;
- $E = \{$рёбра $\mathcal{T}\}$.

Лемма

Пусть $\mathcal{T}$ — гомологически миниальная триангуляция, тогда $\Gamma_{\mathcal{T}}$ изоморфен графу $G_{x,y}$ для некоторого $x \in \mathbb{N}$ и $y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.



Идеи доказательства



1. На коротких поверхностях выбираем триангуляции с одной вершиной;
2. выбор триангуляций задаёт склейку тетраэдров типа II между собой;
3. подбираем склейки тетраэдров по оставшимся граням.