Об одной задаче минимакса на вещественной оси

Никифорова Татьяна Михайловна

Уральский Федеральный университет
Институт математики и механики УрО РАН

Руководитель: Глазырина Полина Юрьевна

08.11.2022

Задача Боянова

- Б. Д. Боянов, 1978 год:
Пусть $\nu_1, \dots, \nu_n$ — натуральные числа.
Существует единственный набор точек $x_1^* \leqslant \dots \leqslant x_n^*$ со свойством

$$\max_{x\in[0,1]} |(x - x_1^*)^{\nu_1} \dots (x - x_n^*)^{\nu_n}| =$$

$$\min_{x_1\leqslant\ldots\leqslant x_n} \max_{x\in[0,1]} |(x - x_1)^{\nu_1} \dots (x - x_n)^{\nu_n}|.$$

Задача Боянова

- Б. Д. Боянов, 1978 год:
  Пусть $\nu_1, \dots, \nu_n$ — натуральные числа.
  Существует единственный набор точек $x_1^* \leqslant \dots \leqslant x_n^*$ со свойством

$$\max_{x\in[0,1]} |(x - x_1^*)^{\nu_1} \dots (x - x_n^*)^{\nu_n}| =$$

$$\min_{x_1\leqslant\dots\leqslant x_n} \max_{x\in[0,1]} |(x - x_1)^{\nu_1} \dots (x - x_n)^{\nu_n}|.$$

  Кроме того, $0 < x_1^* < \dots < x_n^* < 1$.
  Экстремальный многочлен T характеризуется свойством альтернанса: есть такие точки
  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$, что

$$T(t_k) = (-1)^{\nu_{k+1}+\dots+\nu_n} \|T\|, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Задача Боянова

Прологарифмируем

$$\ln |(x-x_1)^{\nu_1} \dots (x-x_n)^{\nu_n}| = \sum_{i=1}^{n} \nu_i \ln |x - x_i|.$$

Задача Боянова — минимизировать

$$\sup_{t\in[0,1]} \sum_{i=1}^{n} \nu_i \ln |t - x_i|.$$

Обобщённая взвешенная задача минимакса на $[0, 1]$

Пусть $w \geqslant 0$, и $w \not\equiv 0$ на $[0, 1]$. Рассмотрим задачу минимизации

$$\sup_{t\in[0,1]} \left\{ \ln|w(t)| + \sum_{i=1}^{n} \nu_i \ln|t - x_i| \right\}, \quad \nu_i > 0.$$

Обобщённая взвешенная задача минимакса на $[0, 1]$

Пусть $w \geqslant 0$, и $w \not\equiv 0$ на $[0, 1]$. Рассмотрим задачу минимизации

$$\sup_{t\in[0,1]} \left\{ \ln|w(t)| + \sum_{i=1}^{n} \nu_i \ln|t - x_i| \right\}, \quad \nu_i > 0.$$

Функция $J : A \subseteq \mathbb{R} \to \underline{\mathbb{R}}$ называется *n-функцией поля* на A, если

- J ограничена сверху на A;
- J принимает конечные значения более чем в n точках A.

Обобщённая взвешенная задача минимакса на $[0, 1]$

Пусть $w \geqslant 0$, и $w \not\equiv 0$ на $[0, 1]$. Рассмотрим задачу минимизации

$$\sup_{t\in[0,1]} \left\{ \ln|w(t)| + \sum_{i=1}^{n} \nu_i \ln|t - x_i| \right\}, \quad \nu_i > 0.$$

Функция $J : A \subseteq \mathbb{R} \to \underline{\mathbb{R}}$ называется *n-функцией поля* на A, если

- J ограничена сверху на A;
- J принимает конечные значения более чем в n точках A.

Функция $K : (-p, 0) \cup (0, p) \to \mathbb{R},\ 0 < p \leqslant +\infty$, называется *ядерной функцией*, если

- K вогнута на $(-p, 0)$ и на $(0, p)$;
- $\lim\limits_{t\to-0} K(t) = \lim\limits_{t\to+0} K(t)$.

