# Меры сложности и многочлен HOMFLY-PT узлов

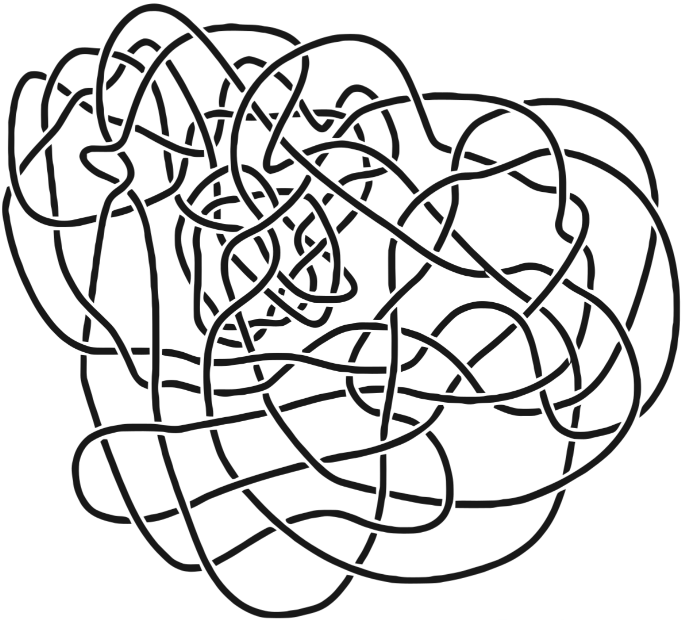
Алексеев Илья

ilyaalekseev@yahoo.com
Международный математический институт им. Леонарда Эйлера

Вторая конференция Математических центров России

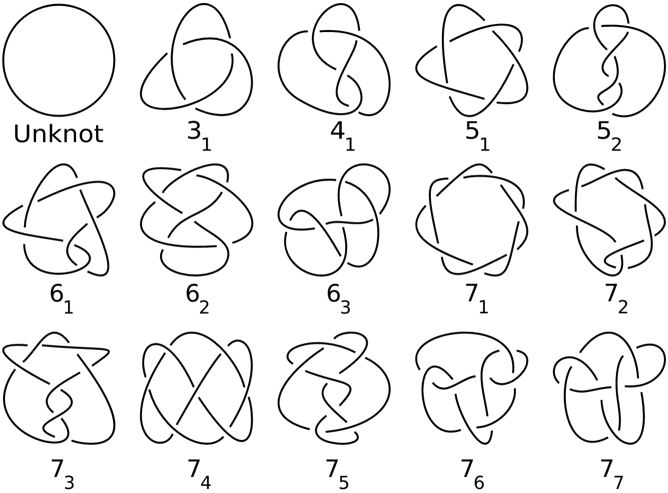
11 ноября 2022

# Узлы, зацепления и их диаграммы



# Табулирование узлов по числу перекрёстков

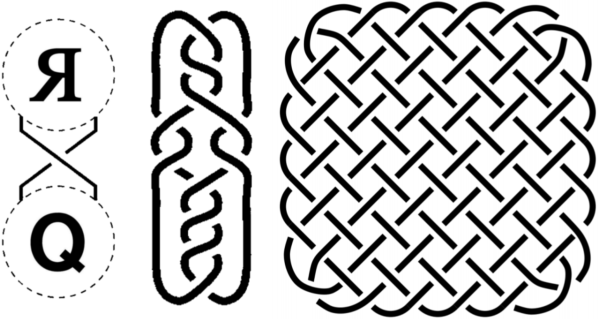
Восходит к трудам П. Тейта, Т. Киркмана и Ч. Литтла (1880–1899). Вот фрагмент современной версии таблицы:



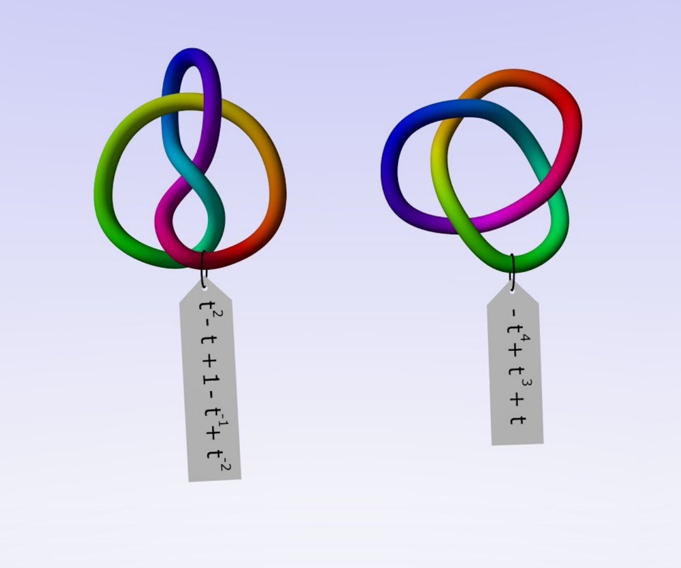
# Гипотеза Тейта об альтернированных диаграммах

