

О полиэдральных произведениях, гомологии петель которых являются свободными алгебрами

И.Ю.Лимонченко

НИУ ВШЭ

ilimonchenko@hse.ru

“Вторая конференция Математических центров России”

Секция “Геометрия и топология”

МГУ им. М.В.Ломоносова

Москва, 10 ноября 2022 года

Кольцо Стенли-Райснера

Обозначим через $\mathbb{k}$ коммутативное кольцо с единицей. Пусть K симплициальный комплекс на множестве вершин $[m] = \{1, \dots, m\}$ и через $\mathbb{k}[v_1, \dots, v_m]$ обозначена градуированная алгебра многочленов, где $\deg(v_i) = 2$.

Определение

Кольцо Стенли-Райснера, или **кольцо граней** комплекса K (над $\mathbb{k}$) есть факторкольцо

$$\mathbb{k}[K] = \mathbb{k}[v_1, \dots, v_m] / I_{SR}(K),$$

где

$$I_{SR}(K) = (v_{i_1} \cdots v_{i_k} \mid \{i_1, \dots, i_k\} \notin K).$$

$\mathbb{k}[K]$ обладает естественной структурой $\mathbb{k}$ -алгебры, а также модуля над алгеброй многочленов $\mathbb{k}[v_1, \dots, v_m]$.

Определение

Пусть $(\mathbf{X}, \mathbf{A}) = \{(X_i, A_i)\}_{i=1}^m$ множество топологических пар, а K симплициальный комплекс на множестве вершин $[m] = \{1, \dots, m\}$.

Полиэдральным произведением $(\mathbf{X}, \mathbf{A})$ над K называется топологическое пространство

$$(\mathbf{X}, \mathbf{A})^K = \bigcup_{I \in K} \prod_{i=1}^m Y_i,$$

где $Y_i = X_i$, если $i \in I$, и $Y_i = A_i$, если $i \notin I$.

- **Момент-угол комплексом** над K называется пространство $\mathcal{Z}_K = (\mathbb{D}^2, \mathbb{S}^1)^K$;
- **Вещественным момент-угол комплексом** над K называется пространство $\mathcal{R}_K = (\mathbb{D}^1, \mathbb{S}^0)^K$.

Гомологии Кошуля в торической топологии

Пусть K симплициальный комплекс на $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$.

Положим

$$\text{mdeg}(u_i) = (-1; 0, \dots, 2, \dots, 0), \text{mdeg}(v_i) = (0; 0, \dots, 2, \dots, 0)$$

при $1 \leq i \leq m$, где $\mathbf{J} \in \mathbb{Z}_2^m$.

Тогда мультиградуированный Тор-модуль для $\mathbb{k}[K]$ это прямая сумма $\mathbb{k}$ -модулей

$$\text{Tor}_{\mathbb{k}[m]}^{-i, 2\mathbf{J}}(\mathbb{k}[K], \mathbb{k}) = H^{-i, 2\mathbf{J}}[\mathbb{k}[K] \otimes_{\mathbb{k}} \Lambda[u_1, \dots, u_m], d] \cong \tilde{H}^{|\mathbf{J}| - i - 1}(K_{\mathbf{J}}; \mathbb{k})$$

В последней д.г.а. ее дифференциал d действует так: $d(u_i) = v_i$ и $d(v_i) = 0$ при $1 \leq i \leq m$.

Теорема (И.В.Баскаков, В.М.Бухштабер, Т.Е.Панов; M.Franz)

Для коммутативного кольца с единицей $\mathbb{k}$ имеет место изоморфизм градуированных $\mathbb{k}$ -алгебр:

$$H^*(\mathcal{Z}_K; \mathbb{k}) \cong \text{Tor}_{\mathbb{k}[m]}^{*,*}(\mathbb{k}[K], \mathbb{k}) = H^{*,*}[\mathbb{k}[K] \otimes_{\mathbb{k}} \Lambda[u_1, \dots, u_m], d].$$

Свойство Голода в торической топологии

- $\mathbb{k}[K]$ **голодово** кольцо (Т.Gulliksen и G.Levin'69; J.Grbić и S. Theriault'07), если имеет место тождество для рядов Пуанкаре

$$P(\mathbb{k}[K]; t) = \text{Hilb}(\text{Ext}_{\mathbb{k}[K]}(\mathbb{k}, \mathbb{k}); t) = \frac{(1+t)^m}{1 - \sum_{i,j>0} \beta^{-i,2j}(\mathbb{k}[K]) t^{-i+2j-1}},$$

где **биградуированные числа Бетти** суть размерности компонент Тор-алгебры:

$$\beta^{-i,2j}(\mathbb{k}[K]) = \dim_{\mathbb{k}} \text{Tor}_{\mathbb{k}[v_1, \dots, v_m]}^{-i,2j}(\mathbb{k}[K], \mathbb{k});$$

- $\mathbb{k}[K]$ **минимально не-голодово** (А.Berglund и М.Jöllenbeck'07), если $\mathbb{k}[K]$ само **не** голодово, но после удаления любой вершины из K , индуцированный подкомплекс имеет голодово кольцо граней.