Пусть $w \geqslant 0$, и $w \not\equiv 0$ на $[0, 1]$. Рассмотрим задачу минимизации

$$\sup_{t\in[0,1]} \left\{ \ln|w(t)| + \sum_{i=1}^{n} \nu_i \ln|t - x_i| \right\}, \quad \nu_i > 0.$$

Функция $J : A \subseteq \mathbb{R} \to \underline{\mathbb{R}}$ называется n-функцией поля на A, если

- J ограничена сверху на A;
- J принимает конечные значения более чем в n точках A.

Функция $K : (-p, 0) \cup (0, p) \to \mathbb{R}$, $0 < p \leqslant +\infty$, называется ядерной функцией, если

- K вогнута на $(-p, 0)$ и на $(0, p)$;
- $\lim\limits_{t\to-0} K(t) = \lim\limits_{t\to+0} K(t)$.

Заменим

$$\ln|w(t)| \ \text{ на } \ J(t) \quad \text{и} \quad \ln|t - x_i| \ \text{ на } \ K(t - x_i).$$

Обобщённая взвешенная задача минимакса на $[0,1]$

Обозначим

$$\overline{S_0^1} = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n),\ 0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant 1\}.$$

Обобщённая взвешенная задача минимакса на $[0,1]$

Обозначим

$$\overline{S_0^1} = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n),\ 0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant 1\}.$$

Введём сумму сдвигов

$$F(\mathbf{x}, t) = J(t) + \sum_{i=1}^{n} \nu_i K(t - x_i), \quad \mathbf{x} \in \overline{S_0^1}.$$

Рассмотрим задачу минимизации

$$\sup_{t\in[0,1]} F(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \overline{S_0^1}.$$

Обобщённая взвешенная задача минимакса на $[0,1]$

Обозначим

$$\overline{S_0^1} = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n),\ 0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant 1\}.$$

Введём сумму сдвигов

$$F(\mathbf{x}, t) = J(t) + \sum_{i=1}^{n} \nu_i K(t - x_i), \quad \mathbf{x} \in \overline{S_0^1}.$$

Рассмотрим задачу минимизации

$$\sup_{t\in[0,1]} F(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \overline{S_0^1}.$$

Пусть

$$m_i^1(\mathbf{x}) = \sup\{F(\mathbf{x}, t)\colon\ t \in [x_i, x_{i+1}]\}, \quad i = 0, \ldots, n, \quad x_0 = 1,\ x_{n+1} = 1.$$

Ядерная функция

- Ядерная функция K называется сингулярной, если

$$\lim_{t \to 0} K(t) = -\infty.$$

- Если функция $K(t)$ убывает на $(-p, 0)$ и возрастает на $(0, p)$, то мы будем называть K монотонной.

Обобщённая взвешенная задача минимакса на $[0, 1]$

- B. Farkas, B. Nagy, S. Gy. Révész, 2021 год.
  Пусть $K : (-1, 0) \cup (0, 1) \to \mathbb{R}$ — сингулярное, строго вогнутое, строго монотонное ядро, и J — полунепрерывная сверху n-функция поля на $[0, 1]$.

Обобщённая взвешенная задача минимакса на $[0,1]$

- B. Farkas, B. Nagy, S. Gy. Révész, 2021 год.
  Пусть $K : (-1,0) \cup (0,1) \to \mathbb{R}$ — сингулярное, строго вогнутое, строго монотонное ядро, и J — полунепрерывная сверху n-функция поля на $[0,1]$.
  Тогда есть единственная точка минимума $\mathbf{w} \in \overline{S_0^1}$, т. е.,

$$\sup_{t\in[0,1]} F(\mathbf{w},t) = \min_{\mathbf{x}\in\overline{S_0^1}} \sup_{t\in[0,1]} F(\mathbf{x},t).$$

