О пересечениях фрактальных кубов

Дмитрий Дроздов
d.drozdov1@g.nsu.ru

Новосибирский Государственный Университет

Вторая конференция Математических центров России
07–11 ноября 2022 г., г. Москва

Определение

Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_r\}$ — система сжимающих подобий в $\mathbb{R}^k$. Равенством

$$T(A) = \bigcup_{i=1}^{r} S_i(A)$$

зададим соответствующий оператор Хатчинсона на $C(\mathbb{R}^k)$. Тогда, согласно теореме Хатчинсона, существует единственный непустой компакт $K \subset \mathbb{R}^k$, удовлетворяющий

$$K = T(K) = \bigcup_{i=1}^{r} S_i(K).$$

Такое множество K называют *аттрактором* системы $\mathcal{S}$ или *множеством, самоподобным относительно* $\mathcal{S}$.

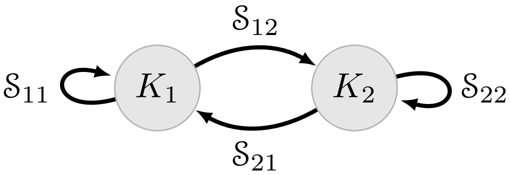
[1]Hutchinson J. E., Fractals and self-similarity, Indiana Univ. Math. J. **30** (1981), 713–747.

Определение (Mauldin & Williams (1988))

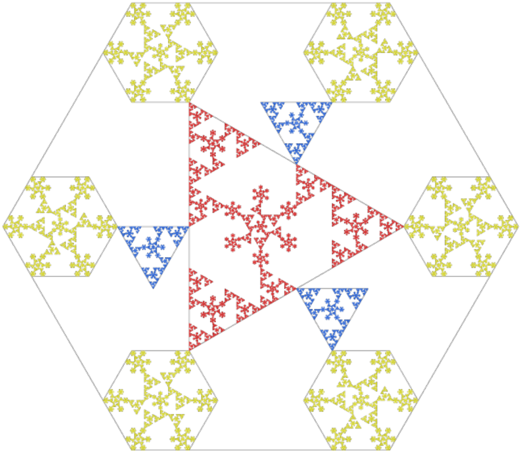
Пусть $\{\mathcal{S}_{ij} \mid i,j = 1,\dots,k\}$ — набор систем сжимающих отображений, причём для некоторых i,j система $\mathcal{S}_{ij}$ может быть пустой. Пусть этим системам соответствуют операторы Хатчинсона $\{T_{ij}(A)\}$. Тогда набор компактов

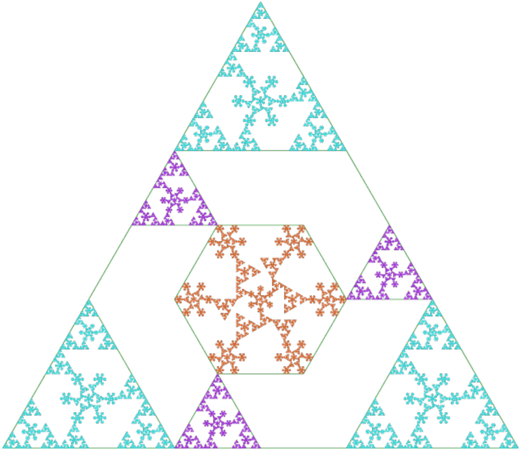
$$\left\{ K_j = \bigcup_{i=1}^{k} T_{ij}(K_i) \mid j = 1,\dots,k \right\}$$

будем называть аттрактором граф-ориентированной системы из k компонент.



[2]Mauldin R. D., Williams S. C., Hausdorff dimension in graph directed constructions, Trans. Amer. Math. Soc. (2) **309** (1988), 811–829.





Фрактальный k-куб

Определение (Olsen L. (1998); Lau K., Luo J.J.,Rao H. (2013))

Пусть $D = \{d_1, \dots, d_r\}$, $d_i \in \{0, 1, \dots, n-1\}^k$, где $n \geq 2$, а $1 < \#D < n^k$.
Фрактальным k-кубом порядка n с *множеством единиц* D называют компактное множество $K \subset \mathbb{R}^k$, удовлетворяющее

$$K = \frac{K + D}{n}$$

Замечание

Фрактальный k-куб $K = \dfrac{K+D}{n}$ с множеством единиц $D = \{0, 1, \dots, n-1\}^k$ есть единичный k-мерный куб P.

