

Колмогоровские поперечники пересечения двух конечномерных шаров в смешанной норме

А.А. Васильева

Пусть $m, k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$. Через l_p^m обозначим пространство $\mathbb{R}^m$ с нормой

$$\|(x_i)_{1 \leq i \leq m}\|_{l_p^m} = \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{1/p};$$

Пусть $m, k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$. Через l_p^m обозначим пространство $\mathbb{R}^m$ с нормой

$$\|(x_i)_{1 \leq i \leq m}\|_{l_p^m} = \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{1/p};$$

через $l_{p,\theta}^{m,k}$ обозначим пространство $\mathbb{R}^{mk}$ с нормой

$$\|(x_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k}\|_{l_{p,\theta}^{m,k}} = \left(\sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^m |x_{i,j}|^p \right)^{\theta/p} \right)^{1/\theta}$$

Пусть $m, k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$. Через l_p^m обозначим пространство $\mathbb{R}^m$ с нормой

$$\|(x_i)_{1 \leq i \leq m}\|_{l_p^m} = \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{1/p};$$

через $l_{p,\theta}^{m,k}$ обозначим пространство $\mathbb{R}^{mk}$ с нормой

$$\|(x_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k}\|_{l_{p,\theta}^{m,k}} = \left(\sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^m |x_{i,j}|^p \right)^{\theta/p} \right)^{1/\theta}$$

(для $p = \infty$ или $\theta = \infty$ определение модифицируется естественным образом).

Пусть $m, k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq \theta < \infty$. Через l_p^m обозначим пространство $\mathbb{R}^m$ с нормой

$$\|(x_i)_{1 \leq i \leq m}\|_{l_p^m} = \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p \right)^{1/p};$$

через $l_{p,\theta}^{m,k}$ обозначим пространство $\mathbb{R}^{mk}$ с нормой

$$\|(x_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k}\|_{l_{p,\theta}^{m,k}} = \left(\sum_{j=1}^k \left(\sum_{i=1}^m |x_{i,j}|^p \right)^{\theta/p} \right)^{1/\theta}$$

(для $p = \infty$ или $\theta = \infty$ определение модифицируется естественным образом).

Через $B_{p,\theta}^{m,k}$ (при $k = 1$ — через B_p^m) обозначим единичный шар пространства $l_{p,\theta}^{m,k}$.

Пусть X — нормированное пространство, $M \subset X$, $n \in \mathbb{Z}_+$,
 $\mathcal{L}_n(X)$ — совокупность линейных подпространств в X
размерности не выше n .

Пусть X — нормированное пространство, $M \subset X$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{L}_n(X)$ — совокупность линейных подпространств в X размерности не выше n . Колмогоровским n -поперечником множества M в пространстве X называется величина

$$d_n(M, X) = \inf_{L \in \mathcal{L}_n(X)} \sup_{x \in M} \inf_{y \in L} \|x - y\|.$$

Пусть X — нормированное пространство, $M \subset X$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{L}_n(X)$ — совокупность линейных подпространств в X размерности не выше n . Колмогоровским n -поперечником множества M в пространстве X называется величина

$$d_n(M, X) = \inf_{L \in \mathcal{L}_n(X)} \sup_{x \in M} \inf_{y \in L} \|x - y\|.$$

Порядковые оценки поперечников $d_n(B_p^m, l_q^m)$ известны при всех p, q , кроме случая $q = \infty$, $1 \leq p < 2$:

Пусть X — нормированное пространство, $M \subset X$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{L}_n(X)$ — совокупность линейных подпространств в X размерности не выше n . Колмогоровским n -поперечником множества M в пространстве X называется величина

$$d_n(M, X) = \inf_{L \in \mathcal{L}_n(X)} \sup_{x \in M} \inf_{y \in L} \|x - y\|.$$

Порядковые оценки поперечников $d_n(B_p^m, l_q^m)$ известны при всех p, q , кроме случая $q = \infty$, $1 \leq p < 2$:

- ▶ $p \geq q$ (А. Пич — 1974, М.И. Стесин — 1975) — точные значения;

Пусть X — нормированное пространство, $M \subset X$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\mathcal{L}_n(X)$ — совокупность линейных подпространств в X размерности не выше n . Колмогоровским n -поперечником множества M в пространстве X называется величина

$$d_n(M, X) = \inf_{L \in \mathcal{L}_n(X)} \sup_{x \in M} \inf_{y \in L} \|x - y\|.$$

Порядковые оценки поперечников $d_n(B_p^m, l_q^m)$ известны при всех p, q , кроме случая $q = \infty$, $1 \leq p < 2$:

- ▶ $p \geq q$ (А. Пич — 1974, М.И. Стесин — 1975) — точные значения;
- ▶ $p = 1, q = 2$ (А.Н. Колмогоров, А.А. Петров, Ю.М. Смирнов — 1947; С.Б. Стечкин — 1954) — точные значения;

- ▶ $1 \leq p < q < \infty$ — порядковые оценки (Е.Д. Глускин – 1983);

- ▶ $1 \leq p < q < \infty$ — порядковые оценки (Е.Д. Глускин — 1983);
- ▶ $2 \leq p < \infty, q = \infty$ — порядковые оценки (Б. С. Кашин — 1977 — оценка сверху при $p = 2$; А.Ю. Гарнаев, Е.Д. Глускин — 1984);

- ▶ $1 \leq p < q < \infty$ — порядковые оценки (Е.Д. Глускин — 1983);
- ▶ $2 \leq p < \infty, q = \infty$ — порядковые оценки (Б. С. Кашин — 1977 — оценка сверху при $p = 2$; А.Ю. Гарнаев, Е.Д. Глускин — 1984);
- ▶ $1 \leq p < 2, q = \infty$ — оценки с точностью до логарифмического множителя (Б.С. Кашин — 1975).

- ▶ $1 \leq p < q < \infty$ — порядковые оценки (Е.Д. Глускин — 1983);
- ▶ $2 \leq p < \infty, q = \infty$ — порядковые оценки (Б. С. Кашин — 1977 — оценка сверху при $p = 2$; А.Ю. Гарнаев, Е.Д. Глускин — 1984);
- ▶ $1 \leq p < 2, q = \infty$ — оценки с точностью до логарифмического множителя (Б.С. Кашин — 1975).

Порядковые оценки колмогоровских поперечников

$d_n(B_{p,\theta}^{m,k}, l_{q,\sigma}^{m,k})$ известны в следующих случаях:

- ▶ $1 \leq p < q < \infty$ — порядковые оценки (Е.Д. Глускин — 1983);
- ▶ $2 \leq p < \infty, q = \infty$ — порядковые оценки (Б. С. Кашин — 1977 — оценка сверху при $p = 2$; А.Ю. Гарнаев, Е.Д. Глускин — 1984);
- ▶ $1 \leq p < 2, q = \infty$ — оценки с точностью до логарифмического множителя (Б.С. Кашин — 1975).

Порядковые оценки колмогоровских поперечников

$d_n(B_{p,\theta}^{m,k}, l_{q,\sigma}^{m,k})$ известны в следующих случаях:

- ▶ $p = 1, \theta = \infty, q = 2, 1 < \sigma < \infty$ (Э.М. Галеев, 1990);

- ▶ $1 \leq p < q < \infty$ — порядковые оценки (Е.Д. Глускин — 1983);
- ▶ $2 \leq p < \infty, q = \infty$ — порядковые оценки (Б. С. Кашин — 1977 — оценка сверху при $p = 2$; А.Ю. Гарнаев, Е.Д. Глускин — 1984);
- ▶ $1 \leq p < 2, q = \infty$ — оценки с точностью до логарифмического множителя (Б.С. Кашин — 1975).

Порядковые оценки колмогоровских поперечников

$d_n(B_{p,\theta}^{m,k}, l_{q,\sigma}^{m,k})$ известны в следующих случаях:

- ▶ $p = 1, \theta = \infty, q = 2, 1 < \sigma < \infty$ (Э.М. Галеев, 1990);
- ▶ $1 < \sigma \leq \infty; q = 2$ или $1 < q \leq \min\{2, \sigma\}; \theta = \infty; p = 1$ или $p = \infty$ (Э.М. Галеев, 1995);

- ▶ $1 \leq p < q < \infty$ — порядковые оценки (Е.Д. Глускин — 1983);
- ▶ $2 \leq p < \infty, q = \infty$ — порядковые оценки (Б. С. Кашин — 1977 — оценка сверху при $p = 2$; А.Ю. Гарнаев, Е.Д. Глускин — 1984);
- ▶ $1 \leq p < 2, q = \infty$ — оценки с точностью до логарифмического множителя (Б.С. Кашин — 1975).

Порядковые оценки колмогоровских поперечников

$d_n(B_{p,\theta}^{m,k}, l_{q,\sigma}^{m,k})$ известны в следующих случаях:

- ▶ $p = 1, \theta = \infty, q = 2, 1 < \sigma < \infty$ (Э.М. Галеев, 1990);
- ▶ $1 < \sigma \leq \infty; q = 2$ или $1 < q \leq \min\{2, \sigma\}; \theta = \infty; p = 1$ или $p = \infty$ (Э.М. Галеев, 1995);
- ▶ $p = \theta, q = 2, \sigma = 1$, при этом $p = 1$ или $2 \leq p \leq \infty$ (А.Д. Изаак, 1996);

- ▶ $2 \leq q < \infty, 2 \leq \sigma < \infty, 1 \leq p \leq q, 1 \leq \theta \leq \sigma,$
 $n \leq a(q, \sigma)mk$ (A.B. – 2013); здесь $a(q, \sigma)$ — некоторое
положительное число; результат нетрудно распространить
на случай $n \leq \frac{mk}{2}$;

- ▶ $2 \leq q < \infty, 2 \leq \sigma < \infty, 1 \leq p \leq q, 1 \leq \theta \leq \sigma,$
 $n \leq a(q, \sigma)mk$ (А.В. – 2013); здесь $a(q, \sigma)$ — некоторое
положительное число; результат нетрудно распространить
на случай $n \leq \frac{mk}{2}$;
- ▶ а) $p = 1, \theta = \infty, q = 2, \sigma = 1$; б) $p \leq q \leq 2, \theta \geq \sigma$ (Ю.В.
Малыхин, К.С. Рютин – 2017);

- ▶ $2 \leq q < \infty, 2 \leq \sigma < \infty, 1 \leq p \leq q, 1 \leq \theta \leq \sigma,$
 $n \leq a(q, \sigma)mk$ (А.В. – 2013); здесь $a(q, \sigma)$ — некоторое
 положительное число; результат нетрудно распространить
 на случай $n \leq \frac{mk}{2}$;
- ▶ а) $p = 1, \theta = \infty, q = 2, \sigma = 1$; б) $p \leq q \leq 2, \theta \geq \sigma$ (Ю.В.
 Малыхин, К.С. Рютин – 2017);
- ▶ а) $p = q = 2, \theta \geq 2, \sigma = \infty$, б) $p = \theta = \sigma \geq 2, q = \infty$ (С.
 Дирксен, Т. Улльрих – 2018).

- ▶ $2 \leq q < \infty, 2 \leq \sigma < \infty, 1 \leq p \leq q, 1 \leq \theta \leq \sigma,$
 $n \leq a(q, \sigma)mk$ (А.В. – 2013); здесь $a(q, \sigma)$ — некоторое
 положительное число; результат нетрудно распространить
 на случай $n \leq \frac{mk}{2}$;
- ▶ а) $p = 1, \theta = \infty, q = 2, \sigma = 1$; б) $p \leq q \leq 2, \theta \geq \sigma$ (Ю.В.
 Малыхин, К.С. Рютин – 2017);
- ▶ а) $p = q = 2, \theta \geq 2, \sigma = \infty$, б) $p = \theta = \sigma \geq 2, q = \infty$ (С.
 Дирксен, Т. Ульрих – 2018).

Кроме того, при $1 \leq p \leq \infty, \theta = \infty, 2 \leq q < \infty, \sigma = q,$
 $n \leq c(q)mk$, где $c(q)$ — некоторое положительное число, была
 получена оценка снизу (Э.М. Галеев, 1986).

- ▶ $2 \leq q < \infty, 2 \leq \sigma < \infty, 1 \leq p \leq q, 1 \leq \theta \leq \sigma,$
 $n \leq a(q, \sigma)mk$ (А.В. – 2013); здесь $a(q, \sigma)$ — некоторое
 положительное число; результат нетрудно распространить
 на случай $n \leq \frac{mk}{2}$;
- ▶ а) $p = 1, \theta = \infty, q = 2, \sigma = 1$; б) $p \leq q \leq 2, \theta \geq \sigma$ (Ю.В.
 Малыхин, К.С. Рютин – 2017);
- ▶ а) $p = q = 2, \theta \geq 2, \sigma = \infty$, б) $p = \theta = \sigma \geq 2, q = \infty$ (С.
 Дирксен, Т. Ульрих – 2018).

Кроме того, при $1 \leq p \leq \infty, \theta = \infty, 2 \leq q < \infty, \sigma = q,$
 $n \leq c(q)mk$, где $c(q)$ — некоторое положительное число, была
 получена оценка снизу (Э.М. Галеев, 1986).

Полученные оценки могут использоваться в задаче о
 колмогоровских поперечниках классов Бесова с доминирующей
 смешанной гладкостью или весовых классов Бесова.

Э. М. Галеев (1981) получил оценки поперечников
 $d_n(\cap_{\alpha \in A} \nu_\alpha B_{p_\alpha}^m, l_q^m)$ при $m = 2n$;

Э. М. Галеев (1981) получил оценки поперечников
 $d_n(\cap_{\alpha \in A} \nu_{\alpha} B_{p_{\alpha}}^m, l_q^m)$ при $m = 2n$; этот результат был обобщен на
случай $n \leq m/2$ (А.В. – 2022).

Э. М. Галеев (1981) получил оценки поперечников $d_n(\cap_{\alpha \in A} \nu_\alpha B_{p_\alpha}^m, l_q^m)$ при $m = 2n$; этот результат был обобщен на случай $n \leq m/2$ (А.В. – 2022). Эти результаты использовались для получения оценок поперечников пересечения классов Соболева (с весами и без).

Э. М. Галеев (1981) получил оценки поперечников $d_n(\cap_{\alpha \in A} \nu_\alpha B_{p_\alpha}^m, l_q^m)$ при $m = 2n$; этот результат был обобщен на случай $n \leq m/2$ (А.В. – 2022). Эти результаты использовались для получения оценок поперечников пересечения классов Соболева (с весами и без).

Здесь рассматривается задача о поперечниках пересечения двух шаров $\nu_i B_{p_i, \theta_i}^{m,k}$ ($i = 1, 2$) в $l_{q, \sigma}^{m,k}$;

Э. М. Галеев (1981) получил оценки поперечников $d_n(\cap_{\alpha \in A} \nu_{\alpha} B_{p_{\alpha}}^m, l_q^m)$ при $m = 2n$; этот результат был обобщен на случай $n \leq m/2$ (А.В. – 2022). Эти результаты использовались для получения оценок поперечников пересечения классов Соболева (с весами и без).

Здесь рассматривается задача о поперечниках пересечения двух шаров $\nu_i B_{p_i, \theta_i}^{m,k}$ ($i = 1, 2$) в $l_{q, \sigma}^{m,k}$; при этом предполагается, что $2 \leq q < \infty$, $2 \leq \sigma < \infty$; $1 \leq p_i \leq q$, $1 \leq \theta_i \leq \sigma$ ($i = 1, 2$) или $2 \leq p_i \leq \sigma$, $2 \leq \theta_i \leq \infty$ ($i = 1, 2$).

Э. М. Галеев (1981) получил оценки поперечников $d_n(\cap_{\alpha \in A} \nu_\alpha B_{p_\alpha}^m, I_q^m)$ при $m = 2n$; этот результат был обобщен на случай $n \leq m/2$ (А.В. – 2022). Эти результаты использовались для получения оценок поперечников пересечения классов Соболева (с весами и без).

Здесь рассматривается задача о поперечниках пересечения двух шаров $\nu_i B_{p_i, \theta_i}^{m,k}$ ($i = 1, 2$) в $I_{q, \sigma}^{m,k}$; при этом предполагается, что $2 \leq q < \infty$, $2 \leq \sigma < \infty$; $1 \leq p_i \leq q$, $1 \leq \theta_i \leq \sigma$ ($i = 1, 2$) или $2 \leq p_i \leq \sigma$, $2 \leq \theta_i \leq \infty$ ($i = 1, 2$).

Сначала сформулируем результат 2013 г. о поперечниках $B_{p, \theta}^{m,k}$ в $I_{q, \sigma}^{m,k}$ при $2 \leq q$, $\sigma < \infty$, $p \leq q$, $\theta \leq \sigma$.

Э. М. Галеев (1981) получил оценки поперечников $d_n(\cap_{\alpha \in A} \nu_\alpha B_{p_\alpha}^m, l_q^m)$ при $m = 2n$; этот результат был обобщен на случай $n \leq m/2$ (А.В. – 2022). Эти результаты использовались для получения оценок поперечников пересечения классов Соболева (с весами и без).

Здесь рассматривается задача о поперечниках пересечения двух шаров $\nu_i B_{p_i, \theta_i}^{m,k}$ ($i = 1, 2$) в $l_{q, \sigma}^{m,k}$; при этом предполагается, что $2 \leq q < \infty$, $2 \leq \sigma < \infty$; $1 \leq p_i \leq q$, $1 \leq \theta_i \leq \sigma$ ($i = 1, 2$) или $2 \leq p_i \leq \sigma$, $2 \leq \theta_i \leq \infty$ ($i = 1, 2$).

Сначала сформулируем результат 2013 г. о поперечниках $B_{p, \theta}^{m,k}$ в $l_{q, \sigma}^{m,k}$ при $2 \leq q$, $\sigma < \infty$, $p \leq q$, $\theta \leq \sigma$.

Пусть $q > 2$, $1 \leq p \leq q$. Обозначим $\lambda_{p,q} = \min \left\{ \frac{1/p - 1/q}{1/2 - 1/q}, 1 \right\}$.

Для $q = 2$, $1 \leq p \leq 2$ положим $\lambda_{p,2} = 1$.

Теорема А. Пусть $2 \leq q < \infty$, $2 \leq \sigma < \infty$, $1 \leq p \leq q$,
 $1 \leq \theta \leq \sigma$, $m, k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leq \frac{mk}{2}$.

Теорема А. Пусть $2 \leq q < \infty$, $2 \leq \sigma < \infty$, $1 \leq p \leq q$, $1 \leq \theta \leq \sigma$, $m, k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leq \frac{mk}{2}$. Тогда

► если $\max\{p, \theta\} \leq 2$, то

$$d_n(B_{p,\theta}^{m,k}, l_{q,\sigma}^{m,k}) \underset{q,\theta}{\asymp} \min\{1, n^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{q}} k^{\frac{1}{\sigma}}\};$$

Теорема А. Пусть $2 \leq q < \infty$, $2 \leq \sigma < \infty$, $1 \leq p \leq q$, $1 \leq \theta \leq \sigma$, $m, k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leq \frac{mk}{2}$. Тогда

► если $\max\{p, \theta\} \leq 2$, то

$$d_n(B_{p,\theta}^{m,k}, l_{q,\sigma}^{m,k}) \underset{q,\theta}{\asymp} \min\{1, n^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{q}} k^{\frac{1}{\sigma}}\};$$

► если $\max\{p, \theta\} \geq 2$, $\lambda_{p,q} \leq \lambda_{\theta,\sigma}$, то

$$d_n(B_{p,\theta}^{m,k}, l_{q,\sigma}^{m,k}) \underset{q,\theta}{\asymp} \begin{cases} 1, & n \leq m^{\frac{2}{q}} k^{\frac{2}{\sigma}}, \\ \left(n^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{q}} k^{\frac{1}{\sigma}}\right)^{\lambda_{p,q}}, & m^{\frac{2}{q}} k^{\frac{2}{\sigma}} \leq n \leq mk^{\frac{2}{\sigma}}, \\ m^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \left(n^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{\sigma}}\right)^{\lambda_{\theta,\sigma}}, & mk^{\frac{2}{\sigma}} \leq n \leq \frac{mk}{2}; \end{cases}$$

► если $\max\{p, \theta\} \geq 2$, $\lambda_{p,q} \geq \lambda_{\theta,\sigma}$, то

$$d_n(B_{p,\theta}^{m,k}, l_{q,\sigma}^{m,k}) \underset{q,\theta}{\asymp} \begin{cases} 1, & n \leq m^{\frac{2}{q}} k^{\frac{2}{\sigma}}, \\ \left(n^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{q}} k^{\frac{1}{\sigma}}\right)^{\lambda_{\theta,\sigma}}, & m^{\frac{2}{q}} k^{\frac{2}{\sigma}} \leq n \leq km^{\frac{2}{q}}, \\ k^{\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\theta}} \left(n^{-\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{q}}\right)^{\lambda_{p,q}}, & km^{\frac{2}{q}} \leq n \leq \frac{mk}{2}. \end{cases}$$

► если $\max\{p, \theta\} \geq 2$, $\lambda_{p,q} \geq \lambda_{\theta,\sigma}$, то

$$d_n(B_{p,\theta}^{m,k}, l_{q,\sigma}^{m,k}) \underset{q,\theta}{\asymp} \begin{cases} 1, & n \leq m^{\frac{2}{q}} k^{\frac{2}{\sigma}}, \\ \left(n^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{q}} k^{\frac{1}{\sigma}}\right)^{\lambda_{\theta,\sigma}}, & m^{\frac{2}{q}} k^{\frac{2}{\sigma}} \leq n \leq km^{\frac{2}{q}}, \\ k^{\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\theta}} \left(n^{-\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{q}}\right)^{\lambda_{p,q}}, & km^{\frac{2}{q}} \leq n \leq \frac{mk}{2}. \end{cases}$$

Теперь сформулируем основные результаты.

Теорема 1. Пусть $m, k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leq \frac{mk}{2}$, $2 \leq q < \infty$,
 $2 \leq \sigma < \infty$, $1 \leq p_i \leq q$, $1 \leq \theta_i \leq \sigma$, $\nu_i > 0$, $i = 1, 2$.

Теорема 1. Пусть $m, k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leq \frac{mk}{2}$, $2 \leq q < \infty$, $2 \leq \sigma < \infty$, $1 \leq p_i \leq q$, $1 \leq \theta_i \leq \sigma$, $\nu_i > 0$, $i = 1, 2$. Определим величины $\Phi_j(m, k, n) = \Phi_j(m, k, n; p_1, p_2, \theta_1, \theta_2, q, \sigma, \nu_1, \nu_2)$, $j = 1, \dots, 5$, следующим образом:

Теорема 1. Пусть $m, k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leq \frac{mk}{2}$, $2 \leq q < \infty$, $2 \leq \sigma < \infty$, $1 \leq p_i \leq q$, $1 \leq \theta_i \leq \sigma$, $\nu_i > 0$, $i = 1, 2$. Определим величины $\Phi_j(m, k, n) = \Phi_j(m, k, n; p_1, p_2, \theta_1, \theta_2, q, \sigma, \nu_1, \nu_2)$, $j = 1, \dots, 5$, следующим образом:

► $\Phi_j(m, k, n) = \nu_j d_n(B_{p_j, \theta_j}^{m, k}, l_{q, \sigma}^{m, k}), j = 1, 2;$

Теорема 1. Пусть $m, k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leq \frac{mk}{2}$, $2 \leq q < \infty$, $2 \leq \sigma < \infty$, $1 \leq p_i \leq q$, $1 \leq \theta_i \leq \sigma$, $\nu_i > 0$, $i = 1, 2$. Определим величины $\Phi_j(m, k, n) = \Phi_j(m, k, n; p_1, p_2, \theta_1, \theta_2, q, \sigma, \nu_1, \nu_2)$, $j = 1, \dots, 5$, следующим образом:

- ▶ $\Phi_j(m, k, n) = \nu_j d_n(B_{p_j, \theta_j}^{m, k}, l_{q, \sigma}^{m, k})$, $j = 1, 2$;
- ▶ если существует такое $\tilde{\lambda} \in [0, 1]$, что $\frac{1}{2} = \frac{1-\tilde{\lambda}}{p_1} + \frac{\tilde{\lambda}}{p_2}$, то определяем число $\tilde{\theta}$ равенством $\frac{1}{\tilde{\theta}} = \frac{1-\tilde{\lambda}}{\theta_1} + \frac{\tilde{\lambda}}{\theta_2}$ и полагаем $\Phi_3(m, k, n) = \nu_1^{1-\tilde{\lambda}} \nu_2^{\tilde{\lambda}} d_n(B_{2, \tilde{\theta}}^{m, k}, l_{q, \sigma}^{m, k})$; иначе полагаем $\Phi_3(m, k, n) = +\infty$;

Теорема 1. Пусть $m, k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leq \frac{mk}{2}$, $2 \leq q < \infty$, $2 \leq \sigma < \infty$, $1 \leq p_i \leq q$, $1 \leq \theta_i \leq \sigma$, $\nu_i > 0$, $i = 1, 2$. Определим величины $\Phi_j(m, k, n) = \Phi_j(m, k, n; p_1, p_2, \theta_1, \theta_2, q, \sigma, \nu_1, \nu_2)$, $j = 1, \dots, 5$, следующим образом:

- ▶ $\Phi_j(m, k, n) = \nu_j d_n(B_{p_j, \theta_j}^{m, k}, l_{q, \sigma}^{m, k})$, $j = 1, 2$;
- ▶ если существует такое $\tilde{\lambda} \in [0, 1]$, что $\frac{1}{2} = \frac{1-\tilde{\lambda}}{p_1} + \frac{\tilde{\lambda}}{p_2}$, то определяем число $\tilde{\theta}$ равенством $\frac{1}{\tilde{\theta}} = \frac{1-\tilde{\lambda}}{\theta_1} + \frac{\tilde{\lambda}}{\theta_2}$ и полагаем $\Phi_3(m, k, n) = \nu_1^{1-\tilde{\lambda}} \nu_2^{\tilde{\lambda}} d_n(B_{2, \tilde{\theta}}^{m, k}, l_{q, \sigma}^{m, k})$; иначе полагаем $\Phi_3(m, k, n) = +\infty$;
- ▶ если существует такое $\tilde{\mu} \in [0, 1]$, что $\frac{1}{2} = \frac{1-\tilde{\mu}}{\theta_1} + \frac{\tilde{\mu}}{\theta_2}$, то определяем число $\tilde{p}$ равенством $\frac{1}{\tilde{p}} = \frac{1-\tilde{\mu}}{p_1} + \frac{\tilde{\mu}}{p_2}$ и полагаем $\Phi_4(m, k, n) = \nu_1^{1-\tilde{\mu}} \nu_2^{\tilde{\mu}} d_n(B_{\tilde{p}, 2}^{m, k}, l_{q, \sigma}^{m, k})$; иначе полагаем $\Phi_4(m, k, n) = +\infty$;

- если существуют такие $\lambda \in [0, 1]$, $p \in [2, q]$, $\theta \in [2, \sigma]$, что $\frac{1}{p} = \frac{1-\lambda}{p_1} + \frac{\lambda}{p_2}$, $\frac{1}{\theta} = \frac{1-\lambda}{\theta_1} + \frac{\lambda}{\theta_2}$ и $\lambda_{p,q} = \lambda_{\theta,\sigma}$, то полагаем $\Phi_5(m, k, n) = \nu_1^{1-\lambda} \nu_2^\lambda d_n(B_{p,\theta}^{m,k}, l_{q,\sigma}^{m,k})$; иначе полагаем $\Phi_5(m, k, n) = +\infty$.

- если существуют такие $\lambda \in [0, 1]$, $p \in [2, q]$, $\theta \in [2, \sigma]$, что $\frac{1}{p} = \frac{1-\lambda}{p_1} + \frac{\lambda}{p_2}$, $\frac{1}{\theta} = \frac{1-\lambda}{\theta_1} + \frac{\lambda}{\theta_2}$ и $\lambda_{p,q} = \lambda_{\theta,\sigma}$, то полагаем $\Phi_5(m, k, n) = \nu_1^{1-\lambda} \nu_2^\lambda d_n(B_{p,\theta}^{m,k}, l_{q,\sigma}^{m,k})$; иначе полагаем $\Phi_5(m, k, n) = +\infty$.

Тогда

$$d_n(\nu_1 B_{p_1, \theta_1}^{m,k} \cap \nu_2 B_{p_2, \theta_2}^{m,k}, l_{q, \sigma}^{m,k}) \asymp \min_{q, \sigma} \min_{1 \leq j \leq 5} \Phi_j(m, k, n).$$

- если существуют такие $\lambda \in [0, 1]$, $p \in [2, q]$, $\theta \in [2, \sigma]$, что $\frac{1}{p} = \frac{1-\lambda}{p_1} + \frac{\lambda}{p_2}$, $\frac{1}{\theta} = \frac{1-\lambda}{\theta_1} + \frac{\lambda}{\theta_2}$ и $\lambda_{p,q} = \lambda_{\theta,\sigma}$, то полагаем $\Phi_5(m, k, n) = \nu_1^{1-\lambda} \nu_2^\lambda d_n(B_{p,\theta}^{m,k}, l_{q,\sigma}^{m,k})$; иначе полагаем $\Phi_5(m, k, n) = +\infty$.