- B. Farkas, B. Nagy, S. Gy. Révész, 2021 год.
  Пусть $K : (-1,0) \cup (0,1) \to \mathbb{R}$ — сингулярное, строго вогнутое, строго монотонное ядро, и J — полунепрерывная сверху n-функция поля на $[0,1]$.
  Тогда есть единственная точка минимума $\mathbf{w} \in \overline{S_0^1}$, т. е.,

$$\sup_{t\in[0,1]} F(\mathbf{w},t) = \min_{\mathbf{x}\in\overline{S_0^1}} \sup_{t\in[0,1]} F(\mathbf{x},t).$$

  Эта точка $\mathbf{w}$ обладает свойством равноколебания, т.е.,

$$m_0^1(\mathbf{w}) = m_1^1(\mathbf{w}) = \ldots = m_n^1(\mathbf{w}).$$

Обобщённая взвешенная задача минимакса на $\mathbb{R}$

Пусть

$$\overline{S^\infty} = \{\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n),\ -\infty < y_1 \leqslant \ldots \leqslant y_n < +\infty\}.$$

Рассмотрим поле J, ядро K на $\mathbb{R}$ и задачу минимизации

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} F(\mathbf{y}, t), \quad \mathbf{y} \in \overline{S^\infty}.$$

Обобщённая взвешенная задача минимакса на $\mathbb{R}$

Пусть

$$\overline{S^\infty} = \{\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n),\ -\infty < y_1 \leqslant \ldots \leqslant y_n < +\infty\}.$$

Рассмотрим поле J, ядро K на $\mathbb{R}$ и задачу минимизации

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} F(\mathbf{y}, t), \quad \mathbf{y} \in \overline{S^\infty}.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} m_0(\mathbf{y}) &= \sup_{t \in (-\infty, y_1]} F(\mathbf{y}, t), \\ m_i(\mathbf{y}) &= \sup_{t \in [y_i, y_{i+1}]} F(\mathbf{y}, t),\ i = 1, \ldots, n-1, \\ m_n(\mathbf{y}) &= \sup_{t \in [y_n, +\infty)} F(\mathbf{y}, t). \end{aligned}$$

Функция поля J на $\mathbb{R}$ называется допустимой, если для всех $a, b \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t\to\infty}(J(t) + aK(t-b)) = -\infty.$$

Функция поля J на $\mathbb{R}$ называется допустимой, если для всех $a, b \in \mathbb{R}$

$$\lim_{t\to\infty} (J(t) + aK(t-b)) = -\infty.$$

Теорема

Пусть $K : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — сингулярное, строго вогнутое и строго монотонное ядро, и J — допустимая полунепрерывная сверху n−функция поля на $\mathbb{R}$. Тогда есть единственная точка минимума $\mathbf{w} \in \overline{S^\infty}$, т. е.,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} F(\mathbf{w}, t) = \min_{\mathbf{y}\in\overline{S^\infty}} \sup_{t\in\mathbb{R}} F(\mathbf{y}, t).$$

Эта точка $\mathbf{w}$ — точка равноколебания, т. е.

$$m_0(\mathbf{w}) = m_1(\mathbf{w}) = \ldots = m_n(\mathbf{w}).$$

- Обозначим

$$\overline{m}(\mathbf{y}) = \sup_{t\in\mathbb{R}} F(\mathbf{y}, t),$$

$$\|\mathbf{y}\| = \max_{i=1,\dots,n} |y_i|, \quad \mathbf{y} \in \overline{S^\infty}$$

$$\overline{S^L} = \{\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n),\ -L \leqslant y_1 \leqslant \dots \leqslant y_n \leqslant L\}.$$

Лемма 1

Если $K : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — строго монотонное ядро, и $J : \mathbb{R} \to \underline{\mathbb{R}}$ — допустимая функция поля, то

$$\exists\, \mathcal{L} > 0 \quad \forall\, \mathbf{y} \in \overline{S^\infty} \quad \Big(\|\mathbf{y}\| > \mathcal{L} \ \Rightarrow\ \exists\, \mathbf{y}' \in \overline{S^L} \quad \overline{m}(\mathbf{y}') < \overline{m}(\mathbf{y})\Big).$$

