Верхние оценки объемов гиперболических многогранников

Егоров Андрей Александрович
Новосибирский государственный университет

Вторая конференция Математических центров России

10 ноября 2022

Гипотеза о максимальном объеме для многогранников

Гипотеза о максимальном объеме Пусть $\Gamma \subset S^3$ это 3-связный планарный граф. Если r пробегает нечетные натуральные числа, то

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\pi}{r} \log(TV_r(\Gamma; e^{\frac{2\pi i}{r}})) = \sup vol(P)$$

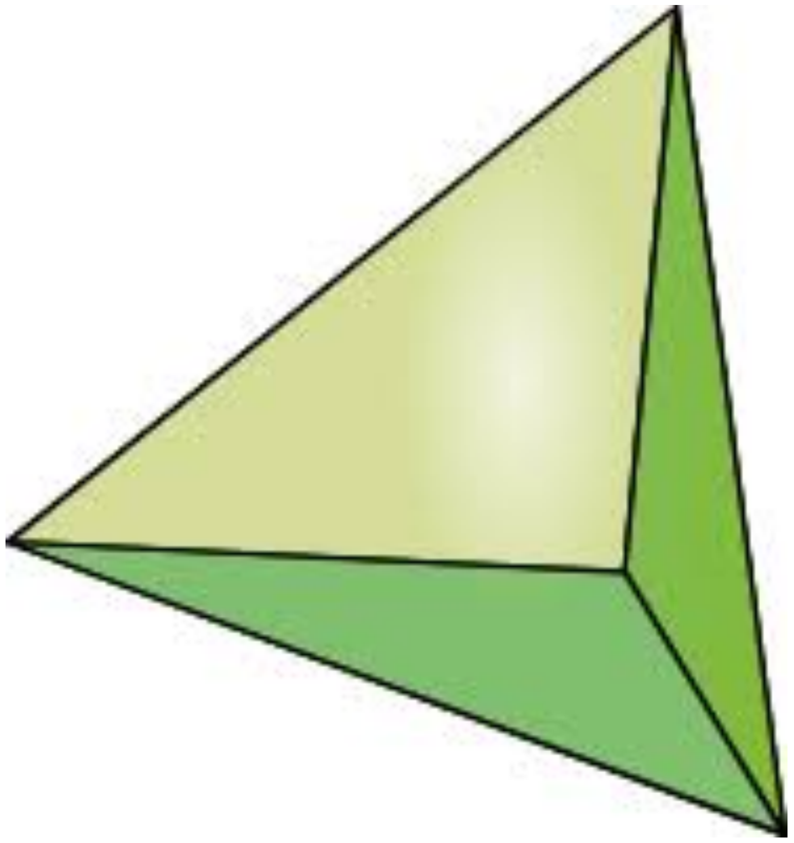
где P варьируется среди всех обобщенных гиперболических многогранников, для которых Γ является 1-скелетом.

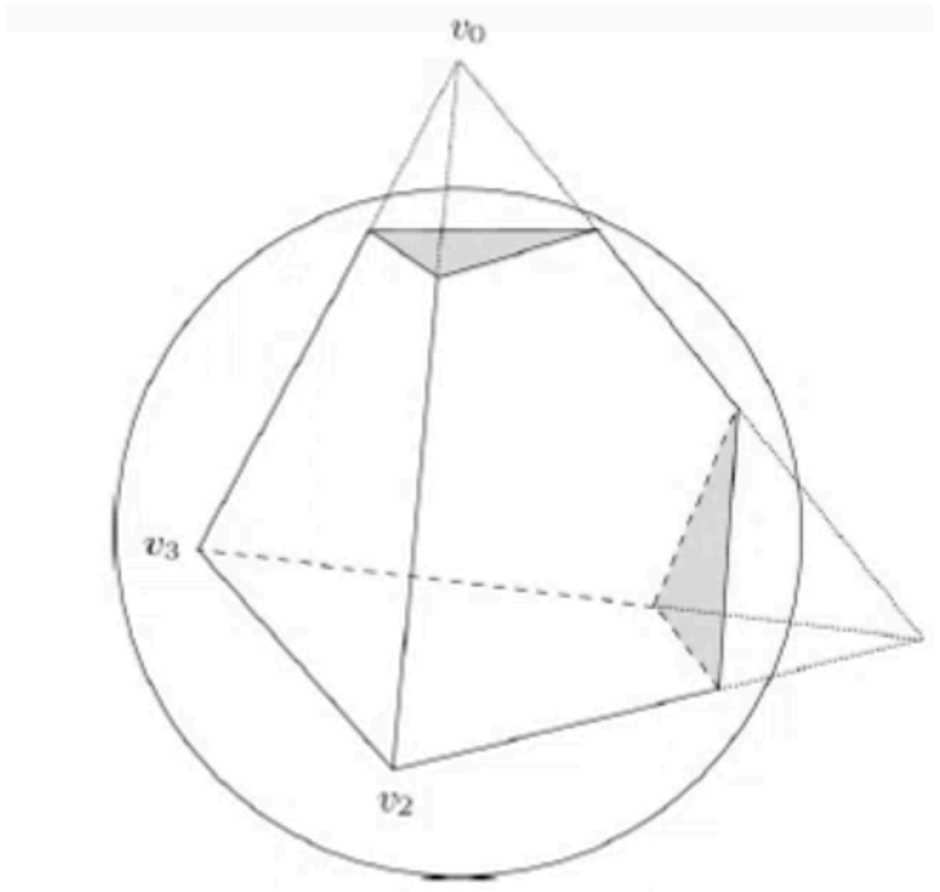
Теорема (Г. Беллетти, 2021) Для любого 3-связного планарного графа Γ выполняется следующее равенство:

