Экстраполяционные теоремы в решетках измеримых функций

Д. В. Руцкий

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН (ПОМИ)

Вторая конференция Математических центров России,
Московский Государственный Университет
Москва, 7 ноября, 2022

Веса Макенхаупта

Пусть S — пространство однородного типа, такое, как $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{T}^n$ с мерой Лебега, а Ω — σ-конечное измеримое пространство для значений второй переменной.
Рассматриваются измеримые функции на $S \times \Omega$.

Веса Макенхаупта A_p

$$[w]_{\mathrm{A}_p} = \operatorname*{ess\,sup}_{\omega \in \Omega} \sup_{Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q w(\cdot,\omega) \cdot \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(\cdot,\omega)^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{1-p},$$

при $1 < p < \infty$;

$$[w]_{\mathrm{A}_1} = \|w^{-1} M w\|_{\mathrm{L}_\infty}, \quad Mf = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f|.$$

$$\mathrm{A}_\infty = \bigcup_{1<p<\infty} \mathrm{A}_p.$$

Экстраполяционная теорема Рубио де Франсиа

Рубио де Франсиа, 1982

Если для оператора T оценка

$$\int |Tf|^p w \leqslant C \int |f|^p w$$

выполнена при $1 \leqslant p = p_0 < \infty$ для всех весов $w \in \mathrm{A}_p$ с константой C, зависящей только от константы веса, то это же свойство имеет место при всех $1 < p < \infty$.

Имеется большое количество разнообразных обобщений и приложений, а также несколько различных подходов к этому результату. См., например, D. V. Cruz-Uribe, J. M. Martell, C. Pérez, Weights, Extrapolation and the theory of Rubio de Francia (2011).

Решётки измеримых функций

Определение

Квазинормированной решёткой измеримых функций на $S \times \Omega$ называется квазинормированное пространство X, являющееся порядковым идеалом: $|f| \leqslant g$ и $g \in X$, влечёт $f \in X$ и $\|f\|_X \leqslant \|g\|_X$.

- Примеры: весовые пространства Лебега $L_p(w)$, пространства Орлича, пространства Лебега с переменным показателем $L_{p(\cdot)}$.
- Также широко известны как Banach Function Spaces (BFS) или банаховы идеальные пространства.

Определение

Решётка X удовлетворяет свойству Фату, если для любой последовательности $f_j \in X$, $\|f_j\| \leqslant 1$, такой, что $f_j \to f$ почти всюду, также $f \in X$ и $\|f\| \leqslant 1$

Конструкции с решётками

- Порядково сопряжённая решётка X' определяется нормой $\|f\|_{X'} = \sup_{\|g\|_X \leqslant 1} \int |fg|$ для банаховых X.
- Степень решётки X^δ ($\frac{1}{\delta}$-конвексификация X), $\delta > 0$, определяется нормой $\|f\|_{X^\delta} = \left\| |f|^{\frac{1}{\delta}} \right\|^\delta$. $(L_p)^\delta = L_{p/\delta}$.
- Поточечное произведение $XY = \{fg \mid f \in X, g \in Y\}$ является квазибанахаовой решёткой с нормой $\|h\|_{XY} = \inf_{h=fg} \|f\|_X \|g\|_Y$.
- Произведение Кальдерона-Лозановского $X^{1-\theta} Y^\theta$, $0 < \theta < 1$ является банаховой решёткой, и во многих случаях совпадает с комплексным интерполяционным пространством $(X, Y)_\theta$. $(X^{1-\theta} Y^\theta)' = X'^{1-\theta} Y'^\theta$ для банаховых X и Y со свойством Фату.
- Теорема факторизации Лозановского: $L_1 = XX'$ для банаховых решёток X со свойством Фату.

Конструкции с решётками

- Весовые решётки удобно определять как $X(w) = \{fw \mid f \in X\}$ с нормой $\|g\|_{X(w)} = \|gw^{-1}\|_X$. При этом
$$\left(\int |f|^p w\right)^{1/p} = \|f\|_{\mathrm{L}_p\left(w^{-1/p}\right)}.$$
$X(w) = X\,\mathrm{L}_\infty(w)$, $[X(w)]' = X'(w^{-1})$.
- Поточечное умножение двойственно поточечному делению: $X' = (XY)'Y$.