- Обозначим

$$\overline{m}(\mathbf{y}) = \sup_{t\in\mathbb{R}} F(\mathbf{y}, t),$$

$$\|\mathbf{y}\| = \max_{i=1,\dots,n} |y_i|, \quad \mathbf{y} \in \overline{S^\infty}$$

$$\overline{S^L} = \{\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n),\ -L \leqslant y_1 \leqslant \dots \leqslant y_n \leqslant L\}.$$

Лемма 1

Если $K : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — строго монотонное ядро, и $J : \mathbb{R} \to \underline{\mathbb{R}}$ — допустимая функция поля, то

$$\exists\, \mathcal{L} > 0 \quad \forall\, \mathbf{y} \in \overline{S^\infty} \quad \Big(\|\mathbf{y}\| > \mathcal{L} \ \Rightarrow\ \exists\, \mathbf{y}' \in \overline{S^L} \quad \overline{m}(\mathbf{y}') < \overline{m}(\mathbf{y})\Big).$$

Экстремальная точка «живёт» в $\overline{S^{\mathcal{L}}}$.

Лемма 2

Если $K : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — монотонное ядро, и $J : \mathbb{R} \to \underline{\mathbb{R}}$ — допустимая функция поля, то

$$\forall L > 0 \quad \exists M_L \geqslant L \quad \forall \mathbf{y} \in \overline{S^L} \quad \overline{m}(\mathbf{y}) = \sup_{|t| \leqslant M_L} F(\mathbf{y}, t).$$

Лемма 2

Если $K : (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — монотонное ядро, и $J : \mathbb{R} \to \underline{\mathbb{R}}$ — допустимая функция поля, то

$$\forall L > 0 \quad \exists M_L \geqslant L \quad \forall \mathbf{y} \in \overline{S^L} \quad \overline{m}(\mathbf{y}) = \sup_{|t| \leqslant M_L} F(\mathbf{y}, t).$$

Для всех $\mathbf{y} \in \overline{S^L}$ $\overline{m}(\mathbf{y})$ «живёт» на $[-M_L, M_L]$.

Схема доказательства

- $L_0 = \mathcal{L}$ (лемма 1), $L_{k+1} = M_{L_k} + 1$ (лемма 2).

Схема доказательства

- $L_0 = \mathcal{L}$ (лемма 1), $L_{k+1} = M_{L_k} + 1$ (лемма 2).
- Пусть $\overline{m^{L_k}}(\mathbf{y}) = \sup\limits_{t \in [-L_k, L_k]} F(\mathbf{y}, t)$.

  Имеем $\overline{m^{L_{k+1}}}(\mathbf{y}) = \overline{m}(\mathbf{y}),\ \mathbf{y} \in \overline{S^{L_k}}$.

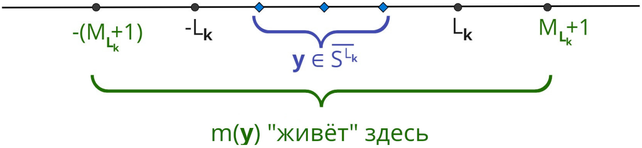
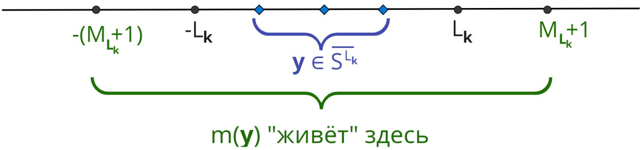


Схема доказательства

- $L_0 = \mathcal{L}$ (лемма 1), $L_{k+1} = M_{L_k} + 1$ (лемма 2).
- Пусть $\overline{m^{L_k}}(\mathbf{y}) = \sup\limits_{t \in [-L_k, L_k]} F(\mathbf{y}, t)$.

  Имеем $\overline{m^{L_{k+1}}}(\mathbf{y}) = \overline{m}(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in \overline{S^{L_k}}$.

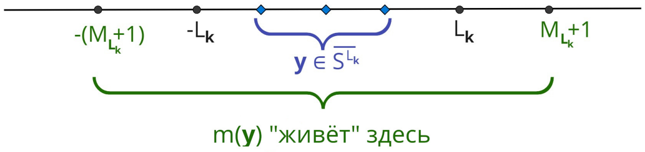


- Задача на $[-L_k, L_k]$ сводится к задаче на $[0, 1]$.