$$\sup_{P \in \mathscr{P}(\Gamma)} vol(P) = vol(\overline{\Gamma}),$$

где P является обобщенным гиперболическим многогранником с 1-скелетом Γ, а $\overline{\Gamma}$ это ректификация Γ.

Обобщенные гиперболические многогранники





Ректификация $\overline{\Gamma}$

Ректификация $\overline{\Gamma}$ графа Γ это:

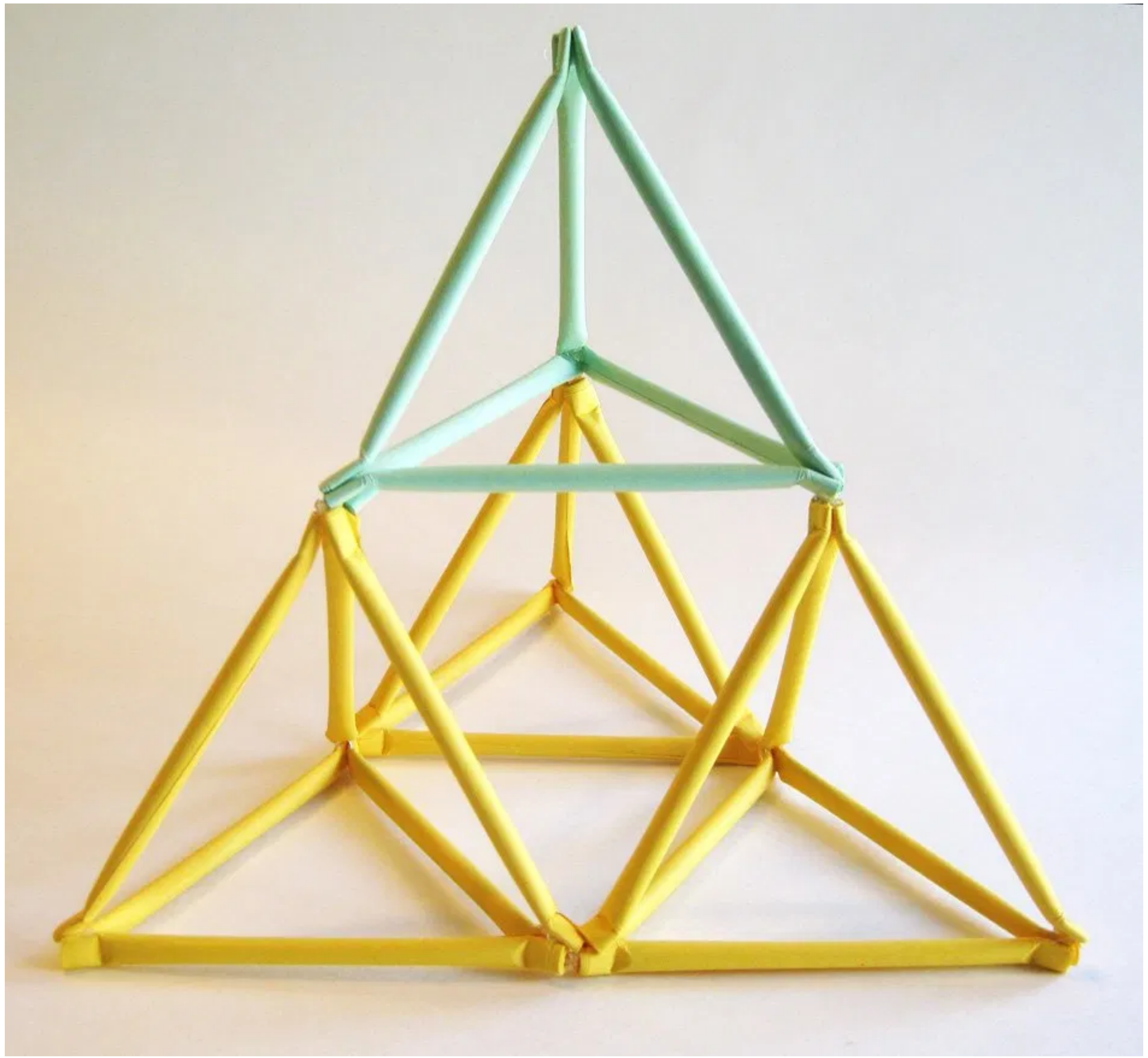
1) Идеальный прямоугольный гиперболический многогранник.