Историки полагают, что при перечислении узлов Тейт руководствовался следующим постулатом:

*Все альтернированные диаграммы без перешейков минимальны*



# Полиномиальные инварианты узлов и зацеплений



# Неравенство Кауфмана–Тистлетвэйта–Мурасуги

Пусть $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ — многочлен Джонса зацепления $\mathcal{L}$.

**Теорема (L. Kauffman, M. Thistlethwaite, K. Murasugi; 1987)**

1. Для любой диаграммы $\mathcal{D}$ зацепления $\mathcal{L}$ выполняется
$$\deg^{+}(\mathcal{V}_{\mathcal{L}}) - \deg^{-}(\mathcal{V}_{\mathcal{L}}) \leqslant \mathrm{Cr}(\mathcal{D}). \qquad \text{(KTM)}$$
2. Если $\mathcal{D}$ альтернирована и не имеет перешейков, то в неравенстве (KTM) достигается равенство.

Замечания:

- С небольшими оговорками в п. 2 верно и обратное.
- С помощью *многочлена Кауфмана* (обобщение многочлена Джонса) можно доказать минимальность более широкого наглядного класса диаграмм – *адекватных* (и только их).

# Неравенство Кауфмана–Тистлетвэйта–Мурасуги

Пусть $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ — многочлен Джонса зацепления $\mathcal{L}$.

**Теорема (L. Kauffman, M. Thistlethwaite, K. Murasugi; 1987)**

1. Для любой диаграммы $\mathcal{D}$ зацепления $\mathcal{L}$ выполняется

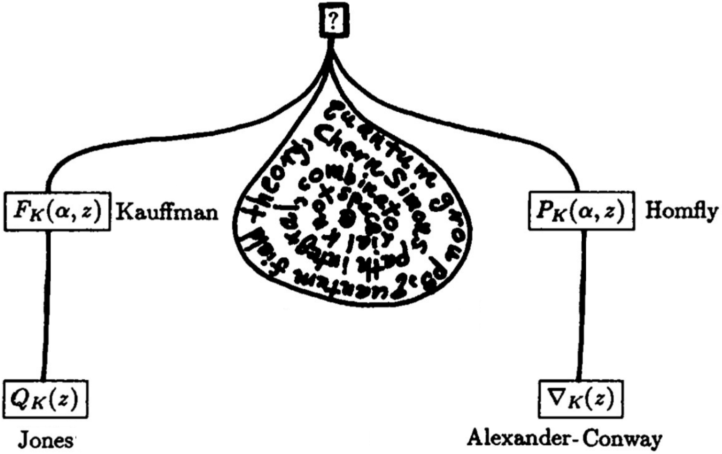
$$\deg^+(\mathcal{V}_{\mathcal{L}}) - \deg^-(\mathcal{V}_{\mathcal{L}}) \leqslant \mathrm{Cr}(\mathcal{D}). \qquad \text{(KTM)}$$

2. Если $\mathcal{D}$ альтернирована и не имеет перешейков, то в неравенстве (KTM) достигается равенство.

Замечания:

- С небольшими оговорками в п. 2 верно и обратное.
- С помощью *многочлена Кауфмана* (обобщение многочлена Джонса) можно доказать минимальность более широкого наглядного класса диаграмм – *адекватных* (и только их).

# Карта полиномиальных инвариантов узлов (1991)



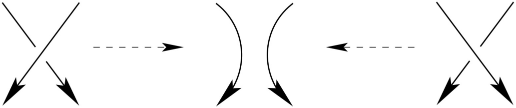
# Многочлен HOMFLY-PT

**Теорема (J. Hoste, A. Ocneanu, K. Millett, P. Freyd, W. Lickorish, D. Yetter, J. Przytycki, P. Traczyk; 1984)**

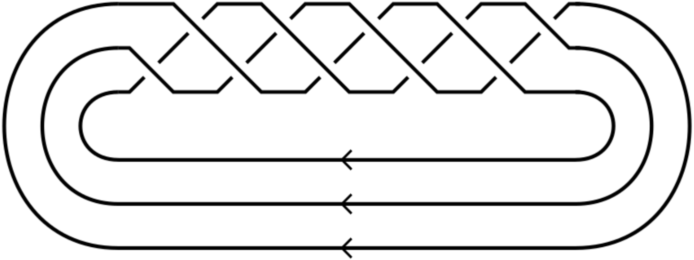
Существует такая единственная функция, сопоставляющая каждой диаграмме $\mathcal{D}$ многочлен $\mathcal{P}(\mathcal{D}) \in \mathbb{Z}[a^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$, что