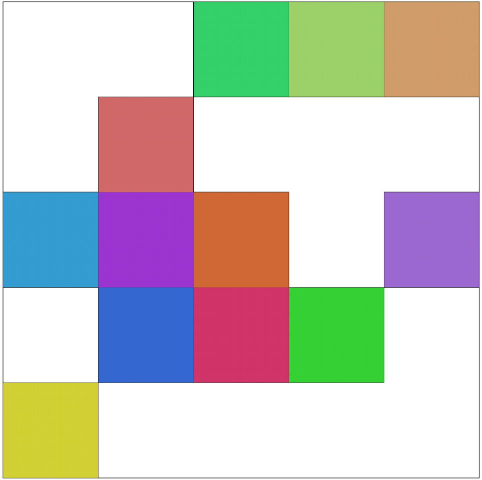
Следствие

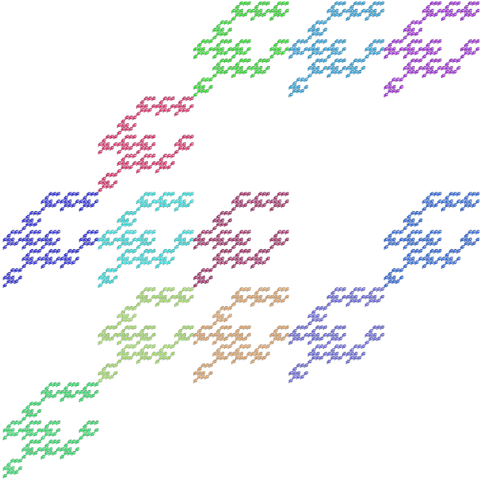
$$K = \frac{K+D}{n} \subset P$$

[3] Olsen L., Self-affine multifractal Sierpinski sponges in $\mathbb{R}^d$, Pac. J. Math. **116** (1998), 143–199

[4] Lau K., Luo J.J.,Rao H., Topological structure of fractal squares, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 115 (2013), 73–86