Теорема (J.Grbić, Т.Е.Панов, S.Theriault, J.Wu'16;
Я.А.Веревкин, Т.Е.Панов'16)

Если K **флаговый**, то следующие утверждения равносильны:

- $sk^1(K)$ хордовый граф;
- $\mathcal{Z}_K$ гомотопически эквивалентен букету сфер;
- $\sup(\mathcal{Z}_K) = 1$;
- K голодов комплекс;
- коммутатор RC'_K прямоугольной группы Кокстера RC_K является свободной группой.

Голодовы комплексы: не-флаговые примеры

J.Grbić, T.E.Панов, S.Theriault, J.Wu'16: $\mathbb{R}P^2$ на 6 вершинах

Положим $K = \mathbb{R}P_6^2$. Тогда K голодов комплекс и $\mathcal{Z}_K$ имеет гомотопический тип букета пространств:

$$\mathcal{Z}_K \simeq (S^5)^{\vee 10} \vee (S^6)^{\vee 15} \vee (S^7)^{\vee 6} \vee \Sigma^7 \mathbb{R}P^2.$$

Л.'15: $\mathbb{C}P^2$ на 9 вершинах

Положим $K = \mathbb{C}P_9^2$. Тогда K голодов комплекс, все полные подкомплексы K_J в нем имеют свободные группы целочисленных гомологий, но $\mathcal{Z}_K$ не гомотопически эквивалентен букету сфер:

$$\mathcal{Z}_K \simeq (S^7)^{\vee 36} \vee (S^8)^{\vee 90} \vee (S^9)^{\vee 84} \vee (S^{10})^{\vee 36} \vee (S^{11})^{\vee 9} \vee \Sigma^{10} \mathbb{C}P^2.$$

K.Iriye, T.Yano'16: $\text{cat}(\mathcal{Z}_K) > 1$

Существует голодов комплекс K т.ч. $\mathcal{Z}_K$ не со-Н-пространство.

Пример (L.Katthän'15)

- (a) Если $\dim K \leq 3$ или $f_0(K) \leq 8$, то $\text{sup}(\mathcal{Z}_K) = 1 \iff K$ голодов комплекс;
- (b) Существует 4-мерный комплекс K т.ч.
- $\text{sup}(\mathcal{Z}_K) = 1$;
 - Имеется нетривиальное тройное произведение Масси $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle \subset H^*(\mathcal{Z}_K)$; таким образом, K **не** голодов комплекс.

Голодовы комплексы: общий случай

Следуя работам A.Berglund'10 и J.Grbic, T.E.Панов, S.Theriault, J.Wu'16 мы доказали следующий критерий голодовости.

Теорема (Л., Т.Е.Панов'22)

Пусть $\mathbb{k}$ поле. Следующие утверждения равносильны.

- (1) $H_*(\Omega \mathcal{Z}_K; \mathbb{k})$ градуированная свободная ассоциативная алгебра;
- (2) Умножение и все произведения Масси в $H^+(\mathcal{Z}_K; \mathbb{k})$ тривиальны;
- (3) $\mathbb{k}[K]$ кольцо Голода;
- (4) Имеет место тождество для ряда Гильберта алгебры Понтрягина:

$$\text{Hilb}(H_*(\Omega \mathcal{Z}_K; \mathbb{k}); t) = \frac{1}{1 - \text{Hilb}(\Sigma^{-1} \tilde{H}^*(\mathcal{Z}_K; \mathbb{k}); t)}.$$

Мы применяем две спектральные последовательности расслоения путей-петель для $\mathcal{Z}_K$:

- Бар с.п. Милнора-Мура с $E_2^b = \text{Tor}_{H_*(\Omega\mathcal{Z}_K)}(\mathbb{k}, \mathbb{k})$, сходящаяся к $\Sigma^{-1}\tilde{H}_*(\mathcal{Z}_K; \mathbb{k})$;
- Кобар с.п. Адамса с $E_2^c = \text{Cotor}_{H_*(\mathcal{Z}_K)}(\mathbb{k}; \mathbb{k})$, сходящаяся к $H_*(\Omega\mathcal{Z}_K; \mathbb{k})$.

Ключевая лемма

Условия (1) и (4) выше равносильны тому, что

- Обе с.п. вырождаются в члене E_2 .

(2) $\iff$ (3) - градуированная версия теоремы Голода;

(3) $\iff$ (4), поскольку

$$\Omega(\mathbb{C}P^\infty, *)^K \simeq \Omega\mathcal{Z}_K \times \mathbb{T}^m \text{ и } P(\mathbb{k}[K]; t) = \text{Hilb}(H_*(\Omega(\mathbb{C}P^\infty, *)^K; \mathbb{k}); t).$$

Минимально не-голодовы комплексы: примеры

Голодовы многогранные сферы

Единственными голодовыми многогранными сферами являются границы симплексов.