1. образы диаграмм, представляющих одно и то же ориентированное зацепление, совпадают;
2. образ тривиального узла равен 1;
3. для любой скейн-тройки $(\mathcal{D}_+, \mathcal{D}_-, \mathcal{D}_0)$ выполняется

$$a\mathcal{P}(\mathcal{D}_+) - a^{-1}\mathcal{P}(\mathcal{D}_-) = z\mathcal{P}(\mathcal{D}_0).$$



# Неравенство Мортона–Фрэнкса–Уильямса

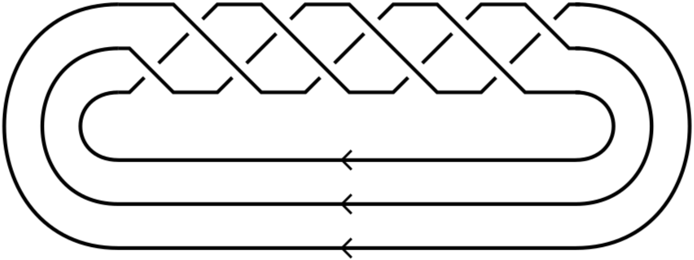


$$(7+21z^2+21z^4+8z^6+z^8)a^8-(8+14z^2+7z^4+z^6)a^{10}+(2+z^2)a^{12}$$

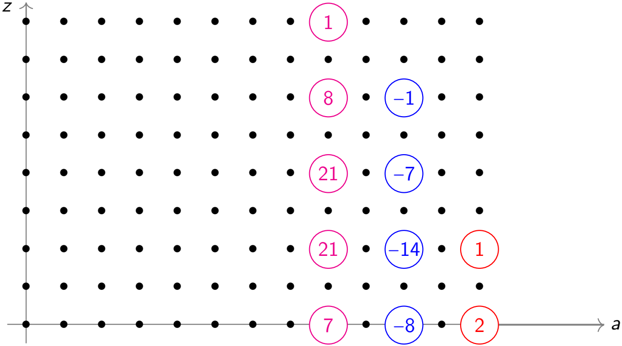
**Теорема (H. Morton, J. Franks, R. Williams; 1986)**

Для любой диаграммы $\mathcal{D}$ зацепления $\mathcal{L}$ выполняется

$$\deg_z^+(\mathcal{P}_\mathcal{L})+\frac{1}{2}\left(\deg_a^+(\mathcal{P}_\mathcal{L})-\deg_a^-(\mathcal{P}_\mathcal{L})\right)\leqslant \mathrm{Cr}(\mathcal{D}). \qquad \text{(MFW)}$$



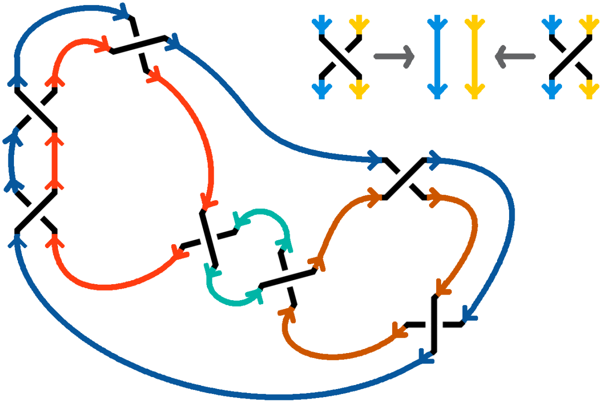
$$(7+21z^2+21z^4+8z^6+z^8)a^8-(8+14z^2+7z^4+z^6)a^{10}+(2+z^2)a^{12}$$



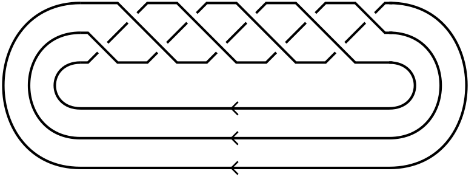
## Определения

Пусть $\mathcal{D}$ – диаграмма ориентированного зацепления.