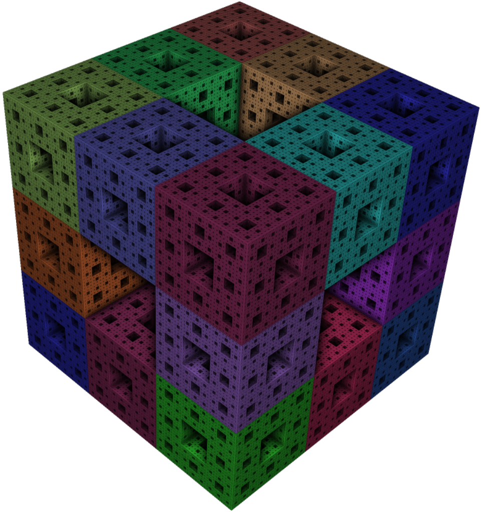
Фрактальный k-куб

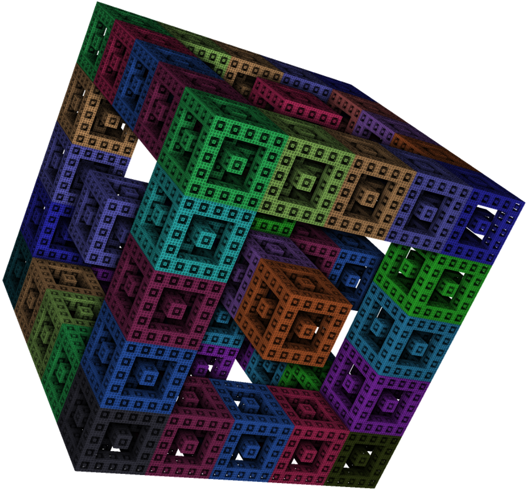




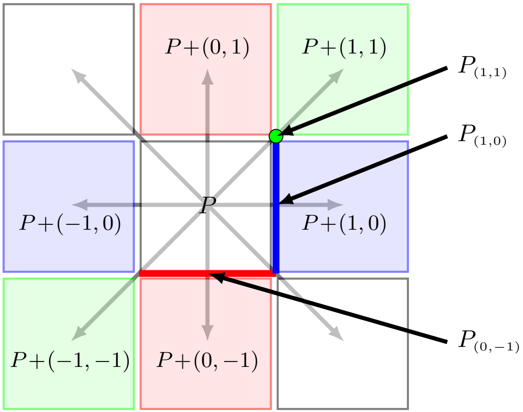
$$K = \frac{K + D}{n} = \bigcup_{i=1}^{r} S_i(K), \quad \text{где} \quad S_i(x) = \frac{d_i + x}{n} \quad \text{и} \quad \mathrm{fix}(S_i) = \frac{d_i}{n-1}.$$

Фрактальный k-куб





Грани единичного k-куба



Определение

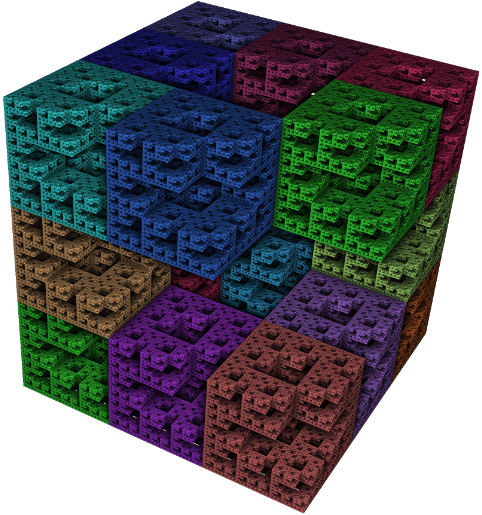
Пусть $\alpha \in A = \{-1, 0, 1\}^k$, тогда *гранью* P_α *единичного куба* P назовём множество $P_\alpha := P \cap (P + \alpha)$ есть α-грань куба P.
$P \cap (P + \alpha) = P_\alpha = P_{-\alpha} + \alpha$

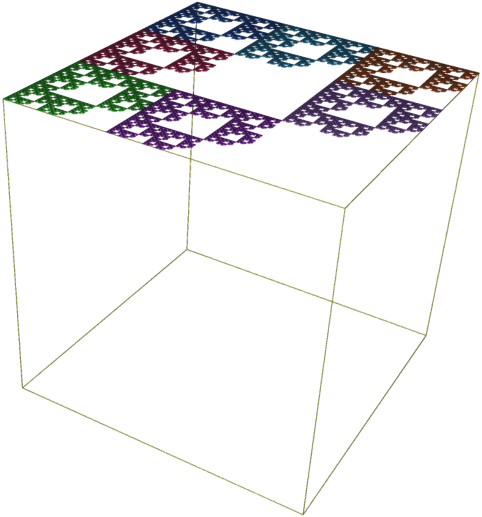
[4] M. Elekes, T. Keleti, A.Máthé, Self-similar and self-affine sets: measure of the intersection of two copies, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **30** (2010), 399–440

Грани фрактального k-куба

Определение

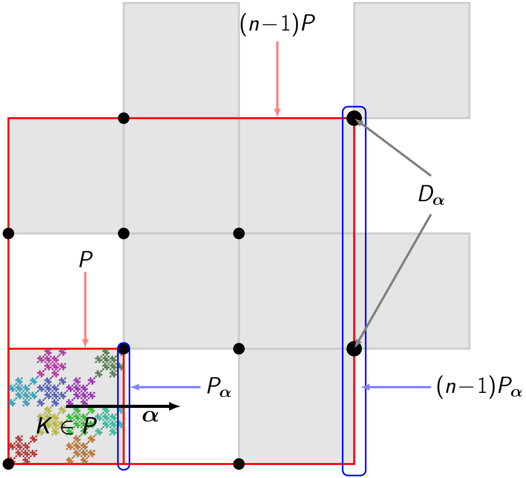
Для фрактального k-куба K мы определяем его грани K_α как $K_\alpha := K \cap P_\alpha$.