Теорема (J.Grbic, T.E.Панов, S.Theriault, J.Wu'16)

Если комплекс K_P **флаговый**, то следующие утверждения равносильны:

- P - m -угольник ($m \geq 4$);
- $\mathcal{Z}_P$ гомеоморфен связной сумме произведений сфер с двумя сферами в каждом произведении;
- K_P минимально не-голодовый комплекс.

Минимальная не-голодовость: характеристика во флаговом случае

Теорема (J.Grbić, М.Ф.Ильясова, Т.Е.Панов, G.Simmons'21)

Пусть $\mathbb{k} = \mathbb{Q}$ и K - **флаговый** комплекс. Тогда следующие условия эквивалентны.

- (1) $H_*(\Omega \mathcal{Z}_K; \mathbb{k})$ градуированная ассоциативная алгебра с одним соотношением;
- (2) $\mathcal{Z}_K$ гомотопически эквивалентен связной сумме произведений сфер с двумя сферами в каждом произведении;
- (3) коммутант RC'_K прямоугольной группы Кокстера RC_K является группой с одним соотношением;

Минимальная не-голодовость: характеристика во флаговом случае

Теорема (J.Grbíć, М.Ф.Ильясова, Т.Е.Панов, G.Simmons'21)

(4) K - джойн границы p -угольника с d -симплексом при $p \geq 4, d \geq -1$;

(5) имеет место тождество для ряда Пуанкаре кольца $\mathbb{k}[K]$:

$$P(\mathbb{k}[K]; t) = \frac{(1+t)^m}{1 - \sum_{i,j>0} \beta^{-i,2j}(\mathbb{k}[K]) t^{-i+2j-1} + (-1)^n t^m};$$

(6) $H_2(\mathcal{R}_K) = \mathbb{Z}$;

(7)

$$H^{2-j,2j}(\mathcal{Z}_K) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{если } j = p \text{ для некоторого } 4 \leq p \leq m; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Минимально не-голодовы комплексы: общий случай

Теорема (S.Amelotte'20)

Следующие утверждения равносильны:

- (a) Если $\mathcal{Z}_K$ гомотопически эквивалентен связной сумме произведений сфер с двумя сферами в каждом произведении, то K - джойн минимально не-голодова комплекса с d -симплексом при $d \geq -1$;
- (b) Если $\mathcal{R}_K$ гомотопически эквивалентен связной сумме произведений сфер с двумя сферами в каждом произведении, то K - джойн минимально не-голодова комплекса с d -симплексом при $d \geq -1$.

Пример (Л.'15)

Пусть K - звездное подразбиение $\mathbb{T}_7^2$ или $\mathbb{C}P_9^2$.

В обоих случаях K минимально не-голодов, но $\mathcal{Z}_K$ не гомотопически эквивалентен связной сумме произведений сфер (его когомологии не являются алгеброй Пуанкаре).

Минимально не-голодовы комплексы и произведения Масси

Положим кольцо граней комплекса $\mathcal{K}$ над полем $\mathbb{k}$ равным

$$\mathbb{k}[\mathcal{K}] = \mathbb{k}[v_1, \dots, v_9]/I_{\mathcal{K}},$$

где $I_{\mathcal{K}}$ порожден 15 мономами:

$$v_1 v_2 v_3, v_4 v_5 v_6, v_7 v_8 v_9, v_1 v_2 v_4 v_5, v_5 v_6 v_7 v_8,$$

$$v_2 v_3 v_7 v_8, v_1 v_4 v_7, v_2 v_3 v_5 v_6 v_7, v_1 v_2 v_4 v_6 v_8 v_9, v_1 v_3 v_4 v_5 v_8 v_9,$$

$$v_1 v_3 v_5 v_6 v_7 v_9, v_2 v_3 v_4 v_5 v_7 v_9, v_2 v_3 v_4 v_5 v_8 v_9, v_2 v_3 v_4 v_6 v_7 v_9, v_2 v_3 v_5 v_6 v_8 v_9.$$

Заметим, что $\dim \mathcal{K} = 4$ и $m = 9$, а значит, $\dim \mathcal{Z}_{\mathcal{K}} = 14$.

Минимально не-голодовы комплексы и произведения Масси

Теорема (Л., Т.Е.Панов'22)

- (a) Если K минимально не-голодов комплекс, то $\text{sup}(\mathcal{Z}_K) \leq 2$;
- (b) $\mathcal{K}$ минимально не-голодов комплекс т.ч.
 - $\text{sup}(\mathcal{Z}_K) = 1$;
 - Существует **нетривиальное** неразложимое тройное произведение Масси 5-мерных классов

$$\langle [v_1 v_2 u_3], [v_5 v_6 u_4], [v_7 v_8 u_9] \rangle = \{[v_1 v_2 v_5 v_7 v_8 u_3 u_4 u_6 u_9]\}$$

в $H^{14}(\mathcal{Z}_K)$.

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ!