

Свойства линейных методов формосохраняющего приближения

Сидоров Сергей Петрович

Математический центр «Математика технологий будущего»
(Саратовский государственный университет)
12 ноября 2022

Вторая конференция Математических центров России

- 1 Введение. Формосохраняющее приближение
- 2 Конусы
- 3 Ошибка приближения линейными формосохраняющими операторами
- 4 Оценка линейных поперечников
- 5 k -монотонная регрессия

1. Введение. Формосохраняющее приближение

В различных приложениях необходимо приближать функции, **сохраняя** такие свойства формы приближаемых функций, как **положительность, монотонность, выпуклость, вогнутость и т.п**

Функция f имеет **свойства формы** $\Leftrightarrow f$ принадлежит некоторому **конусу**.

Пусть X есть нормированное линейное пространство,
 V есть конус в X .

Говорят, что $f \in X$ **имеет форму в смысле конуса** V , если $f \in V$.

Приближение с сохранением

- положительности (коположительности)
- монотонности (комонотонности)
- выпуклости (ковыпуклости)
- ...
- k -выпуклости (ко k -выпуклости)

В различных приложениях необходимо приближать функции, **сохраняя** такие свойства формы приближаемых функций, как **положительность, монотонность, выпуклость, вогнутость и т.п**

Функция f имеет **свойства формы** $\Leftrightarrow f$ принадлежит некоторому **конусу**.

Пусть X есть нормированное линейное пространство,
 V есть конус в X .

Говорят, что $f \in X$ **имеет форму в смысле конуса** V , если $f \in V$.

Приближение с сохранением

- положительности (коположительности)
- монотонности (комонотонности)
- выпуклости (ковыпуклости)
- ...
- k -выпуклости (ко k -выпуклости)

В различных приложениях необходимо приближать функции, **сохраняя** такие свойства формы приближаемых функций, как **положительность, монотонность, выпуклость, вогнутость и т.п**

Функция f имеет **свойства формы** $\Leftrightarrow f$ принадлежит некоторому **конусу**.

Пусть X есть нормированное линейное пространство,
 V есть конус в X .

Говорят, что $f \in X$ **имеет форму в смысле конуса** V , если $f \in V$.

Приближение с сохранением

- положительности (коположительности)
- монотонности (комонотонности)
- выпуклости (ковыпуклости)
- ...
- k -выпуклости (ко k -выпуклости)

В различных приложениях необходимо приближать функции, **сохраняя** такие свойства формы приближаемых функций, как **положительность, монотонность, выпуклость, вогнутость и т.п**

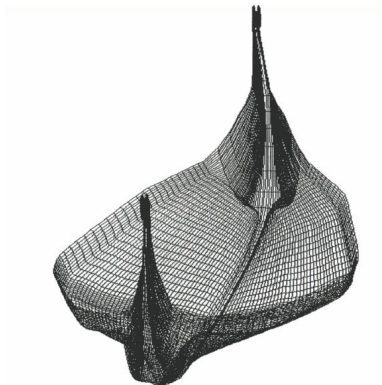
Функция f имеет **свойства формы** $\Leftrightarrow f$ принадлежит некоторому **конусу**.

Пусть X есть нормированное линейное пространство,
 V есть конус в X .

Говорят, что $f \in X$ **имеет форму в смысле конуса** V , если $f \in V$.

Приближение с сохранением

- положительности (коположительности)
- монотонности (комонотонности)
- выпуклости (ковыпуклости)
- ...
- k -выпуклости (ко k -выпуклости)



Основные приложения теории
формосохраняющего
приближения

- CAGD (Computer-Aided Geometric Design);
- Industrial Design.

Pál, 1925

Popoviciu, 1937

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

Shisha, 1965

Lorentz and Zeller, 1970

DeVore, 1980

Shvedov, 1980

Newman, 1979

Beatson and Leviatan, 1983

- 1 **Изучение формосохраняющих свойств интерполяционных полиномов** (в алфавитном порядке: Б. И. Квасов, F. Deutch, S. Gal, W. J. Kammerer, K. Kopotun, G. G. Lorenz, M. G. Nikolcheva, E. Passow, T. Popoviciu, J. A. Roulier, Z. Rubinstein, J. Szabados, W. Wolibner, S. W. Young, K. L. Zeller и др.);
- 2 **Исследование формосохраняющих свойств сплайнов** (в алфавитном порядке: Ю. С. Волков, Б. И. Квасов, Ю. Н. Субботин, В. Т. Шевалдин, И. А. Шевчук, R. DeVore, K. Kopotun, D. Leviatan, A. Shadrin и др.);
- 3 **Исследование формосохраняющих свойств полиномов типа полиномов Бернштейна** (в алфавитном порядке: H. Berens, P. L. Butzer, J. M. Carnicer, W. Dahmen, M. M. Derrienic, R. DeVore, A. D. Gadzijev, T. N. T. Goodman, I. I. Ibragimov, L. M. Kocić, I. B. Lacković, C. A. Micchelli, F. J. Muñoz-Delgado, R. J. Nessel, V. Ramírez-González, I. Raşa, P. Sablonière, D. D. Stancu, B. Wood и др.);
- 4 **Результаты типа результатов Шиша** (G. A. Anastassiou, J. A. Roulier, O. Shisha и др.);
- 5 **Результаты типа результатов Коровкина** (D. Cárdenas-Morales, H. Gonska, H.-B. Knoop, F. J. Muñoz-Delgado, P. Pottinger, V. Ramírez-González и др.).

- ❶ Shevchuk I.A. Polynomial Approximation and Traces of Functions Continuous on a Segment, Naukova Dumka. 1992
- ❷ Danny Leviatan. *Shape-preserving approximation by polynomials and splines*, in "Approximation Theory and Functions Series". 1996
- ❸ Kocić Lj. M., Milovanović. *Shape-preserving approximation by polynomials and splines*, Comput. Math. Appl., 33 (11), 1997
- ❹ Danny Leviatan. *Shape-preserving approximation by polynomials*, Journal of Computational and Applied Mathematics. (121), 2000
- ❺ Sorin G. Gal. *Shape-Preserving Approximation by Real and Complex Polynomials*, Springer, 2008.
- ❻ K. A. Kopotun, D. Leviatan, A. Prymak, I. A. Shevchuk. *Uniform and Pointwise Shape Preserving Approximation by Algebraic Polynomials*, 2011
- ❼ Шевалдин В.Т. *Аппроксимация локальными сплайнами*. Екатеринбург. 2014. 198 с.
- ❽ С. П. Сидоров, *Линейные методы формосохраняющего приближения*, Изд-во Сарат. ун-та, Саратов, 2017 , 164 с.

X – нормированное линейное пространство

X_n – n -мерное подпространство X

V – конус в X

- ❶ **наилучшее (формосохраняющее) приближение**

$$f \in X \cap V, E(f; X_n \cap V) = \inf_{g \in X_n \cap V} \|f - g\|_X$$

- ❷ **уклонение $A \cap V$ от $X_n \cap V$**

$$A \subset X, E(A \cap V; X_n \cap V) = \sup_{f \in A \cap V} \inf_{g \in X_n \cap V} \|f - g\|_X$$

- ❸ **относительные n -поперечники A в X с условием V (Коновалов, 1984)**

$$d_n(A \cap V; V)_X = \inf_{X_n \cap V} \sup_{f \in A \cap V} \inf_{g \in X_n \cap V} \|f - g\|_X,$$

левый инфимум берется среди всех n -мерных подпространств X_n пространства X , таких, что $X_n \cap V \neq \emptyset$.

- ❹ **относительные линейные n -поперечники** множества A в X с условием V

$$\delta_n(A, V)_X := \inf_{L_n(V) \subset V} \sup_{f \in A} \|f - L_n f\|_X$$

2. Конусы

Определение 1

Пусть Δ^k означает множество всех k -монотонных функций, определенных на $[0, 1]$.

Определение 2

Говорят, что функция $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ является k -монотонной, $k \geq 1$, на $[0, 1]$, если для всех $k + 1$ различных $t_0, \dots, t_k$ из $[0, 1]$ выполняется равенство

$$[t_0, \dots, t_k]f \geq 0$$

где $[t_0, \dots, t_k]f = \sum_{j=0}^k (f(t_j)/w'(t_j))$ означает разделенную разность порядка k функции f по узлам $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k \leq 1$, и $w(t) = \prod_{j=0}^k (t - t_j)$.

Пусть $0 \leq h \leq k$ – два целых числа и
 $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_k) \in R^{k+1}$
 $\sigma_i \in \{-1, 0, 1\}$, $\sigma_h \sigma_k \neq 0$

Определение 3

Рассмотрим конус

$$\Delta^{h,k}(\sigma) := \{f \in C[0, 1] : \sigma_i f \in \Delta^i[0, 1], \ h \leq i \leq k\}.$$

Определение 1

Пусть Δ^k означает множество всех k -монотонных функций, определенных на $[0, 1]$.

Определение 2

Говорят, что функция $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ является k -монотонной, $k \geq 1$, на $[0, 1]$, если для всех $k + 1$ различных $t_0, \dots, t_k$ из $[0, 1]$ выполняется равенство

$$[t_0, \dots, t_k]f \geq 0$$

где $[t_0, \dots, t_k]f = \sum_{j=0}^k (f(t_j)/w'(t_j))$ означает разделенную разность порядка k функции f по узлам $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k \leq 1$, и $w(t) = \prod_{j=0}^k (t - t_j)$.

Пусть $0 \leq h \leq k$ – два целых числа и $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_k) \in R^{k+1}$
 $\sigma_i \in \{-1, 0, 1\}$, $\sigma_h \sigma_k \neq 0$

Определение 3

Рассмотрим конус

$$\Delta^{h,k}(\sigma) := \{f \in C[0, 1] : \sigma_i f \in \Delta^i[0, 1], \ h \leq i \leq k\}.$$

$u_0, \dots, u_m \in C^m[0, 1]$ — обобщённая полная система Чебышева на $[0, 1]$.

Определение 4

Говорят, что функция f , определённая на $[0, 1]$, является **выпуклой по отношению к системе** $u_0, \dots, u_m$ (при этом пишут $f \in C(u_0, \dots, u_m)$), если

$$\begin{vmatrix} u_0(t_0) & u_0(t_1) & \dots & u_0(t_{m+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_m(t_0) & u_m(t_1) & \dots & u_m(t_{m+1}) \\ f(t_0) & f(t_1) & \dots & f(t_{m+1}) \end{vmatrix} \geq 0$$

для произвольных наборов точек $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_{m+1} < 1$.

Пусть $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_k) \in R^{k+1}$,

$\sigma_i \in \{-1, 0, 1\}$,

h, k — два целых числа, таких, что $\sigma_h \sigma_k \neq 0$.

$u_0, \dots, u_{k-1} \in C^{k-1}[0, 1]$ — обобщённая полная система Чебышева на $[0, 1]$.

Определение 5

$$V_{l+1} := \{f \in C^l[0, 1] : f \in C(u_0, \dots, u_l)\}, \quad l = 0, \dots, k-1,$$

$$V_0 := \Delta^0$$

Определение 6 (Конус)

$$V_{h,k}(\sigma) = \cap_{l=h}^k \sigma_l V_l.$$

$u_0, \dots, u_m \in C^m[0, 1]$ — обобщённая полная система Чебышева на $[0, 1]$.