- $\mathrm{Cr}(\mathcal{D})$ – количество перекрёстков.
- $\omega(\mathcal{D})$ – алгебраическая сумма знаков перекрёстков.
- $s(\mathcal{D})$ – количество окружностей Зейферта.

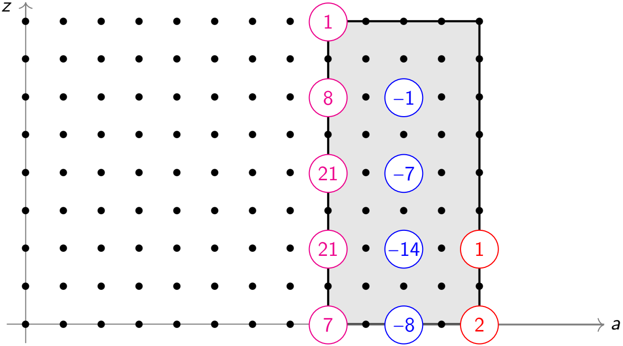


# Неравенства Мортона–Фрэнкса–Уильямса



$$\deg_z^+ \mathcal{P}_\mathcal{L} \leqslant \mathrm{Cr}(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D}) + 1$$

$$\omega(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D}) + 1 \leqslant \deg_a^- \mathcal{P}_\mathcal{L} \qquad \deg_a^+ \mathcal{P}_\mathcal{L} \leqslant \omega(\mathcal{D}) + s(\mathcal{D}) - 1$$



Если для диаграммы $\mathcal{D}$ в (MFW) достигается равенство, то $\mathcal{D}$ обладает следующими свойствами:

1. Максимальность *коэффициента самозацепления*:

$$\mathrm{sl}(\mathcal{D}) := \omega(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D}) \leqslant \deg_a^- \mathcal{P}_{\mathcal{L}} - 1.$$

2. Минимальность количества окружностей Зейферта:

$$\frac{1}{2}(\deg_a^+ \mathcal{P}_{\mathcal{L}} - \deg_a^- \mathcal{P}_{\mathcal{L}}) + 1 \leqslant s(\mathcal{D}),$$

3. Минимальность рода *канонической поверхности Зейферта*

$$\deg_z^+ \mathcal{P}_{\mathcal{L}} - \#\mathcal{L} + 1 \leqslant g_c(\mathcal{D}) := \frac{1}{2}(\mathrm{Cr}(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D}) - \#\mathcal{L} + 2).$$

# Достижимость равенства в “верхнем” неравенстве

**Теорема (P. Cromwell; 1989)**

Если $\mathcal{D}$ положительна, то $\partial_z^+\mathcal{P}(\mathcal{D}) = \mathrm{Cr}(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D}) + 1$.

Оригинальное доказательство закладывает основы техники работы со скейн-соотношением.

Согласно [P. Manchon; 2012], этот результат имеет яркий топологический оттенок: в нём устанавливается равенство в неравенствах на *род Зейферта*

$$\deg_z^+\nabla_L - \#\mathcal{L} + 1 \leqslant \genfrac{}{}{0pt}{}{\deg_z^+\mathcal{P}_\mathcal{L} - \#\mathcal{L} + 1,}{g(\mathcal{L})} \leqslant g_c(\mathcal{D}),$$

где $\nabla_\mathcal{L}$ – многочлен Александера-Конвея (подстановка $a = 1$).

# Достижимость равенства в "верхнем" неравенстве

**Теорема (P. Cromwell; 1989)**

Если $\mathcal{D}$ положительна, то $\partial_z^+ \mathcal{P}(\mathcal{D}) = \mathrm{Cr}(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D}) + 1$.

Оригинальное доказательство закладывает основы техники работы со скейн-соотношением.
Согласно [P. Manchon; 2012], этот результат имеет яркий топологический оттенок: в нём устанавливается равенство в неравенствах на *род Зейферта*

$$\deg_z^+ \nabla_L - \#\mathcal{L} + 1 \leqslant \begin{matrix} \deg_z^+ \mathcal{P}_{\mathcal{L}} - \#\mathcal{L} + 1, \\ g(\mathcal{L}) \end{matrix} \leqslant g_c(\mathcal{D}),$$

где $\nabla_{\mathcal{L}}$ – многочлен Александера-Конвея (подстановка $a = 1$).

# Достижимость равенства в "левом" неравенстве

**Теорема (Y. Yokota; 1992)**

Если диаграмма $\mathcal{D}$ положительна, то $\omega(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D}) + 1 = \deg_a^- \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

Оригинальное доказательство развивает технику Кромвеля.