2) 1-скелет этого многогранника является медиальным графом графа Γ.

От графа к медиальному графу

Пример 1:

Тетраэдр



Медиальный граф графа тетраэдра - это граф октаэдра

Таким образом, объем любого обобщенного тетраэдра меньше, чем $v_{oct} = 3{,}663863\ldots$

Этот факт был замечен ранее Ушиджимой (2006).

$\{$идеальные $\pi/2$-многогранники$\}$ $=$ $\{$ректификации$\}$?

Теорема (Г. Бринкманн, С. Гринберг и другие, 2005)
1-скелет произвольного идеального прямоугольного многогранника является медиальным граф для 1-скелетов ровно двух многогранников, двойственных друг другу.

Идеальные прямоугольные многогранники

Комбинаторика идеальных прямоугольных многогранников

Теорема (Е. М. Андреев, 1970)

Полиэдральный граф реализуется как граф идеального прямоугольного многогранника в H^3 тогда и только тогда

1. Он является 4-валентным;
2. Он является циклически 6-связным.

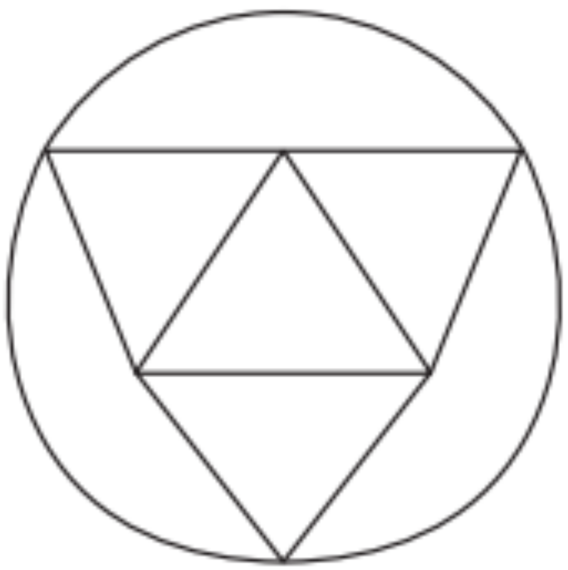
Более того, такая реализация единственна.

Количество идеальных $\pi/2$- многогранников с фиксированным числом вершин

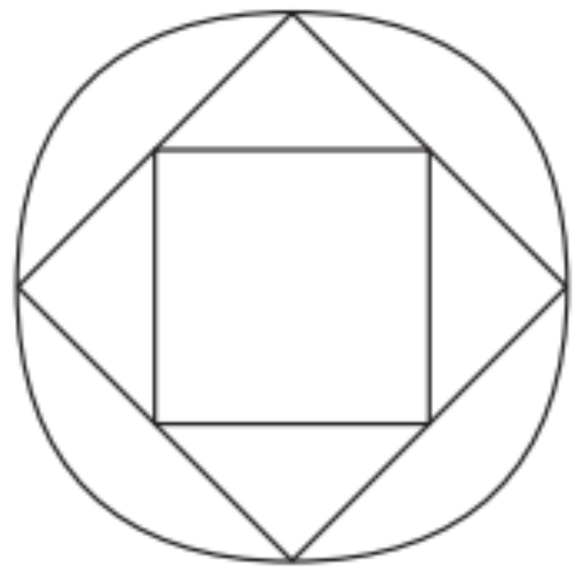
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	1	1	2	2	9	11	37	79