Определение 4

Говорят, что функция f , определённая на $[0, 1]$, является **выпуклой по отношению к системе** $u_0, \dots, u_m$ (при этом пишут $f \in C(u_0, \dots, u_m)$), если

$$\begin{vmatrix} u_0(t_0) & u_0(t_1) & \dots & u_0(t_{m+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_m(t_0) & u_m(t_1) & \dots & u_m(t_{m+1}) \\ f(t_0) & f(t_1) & \dots & f(t_{m+1}) \end{vmatrix} \geq 0$$

для произвольных наборов точек $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_{m+1} < 1$.

Пусть $\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_k) \in R^{k+1}$,

$\sigma_i \in \{-1, 0, 1\}$,

h, k — два целых числа, таких, что $\sigma_h \sigma_k \neq 0$.

$u_0, \dots, u_{k-1} \in C^{k-1}[0, 1]$ — обобщённая полная система Чебышева на $[0, 1]$.

Определение 5

$$V_{l+1} := \{f \in C^l[0, 1] : f \in C(u_0, \dots, u_l)\}, \quad l = 0, \dots, k-1,$$

$$V_0 := \Delta^0$$

Определение 6 (Конус)

$$V_{h,k}(\sigma) = \cap_{l=h}^k \sigma_l V_l.$$

Если $u_0, \dots, u_{k-1} \in C^{k-1}[0, 1]$ удовлетворяют начальным условиям $u_l^{(p)} = 0$, $p = 0, \dots, l-1$, $l = 1, \dots, k-1$, то система $u_0, \dots, u_{k-1}$ может быть представлена в виде

$$u_0(t) = \omega_0(t),$$

$$u_l(t) = \omega_0(t) \int_0^t \omega_1(\zeta_1) \int_0^{\zeta_1} \omega_2(\zeta_2) \dots \int_0^{\zeta_{l-1}} \omega_l(\zeta_l) d\zeta_l \dots d\zeta_1, \quad l = 1, \dots, k-1,$$

где $\omega_0, \dots, \omega_{k-1}$ есть строго положительные на $[0, 1]$ функции такие, что $\omega_l \in C^{k-1-l}[0, 1]$, $l = 0, \dots, k-1$.

Пусть D_j , $j = 0, \dots, k-1$, означает дифференциальный оператор первого порядка

$$(D_j f)(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{f(t)}{\omega_j(t)} \right).$$

Обозначим

$$D^{[r]} = D_{r-1} \dots D_0, \quad r = 1, \dots, k-1, \quad D^{[0]} := I$$

Конус

$$V_{h,k}(\sigma) = \{f \in C^k[0, 1] : \sigma_i D^{[i]} f \geq 0, \quad i = h, \dots, k\}$$

Если $u_0, \dots, u_{k-1} \in C^{k-1}[0, 1]$ удовлетворяют начальным условиям $u_l^{(p)} = 0$, $p = 0, \dots, l-1$, $l = 1, \dots, k-1$, то система $u_0, \dots, u_{k-1}$ может быть представлена в виде

$$u_0(t) = \omega_0(t),$$

$$u_l(t) = \omega_0(t) \int_0^t \omega_1(\zeta_1) \int_0^{\zeta_1} \omega_2(\zeta_2) \dots \int_0^{\zeta_{l-1}} \omega_l(\zeta_l) d\zeta_l \dots d\zeta_1, \quad l = 1, \dots, k-1,$$

где $\omega_0, \dots, \omega_{k-1}$ есть строго положительные на $[0, 1]$ функции такие, что $\omega_l \in C^{k-1-l}[0, 1]$, $l = 0, \dots, k-1$.

Пусть D_j , $j = 0, \dots, k-1$, означает дифференциальный оператор первого порядка

$$(D_j f)(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{f(t)}{\omega_j(t)} \right).$$

Обозначим

$$D^{[r]} = D_{r-1} \dots D_0, \quad r = 1, \dots, k-1, \quad D^{[0]} := I$$

Конус

$$V_{h,k}(\sigma) = \{f \in C^k[0, 1] : \sigma_i D^{[i]} f \geq 0, \quad i = h, \dots, k\}$$

3. Ошибка приближения линейными формосохраняющими операторами

Линейные положительные операторы

Определение 7

Линейный оператор $L : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ называется **положительным**, если

$$L(\Delta^0) \subset \Delta^0,$$

где

$$\Delta^0 = \{f \in C[0, 1] : f \geq 0\},$$

Утверждение 1 (Shisha and Mond, 1968)

Пусть $L_n : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, $n \geq 1$, есть последовательность линейных операторов таких, что $L_n(\Delta^0) \subset \Delta^0$. Тогда для всякой $f \in C[0, 1]$ и любых $x \in (0, 1)$ и $\delta_n > 0$

$$|f(x) - L_n f(x)| \leq |f(x)| |e_0(x) - L_n e_0(x)| + (L_n e_0(x) + \delta_n^{-2} \beta_n^2(x)) \omega(f, \delta_n),$$

где

$$\beta_n^2(x) = L_n (e_2 - 2xe_1 + x^2 e_0) (x).$$

- Теоремы Коровкина для последовательностей ЛПО
- Оценки скорости сходимости для конкретных последовательностей ЛПО

Можем ли мы обобщить результаты на случай формосохраняющих операторов?

Линейные положительные операторы

Определение 7

Линейный оператор $L : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ называется **положительным**, если

$$L(\Delta^0) \subset \Delta^0,$$

где

$$\Delta^0 = \{f \in C[0, 1] : f \geq 0\},$$

Утверждение 1 (Shisha and Mond, 1968)

Пусть $L_n : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, $n \geq 1$, есть последовательность линейных операторов таких, что $L_n(\Delta^0) \subset \Delta^0$. Тогда для всякой $f \in C[0, 1]$ и любых $x \in (0, 1)$ и $\delta_n > 0$

$$|f(x) - L_n f(x)| \leq |f(x)| |e_0(x) - L_n e_0(x)| + (L_n e_0(x) + \delta_n^{-2} \beta_n^2(x)) \omega(f, \delta_n),$$

где

$$\beta_n^2(x) = L_n (e_2 - 2xe_1 + x^2 e_0) (x).$$

- Теоремы Коровкина для последовательностей ЛПО
- Оценки скорости сходимости для конкретных последовательностей ЛПО

Можем ли мы обобщить результаты на случай формосохраняющих операторов?