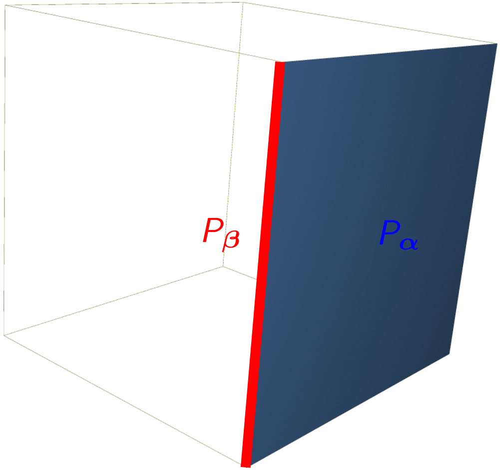




Лемма

Каждая грань K_α фрактального куба K сама является фрактальным кубом, удовлетворяющим уравнению $K_\alpha = \dfrac{K_\alpha + D_\alpha}{n}$ с множеством единиц $D_\alpha := D \cap (n-1)P_\alpha$.





Определение

Для разных $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha} \in A$ мы будем говорить что $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_k)$ больше $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ и обозначать это как $\boldsymbol{\beta} \sqsupset \boldsymbol{\alpha}$, если для каждой координаты $\alpha_i = \pm 1$ выполняется $\alpha_i = \beta_i$.

Определение

Пусть K^1, K^2 — фрактальные k-кубы порядка n с множествами единиц D^1, D^2. Обозначим их пересечения как $F_0 := K^1 \cap K^2$ и $F_{\boldsymbol{\alpha}} := K^1 \cap (K^2 + \boldsymbol{\alpha})$, где $\boldsymbol{\alpha} \in A$.

Поскольку $K^1_{\boldsymbol{\alpha}} = K^1 \cap P_{\boldsymbol{\alpha}}$ и $K^2_{-\boldsymbol{\alpha}} = K^2 \cap P_{-\boldsymbol{\alpha}}$, то $F_{\boldsymbol{\alpha}} = K^1_{\boldsymbol{\alpha}} \cap (K^2_{-\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\alpha})$.

Вывод основной теоремы

$$F_{\alpha} = K^1 \cap (K^2 + \alpha) = \frac{\left(K^1 + D^1\right) \cap \left(K^2 + D^2 + n\alpha\right)}{n} = \bigcup_{d_1 \in D^1,\ d_2 \in D^2} \frac{(K_1 + d_1) \cap (K_2 + d_2 + n\alpha)}{n}.$$

$(K_1 + d_1) \cap (K_2 + d_2 + n\alpha) \neq \varnothing$ только если $(P + d_1) \cap (P + d_2 + n\alpha) \neq \varnothing$, поэтому $d_2 - d_1 + n\alpha =: \beta \in A$.
Поскольку для любой координаты $i = 1, ..., k$, $|(d_2 - d_1)_i| \leq n - 1$, это возможно только если $\beta \sqsupseteq \alpha$.

Если $\beta \sqsupset \alpha$, то $(K_1 + d_1) \cap (K_2 + d_2 + n\alpha) = (K^1 \cap (K^2 + \beta)) + d_1$, следовательно $d_1 \in D^1 \cap (D^2 + n\alpha - \beta) =: G_{\alpha\beta}$.
Если $\alpha = \beta$, то $G_{\alpha\alpha} = D^1 \cap (D^2 + (n-1)\alpha)$ будем обозначать как G_{α}.

Это приводит нас к уравнению

$$F_{\alpha} = \frac{1}{n} \bigcup_{\beta \sqsupseteq \alpha} (F_{\beta} + G_{\alpha\beta}) = \frac{1}{n}(F_{\alpha} + G_{\alpha}) \cup \bigcup_{\beta \sqsupset \alpha} \frac{1}{n}(F_{\beta} + G_{\alpha\beta}).$$