Согласно [K. Hyden, J. Sabloff; 2022], это равенство имеет доказательство с яркими геометро-алгебраическими оттенками:

1. Лежандрово зацепление, соответствующее любой положительной диаграмме, является *лагранжево заполняемым* (т.е. краем лагранжева подмногообразия, собственно вложенного в 4-шар).
2. *Лежандровы контактные гомологии DGA* лагранжево заполняемого зацепления допускают *аугментацию*.
3. Аугментации эквивалентны так называемым *rulings*.
4. Коэффициент при $a^{\omega(\mathcal{D})-s(\mathcal{D})+1}$ равен взвешенному количеству таких rulings.

# Достижимость равенства в “левом” неравенстве

**Теорема (Y. Yokota; 1992)**

Если диаграмма $\mathcal{D}$ положительна, то $\omega(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D}) + 1 = \deg_a^- \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

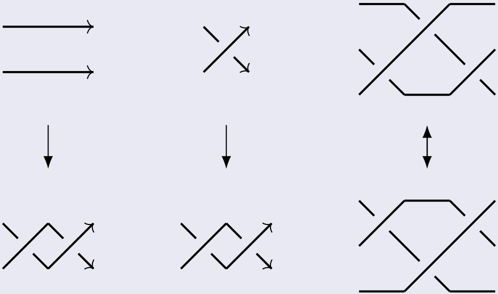
Оригинальное доказательство развивает технику Кромвеля. Согласно [K. Hyden, J. Sabloff; 2022], это равенство имеет доказательство с яркими геометро-алгебраическими оттенками:

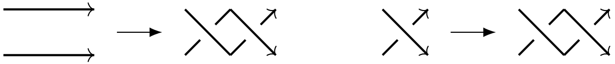
1. Лежандрово зацепление, соответствующее любой положительной диаграмме, является *лагранжево заполняемым* (т.е. краем лагранжева подмногообразия, собственно вложенного в 4-шар).
2. *Лежандровы контактные гомологии DGA* лагранжево заполняемого зацепления допускают *аугментацию*.
3. Аугментации эквивалентны так называемым *rulings*.
4. Коэффициент при $a^{\omega(\mathcal{D})-s(\mathcal{D})+1}$ равен взвешенному количеству таких rulings.

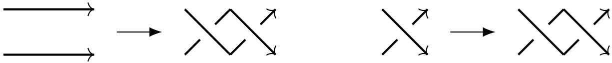
# Достижимость равенства в “правом” неравенстве

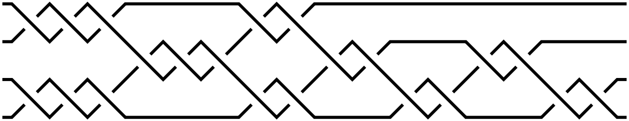
## Теорема (И.А; 2022)

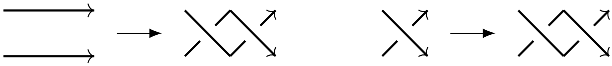
Пусть $\mathcal{D}$ – положительная диаграмма. Выполняется равенство $\deg_a^+ \mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \omega(\mathcal{D}) + s(\mathcal{D}) - 1$ в том и только в том случае, если $\mathcal{D}$ может быть получена из диаграммы без перекрёстков с помощью преобразований следующих трёх типов:

