Конструктивный алгоритм построения спрямляемых кривых на проксимально гладких множествах

М.С. Лопушански, Г.М. Иванов

1)lopushanski@phystech.edu; Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук

2) grimivanov@gmail.com; Австрийский институт науки и технологий

08.11.2022

Понятие проксимально гладкого множества введено в работе [1] Кларком, Штерном и Воленски.

В работе [2] исследовались различные свойства проксимально гладких множеств и их связь со слабой выпуклостью.

В гильбертовых пространствах Г.Е. Ивановым [3] было доказано существование и единственность геодезической на проксимально гладких множествах и получена оценка сверху на ее длину.

В работе [4] получен алгоритм построения спрямляемой кривой в равномерно выпуклых и равномерно гладких банаховых пространствах.

Теорема 1.14.2 [3] Пусть A является замкнутым множеством в гильбертовом пространстве и $R > 0$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. Множество A является проксимально гладким с константой R.
2. Для любых двух точек $x_0, x_1 \in A$ таких, что $\|x_0 - x_1\| < 2R$, существует кривая γ во множестве A с концами в x_0 и x_1, чья длина не превосходит
$$2R \arcsin\left(\frac{\|x_0 - x_1\|}{2R}\right).$$

Краткое содержание

Определения и обозначения

H – гильбертово пространство.

Definition

Расстоянием от точки $x \in H$ до множества $A \subset H$ называется

$$\operatorname{dist}(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

Definition

Метрической проекцией точки x на множество A называется произвольный элемент множества

$$P_A(x) = \{a \in A : \ \|a - x\| = \operatorname{dist}(x, A)\}.$$

Definition

Множество $\{x \in H : \ 0 < \operatorname{dist}(x, A) < R\}$ называется открытой R-окрестностью множества A.

Определения и обозначения

Definition

Множество называется проксимально гладким если функция расстояния до него непрерывна дифференцируема в открытой R окрестности данного множества.

Definition

Пусть задано проксимально гладкое с константой $R > 0$ множество A, и две различные точки x_0 и x_1 из множества A такие, что $\frac{\|x_0 - x_1\|}{R} < 2$.
Будем говорить, что произвольная точка множества

$$P_A([x_0, x_1]) \cap \left(\mathcal{H}_{x_0 - x_1} + \frac{x_0 + x_1}{2} \right)$$

является *слайс-проекцией* точки $\frac{x_0+x_1}{2}$ на множество A.

Алгоритм

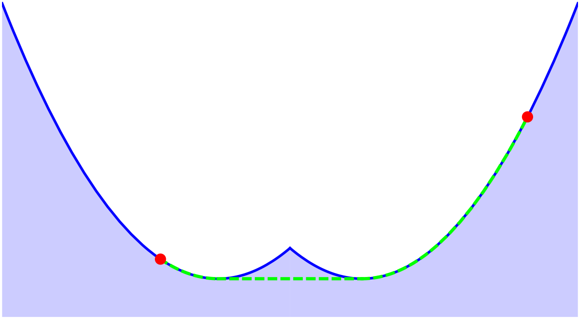

Рис.: Цель

Алгоритм

$A \subset H$ – проксимально гладкое множество, x_0, x_1 – две различные точки в A такие, что $\frac{\|x_0 - x_1\|}{R} < 2$.

Пусть $S_0 = \{0, 1\}$ и $S_i = \{\frac{j}{2^i} \mid j \in [2^i]\} \cup \{0\}$ для любого $i \in \mathbb{N}$.