Основная теорема

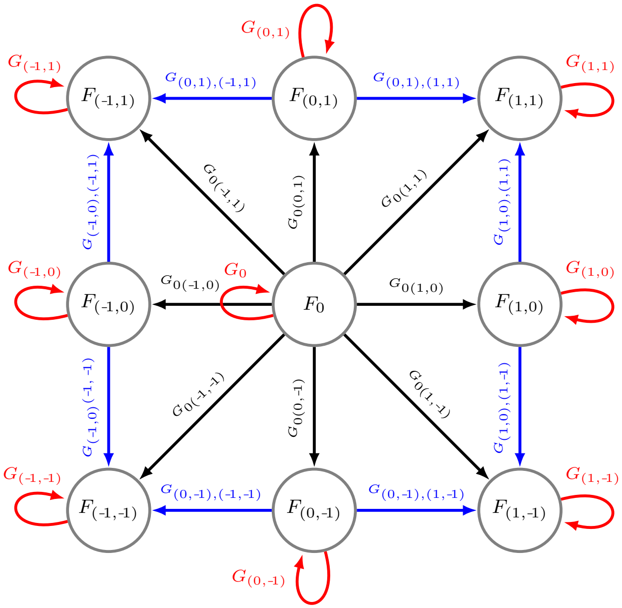
Теорема

Семейство $\{F_\alpha, \alpha \in A\}$ *пересечений* $F_\alpha = K_1 \cap (K_2 + \alpha)$ *удовлетворяет системе уравнений*

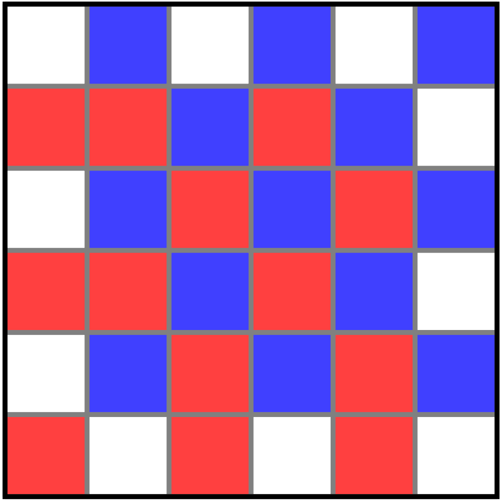
$$\left\{ F_\alpha = \bigcup_{\beta \sqsupseteq \alpha} T_{\alpha\beta}(F_\beta), \qquad \alpha \in A, \right\}$$

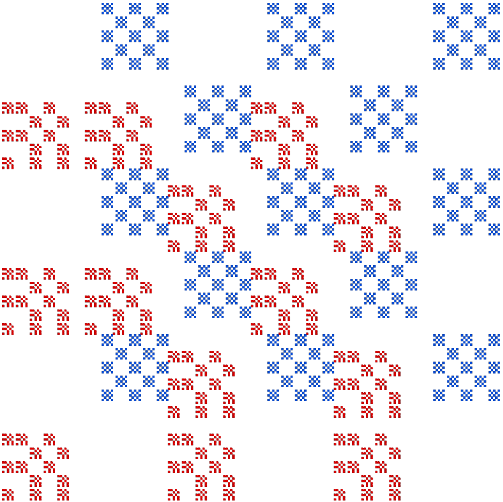
где для любого $\beta \sqsupseteq \alpha$ $T_{\alpha\beta}(F_\beta) = \frac{1}{n}(F_\beta + G_{\alpha\beta})$ *и* $G_{\alpha\beta} = D_1 \cap (D_2 + n\alpha - \beta)$.

Структурный граф

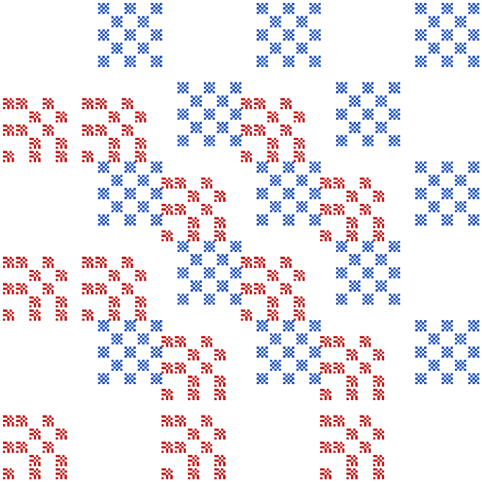


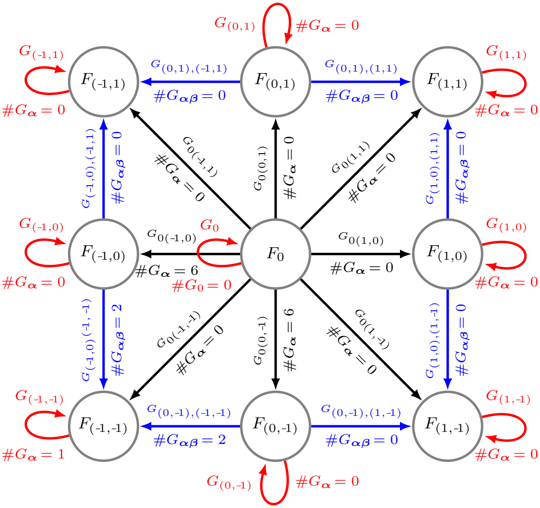
Пример с конечным пересечением фрактальных квадратов