16	17	18	19	20	21
249	671	2182	6692	22131	72402

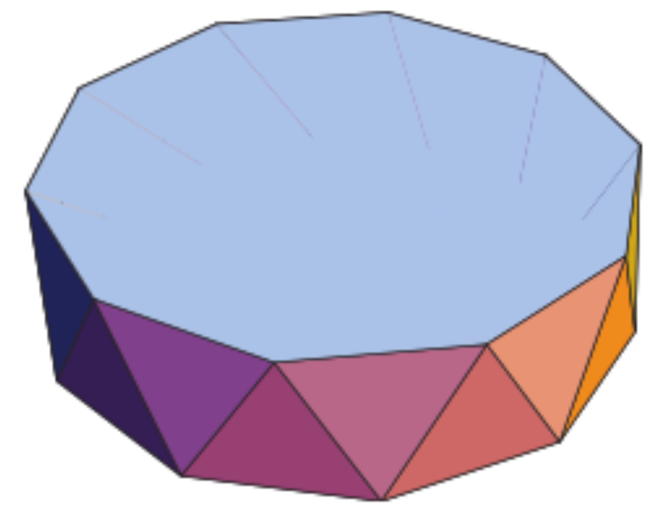
Идеальные прямоугольные антипризмы



A(3)



A(4)



A(10)

Теорема (W. Thurston, 1980)

$$vol(A(n)) = 2n\left(\Lambda\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2n}\right) + \Lambda\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2n}\right)\right).$$

Оценки объемов идеальных многогранников

Теорема (К. Аткинсон, 2009) Пусть P это идеальный прямоугольный гиперболический многогранник с V вершинами. Тогда

$$Vol(P) \leqslant \frac{v_{oct}}{2} \cdot V - 2v_{oct}\,.$$

Теорема (Е., А. Ю. Веснин, 2020) Пусть P это идеальный прямоугольный гиперболический многогранник с V вершинами. Если P не октаэдр, тогда

$$Vol(P) \leqslant \frac{v_{oct}}{2} \cdot V - \frac{5v_{oct}}{2}\,.$$

$$v_{oct} = 8\Lambda(\frac{\pi}{4}) = 3.66386237670887...$$

Оценки объемов идеальных многогранников

Теорема (С. Александров, Н. Богачев, А. Веснин, Е., 2021) Пусть P это идеальный прямоугольный гиперболический многогранник с V вершинами. Если $V > 24$, тогда

$$Vol(P) \leqslant \frac{v_{oct}}{2} \cdot V - 3v_{oct}.$$

Оценки объемов обобщенных многогранников

Теорема 1 Пусть Γ является 3-связным планарным графом с E ребрами, а P обобщенным гиперболическим многогранником с 1-скелетом Γ. Тогда

1) Если P не является тетраэдром, тогда

$$vol(P) < \frac{v_{oct}}{2} \cdot E - \frac{5}{2} v_{oct}$$

2) Если $E > 24$, тогда

$$vol(P) < \frac{v_{oct}}{2} \cdot E - 3 v_{oct}$$

3) Если P является тетраэдром, тогда

$$vol(P) < v_{oct}$$

Другой вид оценок объемов

Оценка, которая учитывает количество треугольников

Теорема 2 Пусть P это идеальный прямоугольный гиперболический многогранник с V вершинами и p_3 треугольными гранями. Тогда

$$vol(P) < 2v_{tet} \cdot (V - \frac{p_3 + 8}{4})$$

Оценки объемов обобщенных многогранников

Теорема 3 Пусть Γ является 3-связным планарным графом с E ребрами и p_3 треугольными гранями, а P обобщенным гиперболическим многогранником с 1-скелетом Γ. Тогда

1) Если Γ имеет V_3 вершин валентности 3, тогда

$$vol(P) < 2v_{tet} \cdot (E - \frac{p_3 + V_3 + 8}{4})$$

2) Если все вершины Γ имеют валентность 3, тогда

$$vol(P) < \frac{5v_{tet}}{3} \cdot (E - \frac{3p_3 + 24}{10})$$

Пример 2:
Призмы

Оценки объемов призм

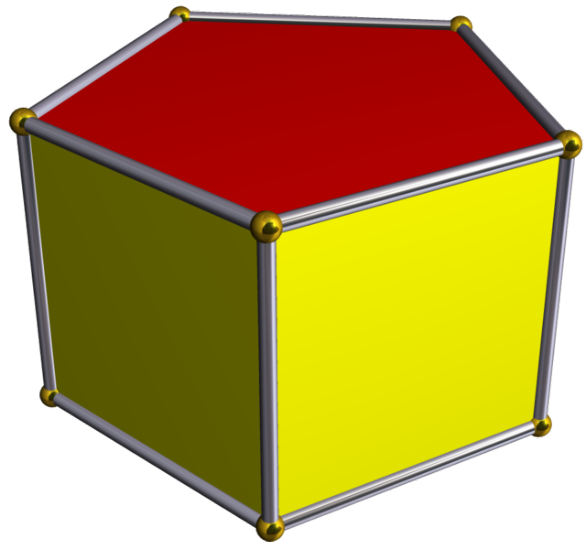
Следующая оценка объема n-призмы D_n была доказана К. Аткинсоном (2011).