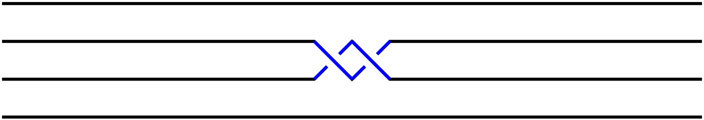


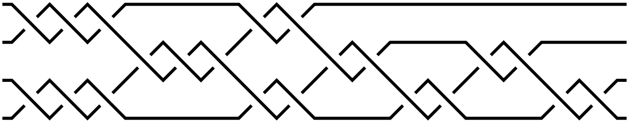


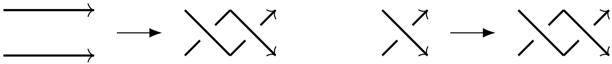


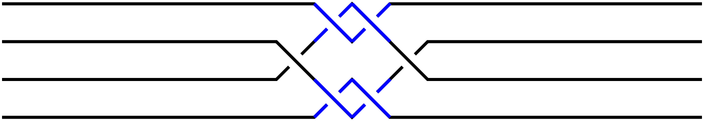


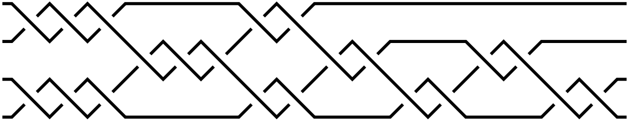


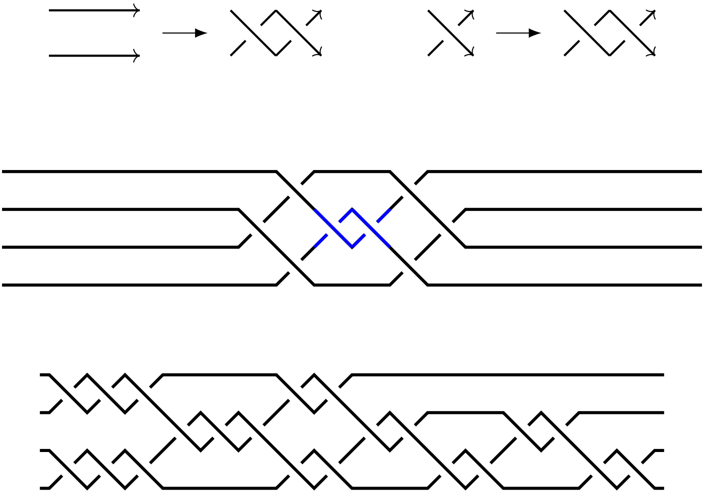


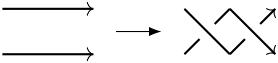


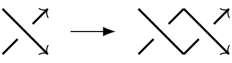


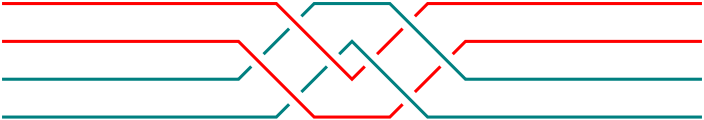


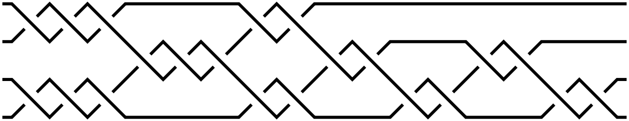


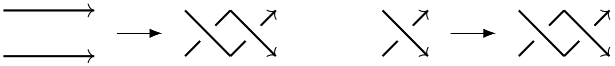


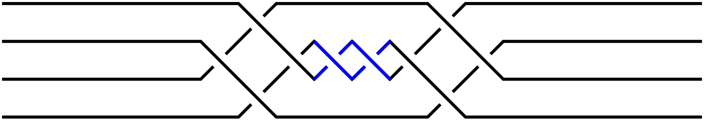


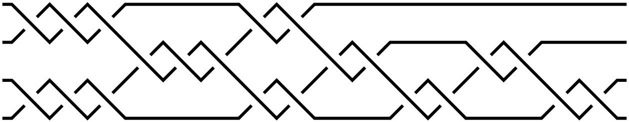


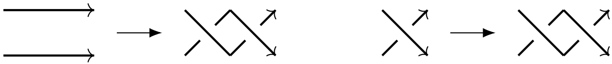


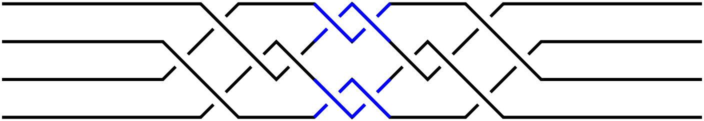


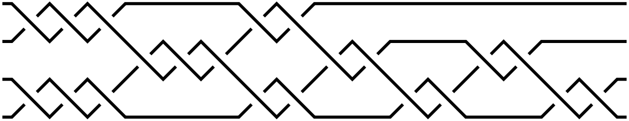


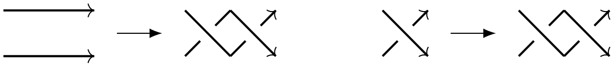


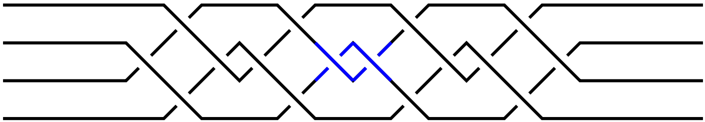


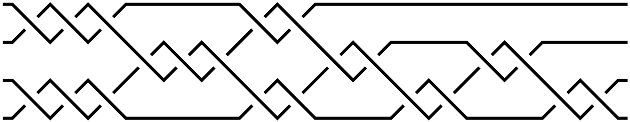


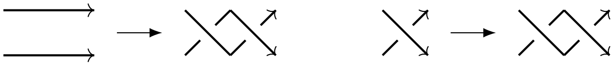