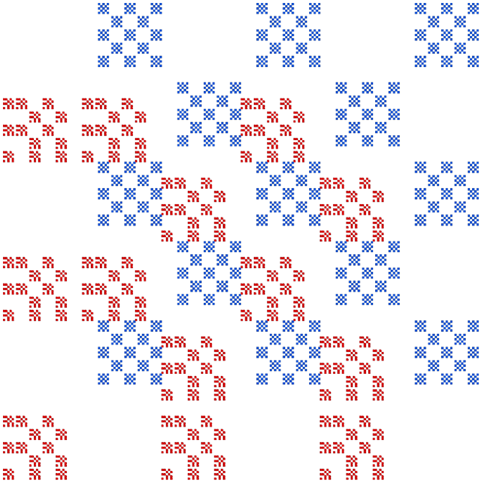


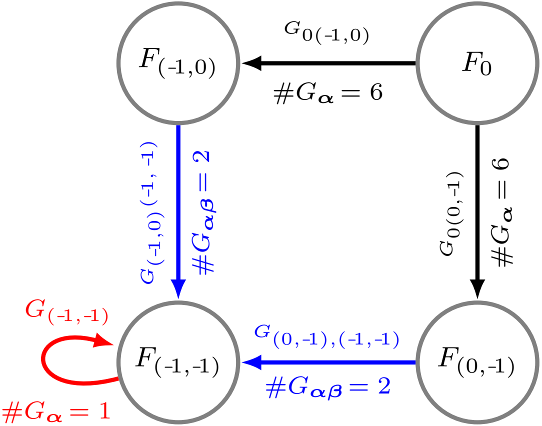
Пример с конечным пересечением фрактальных квадратов





Пример с конечным пересечением фрактальных квадратов





Определение

Будем говорить, что $\boldsymbol{\beta}$ подчинена $\boldsymbol{\alpha}$ и обозначим как $\boldsymbol{\beta} \succcurlyeq \boldsymbol{\alpha}$ ($\boldsymbol{\beta} \succ \boldsymbol{\alpha}$, если $\boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{\alpha}$), если существует такая последовательность $\boldsymbol{\beta} \sqsupset \alpha_1 \sqsupset \ldots \sqsupset \alpha_{p-1} \sqsupset \boldsymbol{\alpha}$, что $\#G_{\boldsymbol{\beta}} \cdot \#G_{\boldsymbol{\beta}\alpha_1} \cdot \#G_{\alpha_1\alpha_2} \cdot \ldots \cdot \#G_{\alpha_{p-1}\boldsymbol{\alpha}} \neq 0\}$

Теорема

Если $F_0 \neq \varnothing$, *то* $\dim(F_0) = \log_n m$, *где* $m = \max\{\#G_\alpha,\ \alpha \in A : \boldsymbol{\alpha} \succcurlyeq 0\}$.

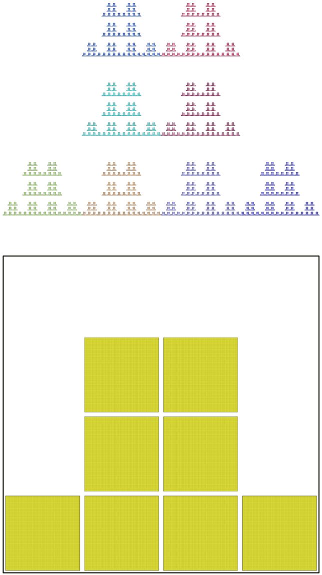
[2] Mauldin R. D., Williams S. C., Hausdorff dimension in graph directed constructions, Trans. Amer. Math. Soc. (2) **309** (1988), 811–829.

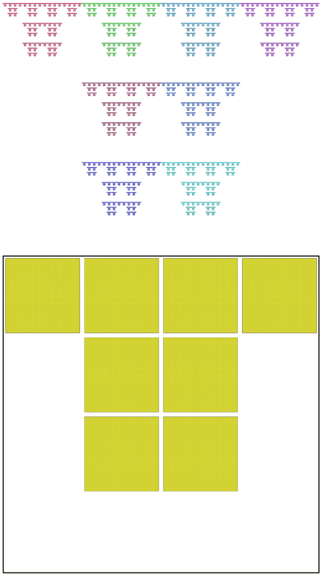
Теорема о бесконечной мере

Теорема

Пусть $\dim(F_0) = \log_n m = s$. *Если существуют такие* $\boldsymbol{\beta} \succ \boldsymbol{\alpha} \succcurlyeq 0$, *что* $\#G_{\boldsymbol{\alpha}} = \#G_{\boldsymbol{\beta}} = m$, *то* $H^s(F_0) = \infty$.

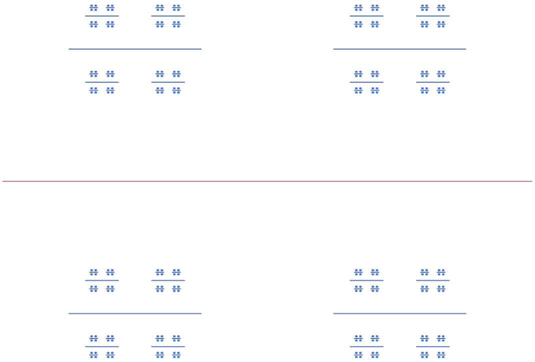
Пересечение фрактальных квадратов с $\dim(F_0) = 1$ и $H^1(F_0) = \infty$



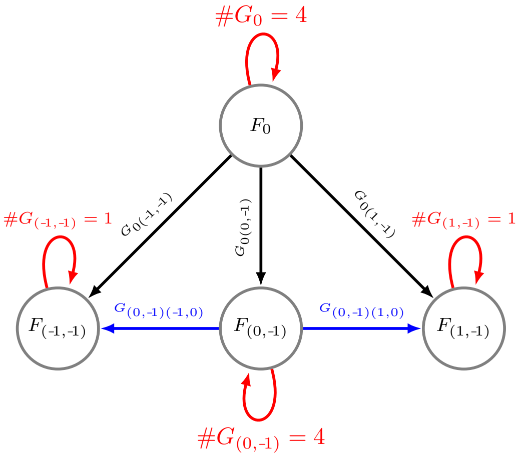


Фрактальные квадраты K_1, K_2 при $\#G_0 = 4$ и $\#G_{(0,-1)} = 4$.

Пересечение фрактальных квадратов с $\dim(F_0) = 1$ и $H^1(F_0) = \infty$



Пересечение $F_0 = K_1 \cap K_2$



Структурный граф Γ для $K_1 \cap K_2$

Литература

- Mekhontsev D., *IFStile*, software, (2016-2022), URL:https://ifstile.com/
- Tetenov A., *Finiteness properties for self-similar sets*, (2021), arXiv:2003.04202
- Kenyon R., Peres Y., *Measures of full dimension on affine-invariant sets*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. (2) **16** (1996), 307–323
- Peres Y., *The self-affine carpets of McMullen and Bedford have infinite Hausdorff measure*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (3) **116** (1994), 513–526
- Hutchinson J. E., *Fractals and self-similarity*, Indiana Univ. Math. J. **30** (1981), 713–747
- Mauldin R. D., Williams S. C., *Hausdorff dimension in graph directed constructions*, Trans. Amer. Math. Soc. (2) **309** (1988), 811–829
- Olsen L., *Self-affine multifractal Sierpinski sponges in* $\mathbb{R}^d$, Pac. J. Math. **116** (1998), 143–199
- Elekes M., Keleti T., Máthé A., *Self-similar and self-affine sets: measure of the intersection of two copies*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. **30** (2010), 399–440
- Lau K., Luo J.J.,Rao H. *Topological structure of fractal squares*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **155** (2013), 73–86

Спасибо за внимание!