Линейные положительные операторы

Определение 7

Линейный оператор $L : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ называется **положительным**, если

$$L(\Delta^0) \subset \Delta^0,$$

где

$$\Delta^0 = \{f \in C[0, 1] : f \geq 0\},$$

Утверждение 1 (Shisha and Mond, 1968)

Пусть $L_n : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$, $n \geq 1$, есть последовательность линейных операторов таких, что $L_n(\Delta^0) \subset \Delta^0$. Тогда для всякой $f \in C[0, 1]$ и любых $x \in (0, 1)$ и $\delta_n > 0$

$$|f(x) - L_n f(x)| \leq |f(x)| |e_0(x) - L_n e_0(x)| + (L_n e_0(x) + \delta_n^{-2} \beta_n^2(x)) \omega(f, \delta_n),$$

где

$$\beta_n^2(x) = L_n (e_2 - 2xe_1 + x^2 e_0) (x).$$

- Теоремы Коровкина для последовательностей ЛПО
- Оценки скорости сходимости для конкретных последовательностей ЛПО

Можем ли мы обобщить результаты на случай формосохраняющих операторов?

- X есть компакт в $\mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^X$ есть пространство всех действительныхзначных функций, определённых на X
- B есть подмножество $\mathbb{R}^X$
- A есть подпространство $C(X)$, $A \subset B$
- $K : B \rightarrow \mathbb{R}^X$ есть линейный оператор, такой что $K(A) \subset C(X)$
- $P = \{f \in B : Kf \geq 0\}$
- V есть конус в A

Пусть $U = \text{span } \{u_i\}_{i \in I}$ есть подпространство в A удовлетворяющее

- 1 существует $u \in U$ такой, что $Ku(t) = 1$ для всех $t \in X$;
- 2 для всякого $x \in X$ найдётся $\phi_x \in V \cap U$ такая, что
 - $K\phi_x(x) = 0 < K\phi_x(t)$ для всех $t \in X \setminus x$
 - $\forall f \in A, \exists \alpha = \alpha(f) > 0: \beta > \alpha \Rightarrow \beta\phi_x + f \in V$
 - найдутся функции $\{a_i\}_{i \in I}$ определённые на X , такие, что для всех $x, t \in X$ выполняется $K\phi_x(t) \geq cKh_x(t)$, где $\phi_x := \sum_{i \in I} a_i(x)u_i$, c есть положительное число, не зависящее от x и t , и h_x удовлетворяет $Kh_x(t) = (t - x)^2$.

- X есть компакт в $\mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^X$ есть пространство всех действительныхзначных функций, определённых на X
- B есть подмножество $\mathbb{R}^X$
- A есть подпространство $C(X)$, $A \subset B$
- $K : B \rightarrow \mathbb{R}^X$ есть линейный оператор, такой что $K(A) \subset C(X)$
- $P = \{f \in B : Kf \geq 0\}$
- V есть конус в A

Пусть $U = \text{span } \{u_i\}_{i \in I}$ есть подпространство в A удовлетворяющее

- 1 существует $u \in U$ такой, что $Ku(t) = 1$ для всех $t \in X$;
- 2 для всякого $x \in X$ найдётся $\phi_x \in V \cap U$ такая, что
 - $K\phi_x(x) = 0 < K\phi_x(t)$ для всех $t \in X \setminus x$
 - $\forall f \in A, \exists \alpha = \alpha(f) > 0: \beta > \alpha \Rightarrow \beta\phi_x + f \in V$
 - найдутся функции $\{a_i\}_{i \in I}$ определённые на X , такие, что для всех $x, t \in X$ выполняется $K\phi_x(t) \geq cKh_x(t)$, где $\phi_x := \sum_{i \in I} a_i(x)u_i$, c есть положительное число, не зависящее от x и t , и h_x удовлетворяет $Kh_x(t) = (t - x)^2$.

Лемма 1

Пусть $\{L_n\}_{n \geq 1}$, $L_n : A \rightarrow B$, есть последовательность линейных операторов, удовлетворяющих $L_n(P \cap V) \subset P$ для всех $n \geq 1$. Тогда для всякой $f \in A$ и любого $n = 1, 2, \dots$

$$|(Kf - K(L_n f))(x)| \leq |Kf(x)| \cdot |(K(L_n u) - Ku)(x)| + |(K(L_n u) + \beta \mu_n^2(x) \delta_n^{-2})(x)| \omega(Kf, \delta_n), \quad (1)$$

где ω модуль непрерывности,

$\omega(f, \delta) := \sup\{|f(x+h) - f(x)| : x, x+h \in X, 0 \leq h \leq \delta\}$, $\beta = \beta(x, f) \geq 1$ есть константа и

$$\mu_n^2(x) = c^{-1} K(L_n \phi_x)(x).$$

D^i означает оператор дифференцирования порядка i , $D^i f(x) = \frac{d^i f}{dx^i}$

$D^0 = I$ есть тождественный оператор

$C^k[0, 1]$, $k \geq 0$, пространство всех действительныхзначных k -раз непрерывно дифференцируемых функций, определённых на $[0, 1]$

Теорема 1

Пусть $L_n : C^k[0, 1] \rightarrow C^k[0, 1]$, $n \geq 1$, есть последовательность линейных операторов таких, что $L_n(\Delta^k) \subset \Delta^k$. Тогда для всякой $f \in C^k[0, 1]$ и любых $x \in (0, 1)$ и $\delta_n > 0$

$$|D^k f(x) - D^k L_n f(x)| \leq \frac{1}{k!} |D^k f(x)| |D^k e_k(x) - D^k L_n e_k(x)| + \left(\frac{1}{k!} D^k L_n e_k(x) + \delta_n^{-2} \beta_n^2(x) \right) \omega(D^k f, \delta_n), \quad (2)$$

где

$$\beta_n^2(x) = D^k L_n \left(\frac{2}{(k+2)!} e_{k+2} - \frac{2}{(k+1)!} x e_{k+1} + \frac{1}{k!} x^2 e_k \right) (x).$$

D^i означает оператор дифференцирования порядка i , $D^i f(x) = \frac{d^i f}{dx^i}$

$D^0 = I$ есть тождественный оператор

$C^k[0, 1]$, $k \geq 0$, пространство всех действительныхзначных k -раз непрерывно дифференцируемых функций, определённых на $[0, 1]$

Теорема 1

Пусть $L_n : C^k[0, 1] \rightarrow C^k[0, 1]$, $n \geq 1$, есть последовательность линейных операторов таких, что $L_n(\Delta^k) \subset \Delta^k$. Тогда для всякой $f \in C^k[0, 1]$ и любых $x \in (0, 1)$ и $\delta_n > 0$

$$|D^k f(x) - D^k L_n f(x)| \leq \frac{1}{k!} |D^k f(x)| |D^k e_k(x) - D^k L_n e_k(x)| + \left(\frac{1}{k!} D^k L_n e_k(x) + \delta_n^{-2} \beta_n^2(x) \right) \omega(D^k f, \delta_n), \quad (2)$$

где

$$\beta_n^2(x) = D^k L_n \left(\frac{2}{(k+2)!} e_{k+2} - \frac{2}{(k+1)!} x e_{k+1} + \frac{1}{k!} x^2 e_k \right) (x).$$

(Pórovićiu, 1937): если f есть k -монотонная на $[0,1]$, тогда полином Бернштейна $B_n f(x) := \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} f\left(\frac{i}{n}\right)$ также k -монотонен на $[0,1]$.

Работы (Cardenas et al., 2006, 2008, 2011), (Bede, 2009), (Radu-2012), (Floater, 2005) исследуют свойства сохранения формы и сходимости последовательностей линейных операторов типа Бернштейна.

Следствие 1

Пусть $2 < k < n$. Тогда

$$|D^k f(x) - D^k B_n f(x)| \leq \frac{k}{2n} |D^k f(x)| + \left[1 + \frac{k}{2n} + a_{k-1}(n) \delta_n^{-2} \left(x^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{k(k+1)}{n^2} \right) - x \frac{k^2 - 1}{n} + \frac{k^2}{4n^2} \right) \right] \omega(D^k f, \delta_n). \quad (3)$$

$$a_p(n) := \prod_{i=1}^p \left(1 - \frac{i}{n} \right), \quad 1 \leq p \leq n$$

Теорема 2

Пусть $L_n : C^k[0, 1] \rightarrow C^k[0, 1]$, $n \geq 1$, есть последовательность линейных операторов таких, что $L_n(\Delta^{h,k}) \subset \sigma_k \Delta^k$. Тогда для всякой $f \in C^k[0, 1]$ и любых $x \in (0, 1)$ и $\delta_n > 0$

$$|D^k f(x) - D^k L_n f(x)| \leq \frac{1}{k!} |D^k f(x)| |D^k e_k(x) - D^k L_n e_k(x)| + \left(\frac{1}{k!} D^k L_n e_k(x) + \beta \delta_n^{-2} \alpha_n^2(x) \right) \omega(D^k f, \delta_n), \quad (4)$$

где

$$\alpha_n^2(x) = D^k L_n \left(\frac{2}{(k+2)!} e_{k+2} - \frac{2}{(k+1)!} x e_{k+1} + \frac{1}{k!} x^2 e_k + \sum_h^{k-1} c_i e_i \right) (x),$$

для некоторых $c_i > 0$ и $\beta \geq 1$.

$$e_j(t) = t^j, j = 0, 1, \dots$$

$$\|f\| = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

Теорема 3 (Коровкин, 1952)

Пусть $\{L_n\}_{n \geq 1}$, $L_n : C[0, 1] \rightarrow B[0, 1]$, — последовательность линейных операторов, таких что

- ❶ $L_n(\Delta^0) \subset \Delta^0$, $n \geq 1$,
- ❷ $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(L_n - I)e_j\| = 0$, $j = 0, 1, 2$,

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(L_n - I)f\| = 0$$

для всех $f \in C[0, 1]$.

$u_0, \dots, u_{k+2} \in C^{k+2}[0, 1]$ — обобщённая полная система Чебышева на $[0, 1]$,
 $D^{[k]}u_k = e_0$.
 $V_{h,k}(\sigma) = \cap_{l=h}^k \sigma_l V_l$

Теорема 4

Пусть $L_n : C^k[0, 1] \rightarrow C^k[0, 1]$, $n \geq 1$, — последовательность линейных операторов. Если

- ❶ $L_n(V_{h,k}(\sigma)) \subset V_{h,k}(\sigma)$,
- ❷ $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^{[k]}(L_n - I)u_j\| = 0$, $j = h, \dots, k+2$,

то $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^{[k]}(L_n - I)f\| = 0$ для всех $f \in C^k[0, 1]$.

Следствие 2 (F. J. Muñoz-Delgado et al., 1998)

Пусть $L_n : C^k[0, 1] \rightarrow C^k[0, 1]$, $n \geq 1$, есть последовательность линейных операторов. Если

- ❶ $L_n(\Delta^{h,k}(\sigma)) \subset \Delta^{h,k}(\sigma)$,
- ❷ $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^k(L_n - I)e_j\| = 0$, $j = h, \dots, k+2$,

то $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^k(L_n - I)f\| = 0$ для всех $f \in C^k[0, 1]$.

$u_0, \dots, u_{k+2} \in C^{k+2}[0, 1]$ — обобщённая полная система Чебышева на $[0, 1]$,
 $D^{[k]}u_k = e_0$.
 $V_{h,k}(\sigma) = \cap_{l=h}^k \sigma_l V_l$

Теорема 4

Пусть $L_n : C^k[0, 1] \rightarrow C^k[0, 1]$, $n \geq 1$, — последовательность линейных операторов. Если

- ❶ $L_n(V_{h,k}(\sigma)) \subset V_{h,k}(\sigma)$,
- ❷ $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^{[k]}(L_n - I)u_j\| = 0$, $j = h, \dots, k+2$,

то $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^{[k]}(L_n - I)f\| = 0$ для всех $f \in C^k[0, 1]$.

Следствие 2 (F. J. Muñoz-Delgado et al., 1998)

Пусть $L_n : C^k[0, 1] \rightarrow C^k[0, 1]$, $n \geq 1$, есть последовательность линейных операторов. Если

- ❶ $L_n(\Delta^{h,k}(\sigma)) \subset \Delta^{h,k}(\sigma)$,
- ❷ $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^k(L_n - I)e_j\| = 0$, $j = h, \dots, k+2$,

то $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^k(L_n - I)f\| = 0$ для всех $f \in C^k[0, 1]$.

$u_0, \dots, u_k \in C^k[0, 1]$ — обобщённая полная система Чебышева на $[0, 1]$

$$V_{h,k}(\sigma) = \cap_{l=h}^k \sigma_l V_l$$

$$\Gamma := \{i : h \leq i < k, \sigma_i \neq 0, \sigma_{i+1} = 0, \sigma_i \cdot \sigma_{i+2} \neq -1\}$$

Теорема 5

Пусть $V_{h,k}(\sigma)$ есть конус, $\Gamma \neq \emptyset$. Пусть $r \in \Gamma$ и $D^{[r]}u_r = e_0$, $D^{[r]}u_{r+1} = e_1$. Пусть $L_n : C^k[0, 1] \rightarrow C^r[0, 1]$, $n \geq 1$, есть последовательность линейных операторов. Если

- 1 $L_n(V_{h,k}(\sigma)) \subset V_{h,k}(\sigma)$,
- 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^{[r]}(L_n - I)u_j\| = 0$, $j = h, \dots, k$,

то $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^{[r]}(L_n - I)f\| = 0$ для любой $f \in C^r[0, 1]$.

Следствие 3 (F. J. Muñoz-Delgado et al., 1998)

Пусть $\Delta^{h,k}(\sigma)$ есть конус такой, что $\Gamma \neq \emptyset$. Пусть $r \in \Gamma$ и $L_n : C^k[0, 1] \rightarrow C^k[0, 1]$, $n \geq 1$, есть последовательность линейных операторов. Если

- 1 $L_n(\Delta^{h,k}(\sigma)) \subset \Delta^{h,k}(\sigma^{[r]})$,
- 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^r(L_n - I)e_j\| = 0$, $j = h, \dots, k$,

то $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^r(L_n - I)f\| = 0$ для всех $f \in C^r[0, 1]$.

$u_0, \dots, u_k \in C^k[0, 1]$ — обобщённая полная система Чебышева на $[0, 1]$

$$V_{h,k}(\sigma) = \cap_{l=h}^k \sigma_l V_l$$

$$\Gamma := \{i : h \leq i < k, \sigma_i \neq 0, \sigma_{i+1} = 0, \sigma_i \cdot \sigma_{i+2} \neq -1\}$$

Теорема 5

Пусть $V_{h,k}(\sigma)$ есть конус, $\Gamma \neq \emptyset$. Пусть $r \in \Gamma$ и $D^{[r]}u_r = e_0$, $D^{[r]}u_{r+1} = e_1$. Пусть $L_n : C^k[0, 1] \rightarrow C^r[0, 1]$, $n \geq 1$, есть последовательность линейных операторов. Если

- 1 $L_n(V_{h,k}(\sigma)) \subset V_{h,k}(\sigma)$,
- 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^{[r]}(L_n - I)u_j\| = 0$, $j = h, \dots, k$,

то $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^{[r]}(L_n - I)f\| = 0$ для любой $f \in C^r[0, 1]$.

Следствие 3 (F. J. Muñoz-Delgado et al., 1998)

Пусть $\Delta^{h,k}(\sigma)$ есть конус такой, что $\Gamma \neq \emptyset$. Пусть $r \in \Gamma$ и $L_n : C^k[0, 1] \rightarrow C^k[0, 1]$, $n \geq 1$, есть последовательность линейных операторов. Если

- 1 $L_n(\Delta^{h,k}(\sigma)) \subset \Delta^{h,k}(\sigma^{[r]})$,
- 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^r(L_n - I)e_j\| = 0$, $j = h, \dots, k$,

то $\lim_{n \rightarrow \infty} \|D^r(L_n - I)f\| = 0$ для всех $f \in C^r[0, 1]$.

4. Оценки линейных относительных поперечников

$$e_i(x) = x^i, i = 0, 1, \dots$$

$$\Pi_m := \text{span}\{e_0, e_1, \dots, e_m\}$$

$$P_m^* := \{f \in \Pi_m : \|f\|_{C^m[0,1]} \leq 1\}$$

$$\|f\|_{C^k[0,1]} = \sum_{0 \leq i \leq k} \frac{1}{i!} \sup_{x \in [0,1]} |D^i f(x)|$$

Теорема 6

Существуют $c_1, c_2 > 0$, не зависящие от n , такие, что

$$c_1 n^{-2} < \inf_{L_n(\Delta^k) \subset \Delta^k} \sup_{f \in P_{k+2}^*} \|f - L_n f\|_{C^k[0,1]} < c_2 n^{-2}.$$