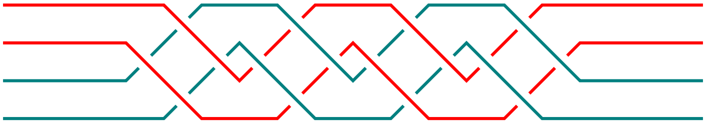


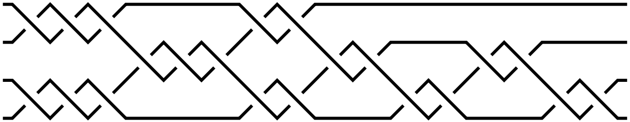


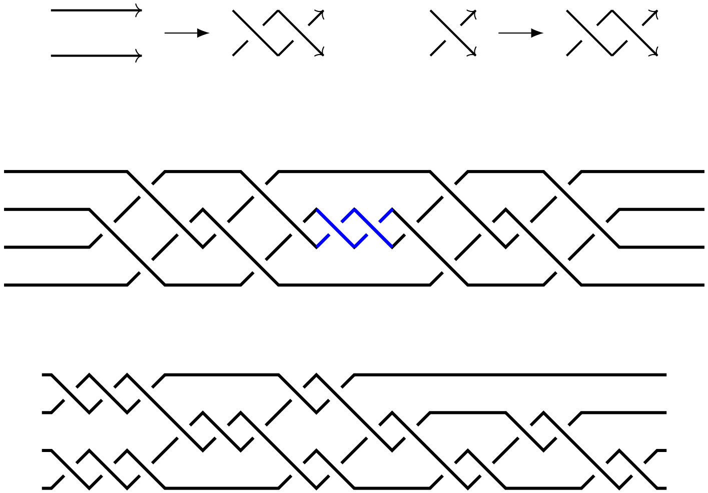


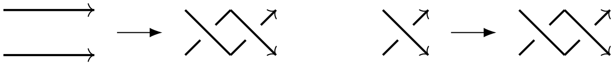


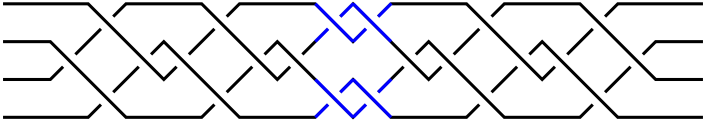


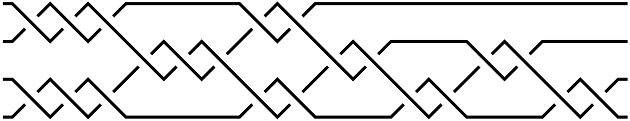


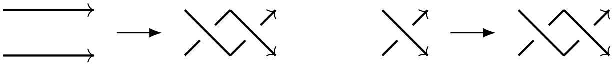


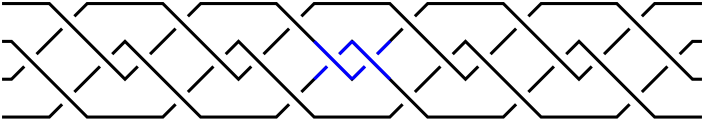


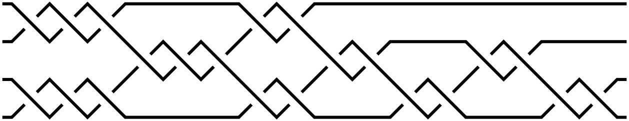


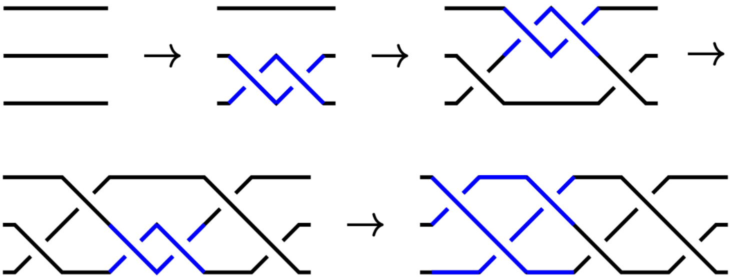


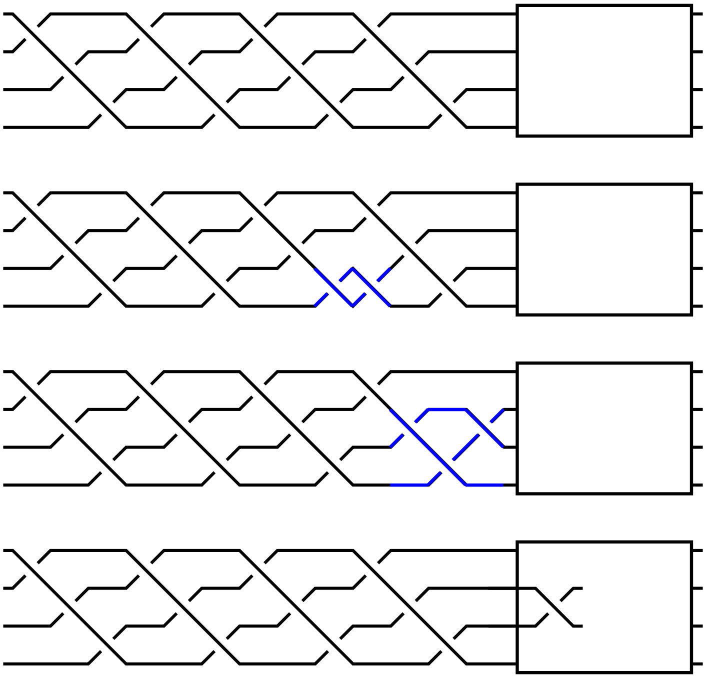


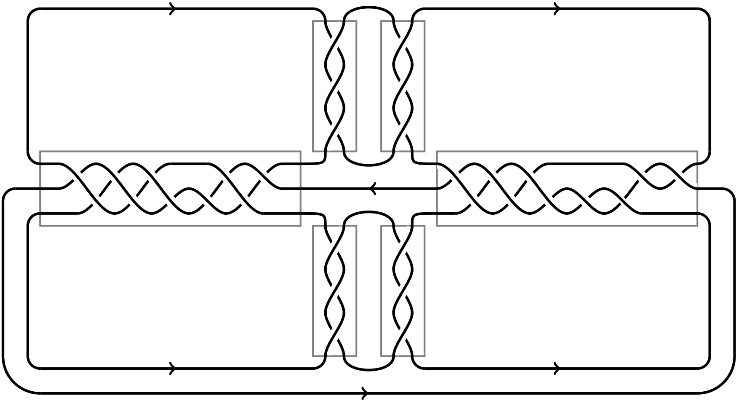








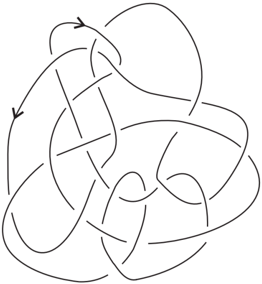


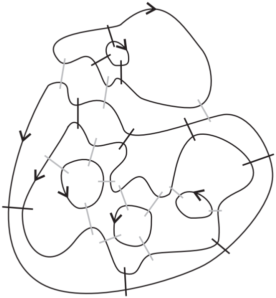


# Достижимость равенства в “верхнем” неравенстве

## Определение

Диаграмма называется *однородной*, если она является $*$–суммой Мурасуги положительных и отрицательных.





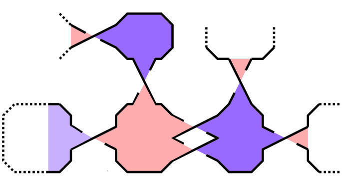
## Теорема (P. Cromwell; 1989)

Если диаграмма $\mathcal{D}$ однородна, то $\partial_z^+ \mathcal{P}(\mathcal{D}) = \mathrm{Cr}(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D}) + 1$.

## Достижимость равенства в “боковых” неравенствах

**Теорема (Y. Diao, G. Hetyei, P. Liu; 2019)**

Пусть диаграмма $\mathcal{D}$ альтернирована. Равенство в неравенстве $(\deg_a^+ \mathcal{P}_{\mathcal{L}} - \deg_a^- \mathcal{P}_{\mathcal{L}})/2 + 1 \leqslant s(\mathcal{D})$ достигается в том и только в том случае, если $\mathcal{D}$ не имеет одиноких перекрёстков.



# Достижимость равенства в "боковых" неравенствах

## Теорема (И.А; 2020)

Равенство в неравенстве $(\deg_a^+ \mathcal{P}_\mathcal{L} - \deg_a^- \mathcal{P}_\mathcal{L})/2 + 1 \leqslant s(\mathcal{D})$ достигается для диаграмм, "состоящих из однородных кос с полными оборотами в каждом слое".