Схема доказательства

- $L_0 = \mathcal{L}$ (лемма 1), $L_{k+1} = M_{L_k} + 1$ (лемма 2).
- Пусть $\overline{m^{L_k}}(\mathbf{y}) = \sup\limits_{t \in [-L_k, L_k]} F(\mathbf{y}, t)$.

  Имеем $\overline{m^{L_{k+1}}}(\mathbf{y}) = \overline{m}(\mathbf{y}), \ \mathbf{y} \in \overline{S^{L_k}}$.

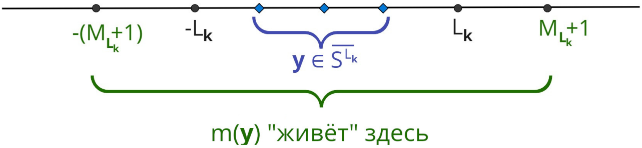


- Задача на $[-L_k, L_k]$ сводится к задаче на $[0, 1]$. Пусть $\mathbf{w}_k \in \overline{S^{L_k}}$ — единственная точка минимума $[-L_k, L_k]$ (Farkas, Nagy, Révész).

Схема доказательства

- $L_0 = \mathcal{L}$ (лемма 1), $L_{k+1} = M_{L_k} + 1$ (лемма 2).
- Пусть $\overline{m^{L_k}}(\mathbf{y}) = \sup\limits_{t \in [-L_k, L_k]} F(\mathbf{y}, t)$.

  Имеем $\overline{m^{L_{k+1}}}(\mathbf{y}) = \overline{m}(\mathbf{y})$, $\mathbf{y} \in \overline{S^{L_k}}$.



- Задача на $[-L_k, L_k]$ сводится к задаче на $[0, 1]$. Пусть $\mathbf{w}_k \in \overline{S^{L_k}}$ — единственная точка минимума $[-L_k, L_k]$ (Farkas, Nagy, Révész).
- Есть такое k_0, что $\overline{m^{L_{k_0}}}(\mathbf{w}_{k_0}) = \overline{m}(\mathbf{w}_{k_0})$.

  (Иначе, $\mathbf{w}_k \in \overline{S^{L_k}} \setminus \overline{S^{L_{k-1}}} \implies \|\mathbf{w}_k\| \to +\infty$, и можно получить противоречие лемме 1.)

- Есть такое k_0, что $\overline{m^{L_{k_0}}}(\mathbf{w}_{k_0}) = \overline{m}(\mathbf{w}_{k_0})$.
- $\overline{m^{L_{k_0}}}(\mathbf{w}_{k_0}) = \overline{m}(\mathbf{w}_{k_0}) < \overline{m^{L_{k_0}}}(\mathbf{y}) = \overline{m}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{w}_{k_0} \neq \mathbf{y} \in \overline{S^{\mathcal{L}}}$.

- Есть такое k_0, что $\overline{m^{L_{k_0}}}(\mathbf{w}_{k_0}) = \overline{m}(\mathbf{w}_{k_0})$.
- $\overline{m^{L_{k_0}}}(\mathbf{w}_{k_0}) = \overline{m}(\mathbf{w}_{k_0}) < \overline{m^{L_{k_0}}}(\mathbf{y}) = \overline{m}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{w}_{k_0} \neq \mathbf{y} \in \overline{S^{\mathcal{L}}}$.
- Итак, $\mathbf{w}_{k_0}$ — единственный экстремум на $\overline{S^{\mathcal{L}}}$.
  По лемме 1, это точка минимума на $\overline{S^{\infty}}$.

Литература

[1] B. D. Bojanov, A generalization of Chebyshev polynomials, J. Approx. Theory 26, 1979, no. 4, 293–300.

[2] B. Farkas, B. Nagy, S. Gy. Révész, On the weighted Bojanov–Chebyshev Problem and the sum of translates method of Fenton, https://arxiv.org/abs/2112.10169, 2021.