Теорема 7

Существуют $c_1, c_2 > 0$, не зависящие от n , такие, что

$$c_1 n^{-2} < \inf_{L_n(\Delta^{h,k}(\sigma)) \subset \Delta^{h,k}(\sigma)} \sup_{f \in P_{k+2}^*} \|f - L_n f\|_{C^k[0,1]} < c_2 n^{-2}. \quad (5)$$

$$\Gamma := \{i : h \leq i < k, \sigma_i \neq 0, \sigma_{i+1} = 0, \sigma_i \cdot \sigma_{i+2} \neq -1\}$$

Теорема 8

Пусть $n \geq k + r$, $\Gamma \neq \emptyset$ и $r \in \Gamma$. Тогда существуют $c_1, c_2 > 0$, не зависящие от n , такие, что

$$c_1 n^{-(k-r)} < \inf_{L_n(\Delta^{h,k}(\sigma)) \subset \Delta^{h,k}(\sigma)} \sup_{f \in P_k} \|f - L_n f\|_{C^r[0,1]} < c_2 n^{-(k-r)}, \quad (6)$$

$$e_i(x) = x^i, i = 0, 1, \dots$$

$$\Pi_m := \text{span}\{e_0, e_1, \dots, e_m\}$$

$$P_m^* := \{f \in \Pi_m : \|f\|_{C^m[0,1]} \leq 1\}$$

$$\|f\|_{C^k[0,1]} = \sum_{0 \leq i \leq k} \frac{1}{i!} \sup_{x \in [0,1]} |D^i f(x)|$$

Теорема 6

Существуют $c_1, c_2 > 0$, не зависящие от n , такие, что

$$c_1 n^{-2} < \inf_{L_n(\Delta^k) \subset \Delta^k} \sup_{f \in P_{k+2}^*} \|f - L_n f\|_{C^k[0,1]} < c_2 n^{-2}.$$

Теорема 7

Существуют $c_1, c_2 > 0$, не зависящие от n , такие, что

$$c_1 n^{-2} < \inf_{L_n(\Delta^{h,k}(\sigma)) \subset \Delta^{h,k}(\sigma)} \sup_{f \in P_{k+2}^*} \|f - L_n f\|_{C^k[0,1]} < c_2 n^{-2}. \quad (5)$$

$$\Gamma := \{i : h \leq i < k, \sigma_i \neq 0, \sigma_{i+1} = 0, \sigma_i \cdot \sigma_{i+2} \neq -1\}$$

Теорема 8

Пусть $n \geq k + r$, $\Gamma \neq \emptyset$ и $r \in \Gamma$. Тогда существуют $c_1, c_2 > 0$, не зависящие от n , такие, что

$$c_1 n^{-(k-r)} < \inf_{L_n(\Delta^{h,k}(\sigma)) \subset \Delta^{h,k}(\sigma)} \sup_{f \in P_k} \|f - L_n f\|_{C^r[0,1]} < c_2 n^{-(k-r)}, \quad (6)$$

$$e_i(x) = x^i, i = 0, 1, \dots$$

$$\Pi_m := \text{span}\{e_0, e_1, \dots, e_m\}$$

$$P_m^* := \{f \in \Pi_m : \|f\|_{C^m[0,1]} \leq 1\}$$

$$\|f\|_{C^k[0,1]} = \sum_{0 \leq i \leq k} \frac{1}{i!} \sup_{x \in [0,1]} |D^i f(x)|$$

Теорема 6

Существуют $c_1, c_2 > 0$, не зависящие от n , такие, что

$$c_1 n^{-2} < \inf_{L_n(\Delta^k) \subset \Delta^k} \sup_{f \in P_{k+2}^*} \|f - L_n f\|_{C^k[0,1]} < c_2 n^{-2}.$$

Теорема 7

Существуют $c_1, c_2 > 0$, не зависящие от n , такие, что

$$c_1 n^{-2} < \inf_{L_n(\Delta^{h,k}(\sigma)) \subset \Delta^{h,k}(\sigma)} \sup_{f \in P_{k+2}^*} \|f - L_n f\|_{C^k[0,1]} < c_2 n^{-2}. \quad (5)$$

$$\Gamma := \{i : h \leq i < k, \sigma_i \neq 0, \sigma_{i+1} = 0, \sigma_i \cdot \sigma_{i+2} \neq -1\}$$

Теорема 8

Пусть $n \geq k + r$, $\Gamma \neq \emptyset$ и $r \in \Gamma$. Тогда существуют $c_1, c_2 > 0$, не зависящие от n , такие, что

$$c_1 n^{-(k-r)} < \inf_{L_n(\Delta^{h,k}(\sigma)) \subset \Delta^{h,k}(\sigma)} \sup_{f \in P_k} \|f - L_n f\|_{C^r[0,1]} < c_2 n^{-(k-r)}, \quad (6)$$

$$e_i(x) = x^i, i = 0, 1, \dots$$

$$\Pi_m := \text{span}\{e_0, e_1, \dots, e_m\}$$

$$P_m^* := \{f \in \Pi_m : \|f\|_{C^m[0,1]} \leq 1\}$$

$$\|f\|_{C^k[0,1]} = \sum_{0 \leq i \leq k} \frac{1}{i!} \sup_{x \in [0,1]} |D^i f(x)|$$

Теорема 6

Существуют $c_1, c_2 > 0$, не зависящие от n , такие, что

$$c_1 n^{-2} < \inf_{L_n(\Delta^k) \subset \Delta^k} \sup_{f \in P_{k+2}^*} \|f - L_n f\|_{C^k[0,1]} < c_2 n^{-2}.$$

Теорема 7

Существуют $c_1, c_2 > 0$, не зависящие от n , такие, что

$$c_1 n^{-2} < \inf_{L_n(\Delta^{h,k}(\sigma)) \subset \Delta^{h,k}(\sigma)} \sup_{f \in P_{k+2}^*} \|f - L_n f\|_{C^k[0,1]} < c_2 n^{-2}. \quad (5)$$

$$\Gamma := \{i : h \leq i < k, \sigma_i \neq 0, \sigma_{i+1} = 0, \sigma_i \cdot \sigma_{i+2} \neq -1\}$$