1. Определим функцию f в точках S_0: $f(0) = x_0$ и $f(1) = x_1$.
2. Для любого числа $i \in \mathbb{N}$, расширем область определения функции f на множество $S_i \setminus S_{i-1}$ следующим образом:
   определим значение f в точках $\frac{2j-1}{2^i}$ как слайс-проекцию середины отрезка
   $\left[f\left(\frac{j-1}{2^{i-1}}\right), f\left(\frac{j}{2^{i-1}}\right)\right]$ для любого числа $j \in [2^{i-1}]$ на множестве A.
3. Мы переопределяем значения функции f в точках $S_{i-1} \setminus S_0$ как слайс-проекцию середин отрезков $\left[f\left(\frac{2j-1}{2^i}\right), f\left(\frac{2j+1}{2^i}\right)\right]$ для любого числа $j \in [2^{i-1} - 1]$.
4. Непрерывно продолжаем f на $[0, 1]$.

Алгоритм

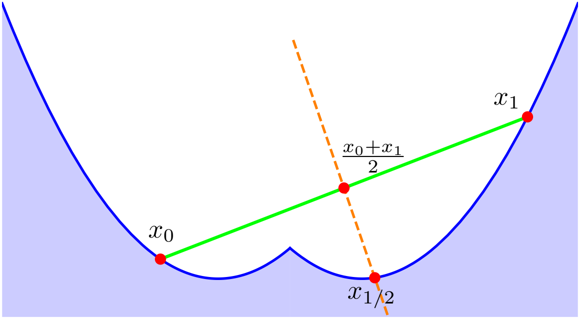

Рис.: Первый шаг алгоритма

Алгоритм

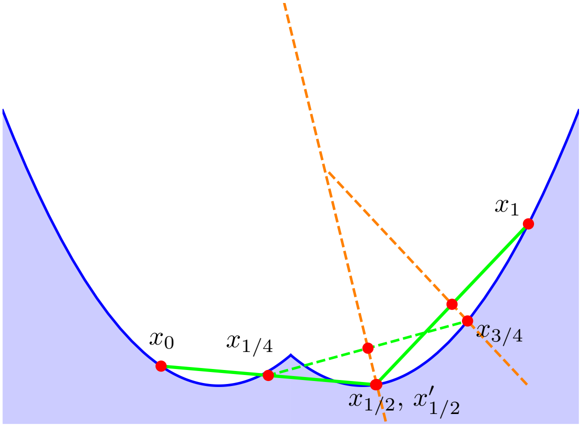

Рис.: Второй шаг алгоритма

Основные результаты

Теорема 1. Пусть множество $A \subset H$ является проксимально гладким с константой R замкнутым множеством, точки x_0, x_1 из A такие, что $\|x_0 - x_1\| < 2R$. Тогда алгоритм сходится и возвращает кривую $\gamma \subset A$ с концами x_0, x_1 такую, что

$$\operatorname{length}(\gamma) \leq \|x_0 - x_1\| \left(1 + \frac{59}{125R^2} \|x_0 - x_1\|^2\right).$$

Основные результаты

Теорема 2. В условиях теоремы 1, пусть алгоритм был применен n раз. Тогда, для полученной ломаной при $n \to \infty$ алгоритм сходится и длина полученной кривой оценивается следующим образом

$$\operatorname{length}(\gamma) < \|x_0 - x_1\| + \frac{\|x_0 - x_1\|^3}{8R^2}.$$

- Clarke F. H., Stern R. J., Wolenski P.,R. *Proximal Smoothness and Lower–C^2 Property* // J. Convex Analysis. –1995. – V. 2. – N 1. – P. 117–144.
- Балашов М. В., Иванов Г. Е. *Слабо выпуклые и проксимально гладкие множества в банаховых пространствах* // Изв. РАН. Сер. матем. – 2009. – Т. 73. – N 3. – С. 23–66.
- Иванов Г. Е. *Слабо выпуклые множества и функции.* – М.: Физматлит, 2006. – 352 с.
- Ivanov G. M., Lopushanski M. S. *Rectifiable Curves in Proximally Smooth Sets* // Set-Valued Var. Anal. –2022. – V. 30. – P. 657–675.

Спасибо за внимание!

Алгоритм и Теорема 1 получены в МИАН им. Стеклова при поддержки гранта РНФ № 19-11-00087.