Свойства регулярности

Определение

Пусть Y — квазинормированная решётка и M — какое-то множество положительных измеримых функций. Y называется M-регулярной с константой m, если для всех $f \in Y$ существуют мажоранты $g \geqslant |f|$, такие, что $g \in M \cap Y$ и $\|g\|_Y \leqslant m\|f\|_Y$.

A_1-регулярность эквивалентна ограниченности M.
BMO-регулярностью называется мажорируемость весами с $\log w \in \mathrm{BMO}$, это эквивалентно A_2 регулярности малых степеней решётки.

Абстрактная экстраполяция, умножение

Предложение

Пусть даны квазинормированные решётки X_0, X_1 и Y. Предположим, что Y M-регулярна с константой m, и для пары измеримых функций (f, g) выполнена оценка

$$\|g\|_{X_1(w)} \leqslant \|f\|_{X_0(w)}$$

для всех весов $w \in M \cap Y$. Тогда справедлива оценка

$$\|g\|_{X_1 Y} \leqslant m\|f\|_{X_0 Y}.$$

Действительно, $g = fh$ для $f \in X_1$, $h \in Y$ с оценками, и достаточно взять мажоранту w для h.

Абстрактная экстраполяция, деление

Предложение

Пусть даны квазинормированные решётки X_0, X_1 и Y, r-выпуклые при некотором $r > 0$ и удовлетворяющие свойству Фату. Предположим, что Y M-регулярна с константой m, и для пары измеримых функций (f, g) выполнена оценка

$$\|g\|_{X_1 Y(w^{-1})} \leqslant \|f\|_{X_0 Y(w^{-1})}$$

для всех весов $w \in M \cap Y$. Тогда справедлива оценка

$$\|g\|_{X_1} \leqslant m\|f\|_{X_0}.$$

Умножение двойственно делению

Предложение

Пусть X и Y — банаховы решётки со свойством Фату, причём решётка Y M-регулярна с константой m. Тогда для каждого $f \in X$ найдётся такой вес $w \in Y \cap M$, что

$$\|f\|_{XY(w^{-1})} \leqslant \|f\|_X \leqslant m\|f\|_{XY(w^{-1})}.$$

Действительно,

$$(1-\varepsilon)\|f\|_X \leqslant \int |fg| \leqslant \|f\|_{(XY)(w^{-1})}\|g\|_{(XY)'(w)}$$

для некоторого $g \in X' = (XY)'Y \subset (XY)'(w)$ с нормой 1.

Факторизованные веса

Определение

Пусть $\alpha, \beta \geqslant 0$. Вес w принадлежит классу F_β^α с константой m, если $w = \frac{u^\alpha}{v^\beta}$ для некоторых $u, v \in \mathrm{A}_1$ с константой m.

Заметим, что по теореме факторизации Джонса $\mathrm{A}_p = \mathrm{F}_{p-1}^1$ для $1 \leqslant p < \infty$. Этот класс весов имеет эквивалентную характеризацию в виде условия

$$\lim_{\substack{\alpha' \to \alpha + 0, \\ \beta' \to \beta + 0}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{\frac{1}{\alpha'}}(\cdot, \omega) \right)^{\alpha'} \left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{-\frac{1}{\beta'}}(\cdot, \omega) \right)^{\beta'} \leqslant C.$$

Регулярность весовых пространств Лебега

Предложение

Пусть $\alpha, \beta > 0$, $1 < t < \infty$ и $\alpha t > 1$. Решётка $\mathrm{L}_t(w)$ F_β^α-регулярна тогда и только тогда, когда $w \in \mathrm{F}_{\beta+1/t}^{\alpha-1/t}$.

Экстраполяция с ограниченным диапазоном

Пусть $0 < p, q < \infty$, $\alpha, \beta, \alpha - 1/q + 1/p, \beta + 1/q - 1/p > 0$. Оценка

$$\|g\|_{X_1 \mathrm{L}_p(w)} \leqslant \|f\|_{X_0 \mathrm{L}_p(w)}$$

для всех $w \in \mathrm{F}_\beta^\alpha$ эквивалентна оценке

$$\|g\|_{X_1 \mathrm{L}_q(w)} \leqslant \|f\|_{X_0 \mathrm{L}_q(w)}$$

для всех $w \in \mathrm{F}_{\beta+1/q-1/p}^{\alpha-1/q+1/p}$.

Спасибо

Спасибо за внимание!