Теорема 8

Пусть $n \geq k + r$, $\Gamma \neq \emptyset$ и $r \in \Gamma$. Тогда существуют $c_1, c_2 > 0$, не зависящие от n , такие, что

$$c_1 n^{-(k-r)} < \inf_{L_n(\Delta^{h,k}(\sigma)) \subset \Delta^{h,k}(\sigma)} \sup_{f \in P_k} \|f - L_n f\|_{C^r[0,1]} < c_2 n^{-(k-r)}, \quad (6)$$

5. k -монотонная регрессия

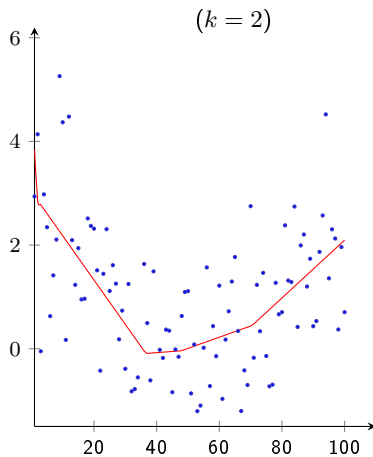
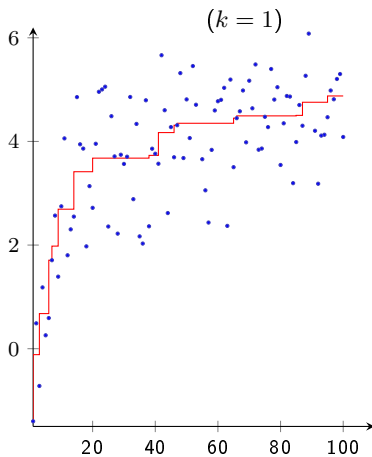
Дискретизация



k -монотонное восстановление



Линейная аппроксимация



$$\sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 \rightarrow \min_{z \in \Delta_n^k}.$$

$$y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N},$$

Пусть Δ_n^k — множество всех k -монотонных векторов из $\mathbb{R}^n$.

Задача построения k -монотонной регрессии

заключается в нахождении вектора z с наименьшей квадратичной ошибкой аппроксимации заданного вектора $y \in \mathbb{R}^n$ (не обязательно k -монотонного), при условии k -монотонности вектора z :

$$(z - y)^T(z - y) = \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 \rightarrow \min_{z \in \Delta_n^k}. \quad (7)$$

(Robertson and Dykstra, 1982), (Robertson, 1988), (Barlow, 1972), (Dykstra-1981), (Best, 1990), (Best, 2000), (Ahuja, 2001), (Hansohm, 2007), (Burdakov, 2004), (Leeuw, 2009)

Применяется

- в непараметрической математической статистике (Chen, 2013), (Bach, 2017);
- при сглаживании эмпирических данных (Siem, 2006), (Gorinevsky, 2008 and 2009), (Altmann, 2014), (Hastie, 2015), (Burdakov, 2017);
- в задачах динамического программирования (Chen, 2013), (Cai, 2014);

$$y = (y_1, \dots, y_n)^T \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N},$$

Пусть Δ_n^k — множество всех k -монотонных векторов из $\mathbb{R}^n$.

Задача построения k -монотонной регрессии

заключается в нахождении вектора z с наименьшей квадратичной ошибкой аппроксимации заданного вектора $y \in \mathbb{R}^n$ (не обязательно k -монотонного), при условии k -монотонности вектора z :

$$(z - y)^T(z - y) = \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 \rightarrow \min_{z \in \Delta_n^k}. \quad (7)$$

(Robertson and Dykstra, 1982), (Robertson, 1988), (Barlow, 1972), (Dykstra-1981), (Best, 1990), (Best, 2000), (Ahuja, 2001), (Hansohm, 2007), (Burdakov, 2004), (Leeuw, 2009)

Применяется

- в непараметрической математической статистике (Chen, 2013), (Bach, 2017);
- при сглаживании эмпирических данных (Siem, 2006), (Gorinevsky, 2008 and 2009), (Altmann, 2014), (Hastie, 2015), (Burdakov, 2017);
- в задачах динамического программирования (Chen, 2013), (Cai, 2014);

Вспомогательная задача для активного множества S

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (z_i - y_i)^2 \rightarrow \min, \quad (8)$$

где минимум ищется по всем $z \in \mathbb{R}^n$, таким, что $\delta^k z_i = 0 \ \forall i \in S$.

ДВОЙСТВЕННЫЙ АЛГОРИТМ НА ОСНОВЕ АКТИВНОГО МНОЖЕСТВА

begin

- На вход подается вектор $y \in \mathbb{R}^n$;
- Активное множество $S = \emptyset$;
- Исходное значение $z(S) = y$;
- **while** $z(S) \notin \delta_n^k$ **do**
 - задаем $S \leftarrow S \cup \{i : \Delta^k z_i < 0\}$;
 - решаем задачу (8) для активного множества S ;
 - переписываем значения $z(S)$;
- Возвращаем решение $z(S)$;

end

Теорема 9

Для любого изначально заданного активного множества $S \subset S^*$, алгоритм сходится к точному решению задачи (7) не более чем за $n - |S|$ итераций, где n — размерность задачи и $|S|$ — количество элементов в активном множестве на первой итерации алгоритма.

- Установлен ряд аппроксимативных свойств операторов, обладающих свойством формосохранения относительно конусов обобщенно выпуклых функций, в частности, доказаны теоремы типа теорем Коровкина об условиях сходимости последовательностей формосохраняющих операторов.
- Разработан и реализован двойственный алгоритм для построения k -монотонной регрессии на основе активного множества и доказана его сходимость.

СПАСИБО!