$$vol(D_n) < \frac{3}{2}\, v_{oct}\, n - 2\, v_{oct}\,.$$

Заметим, что $\frac{3}{2} v_{oct} = 5.49\ldots$

Так как 1-скелет n-призмы D_n имеет $E = 3n$ ребер, тогда по **Теореме 1** получаем:

$$vol(D_n) < \frac{3}{2}\, v_{oct}\, n - \frac{5}{2}\, v_{oct}\,.$$



Оценки объемов призм

Так как 1-скелет n-призмы D_n имеет $E = 3n$ ребер и все вершины D_n являются трехвалентными, то, используя **Теорему 3** получаем, что:

$$vol(D_n) < 5\, v_{tet}\, n - 4\, v_{tet}\, .$$

Заметим, что $5v_{tet} = 5.14\ldots$

Медиальный граф графа призмы

Утверждение 1 Пусть G_n - граф n-призмы. Тогда медиальный граф G_n является графом объединения двух антипризм $A_n \cup A_n$.

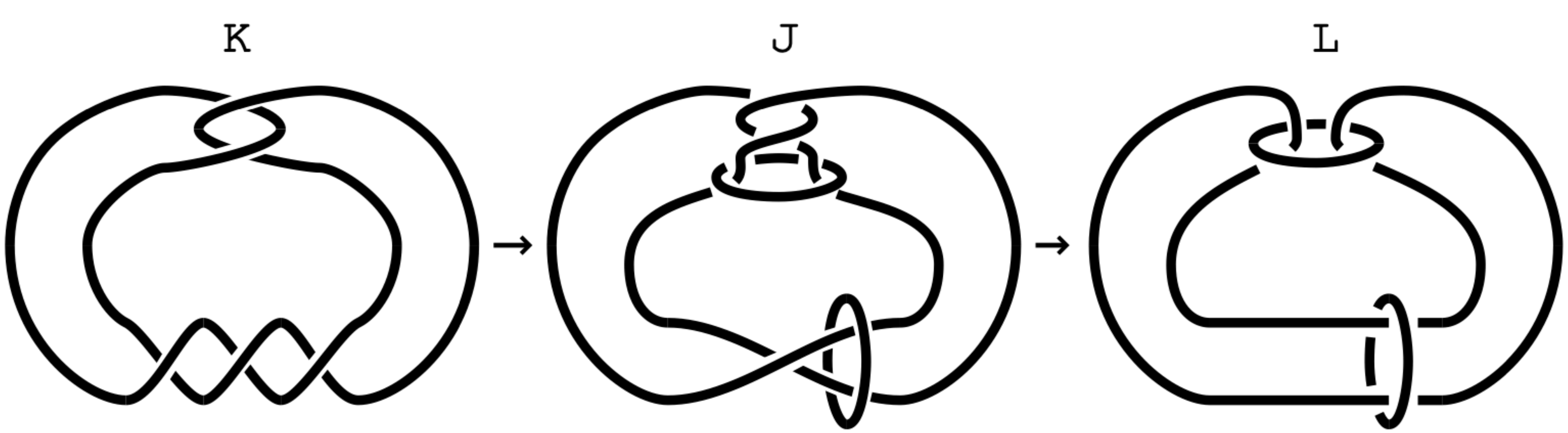
$$vol(D_n) < 2vol(A(n)) = 4n\left[\Lambda\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2n}\right)+\Lambda\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2n}\right)\right]$$

Пример 3:
Дополнения к зацеплениям

Оценки на объемы дополнений к зацеплениям

Теорема (И.Агол, Д.Терстон, 2000)
Пусть дана диаграмма D гиперболического зацепления K, которое имеет число скручиваний $t(D)$. Тогда

$$vol(S^3 \setminus K) \leq 10 \cdot v_{tet} \cdot (t(D) - 1)$$



Оценки на объемы дополнений к зацеплениям

Теорема 4
Пусть дана диаграмма D гиперболического зацепления K, которое имеет число скручиваний $t(D) > 8$, тогда

$$vol(S^3 \backslash K) \leq 10 \cdot v_{tet} \cdot (t(D) - 1.4)$$

Спасибо за внимание!