Тогда

$$d_n(\nu_1 B_{p_1,\theta_1}^{m,k} \cap \nu_2 B_{p_2,\theta_2}^{m,k}, l_{q,\sigma}^{m,k}) \asymp_{q,\sigma} \min_{1 \leq j \leq 5} \Phi_j(m, k, n).$$

Теперь распространим результат 2013 года о поперечниках одного шара $B_{p,\theta}^{m,k}$ на случай $p > q$ или $\theta > \sigma$.

- если существуют такие $\lambda \in [0, 1]$, $p \in [2, q]$, $\theta \in [2, \sigma]$, что $\frac{1}{p} = \frac{1-\lambda}{p_1} + \frac{\lambda}{p_2}$, $\frac{1}{\theta} = \frac{1-\lambda}{\theta_1} + \frac{\lambda}{\theta_2}$ и $\lambda_{p,q} = \lambda_{\theta,\sigma}$, то полагаем $\Phi_5(m, k, n) = \nu_1^{1-\lambda} \nu_2^\lambda d_n(B_{p,\theta}^{m,k}, l_{q,\sigma}^{m,k})$; иначе полагаем $\Phi_5(m, k, n) = +\infty$.

Тогда

$$d_n(\nu_1 B_{p_1, \theta_1}^{m,k} \cap \nu_2 B_{p_2, \theta_2}^{m,k}, l_{q, \sigma}^{m,k}) \asymp_{q, \sigma} \min_{1 \leq j \leq 5} \Phi_j(m, k, n).$$

Теперь распространим результат 2013 года о поперечниках одного шара $B_{p,\theta}^{m,k}$ на случай $p > q$ или $\theta > \sigma$.

Если $p \geq q$, $\theta \geq \sigma$, $n \leq \frac{mk}{2}$, то

$$d_n(B_{p,\theta}^{m,k}, l_{q,\sigma}^{m,k}) \asymp m^{1/q-1/p} k^{1/\sigma-1/\theta}.$$

Теорема 2. Пусть $n \leq \frac{mk}{2}$, $1 \leq p \leq q$, $\theta \geq \sigma$.

Теорема 2. Пусть $n \leq \frac{mk}{2}$, $1 \leq p \leq q$, $\theta \geq \sigma$. Тогда

$$d_n(B_{p,\theta}^{m,k}, l_{q,\sigma}^{m,k}) \underset{q,\sigma}{\asymp} \begin{cases} k^{1/\sigma-1/\theta}, & n \leq km^{2/q}, \\ k^{1/\sigma-1/\theta} (n^{-1/2} m^{1/q} k^{1/2})^{\lambda_{p,q}}, & km^{2/q} \leq n \leq mk/2. \end{cases}$$

Теорема 2. Пусть $n \leq \frac{mk}{2}$, $1 \leq p \leq q$, $\theta \geq \sigma$. Тогда

$$d_n(B_{p,\theta}^{m,k}, l_{q,\sigma}^{m,k}) \underset{q,\sigma}{\asymp} \begin{cases} k^{1/\sigma-1/\theta}, & n \leq km^{2/q}, \\ k^{1/\sigma-1/\theta} (n^{-1/2} m^{1/q} k^{1/2})^{\lambda_{p,q}}, & km^{2/q} \leq n \leq mk/2. \end{cases}$$

Теорема 3. Пусть $n \leq \frac{mk}{2}$, $1 \leq \theta \leq \sigma$, $p \geq q$.

Теорема 2. Пусть $n \leq \frac{mk}{2}$, $1 \leq p \leq q$, $\theta \geq \sigma$. Тогда

$$d_n(B_{p,\theta}^{m,k}, l_{q,\sigma}^{m,k}) \underset{q,\sigma}{\asymp} \begin{cases} k^{1/\sigma-1/\theta}, & n \leq km^{2/q}, \\ k^{1/\sigma-1/\theta} (n^{-1/2} m^{1/q} k^{1/2})^{\lambda_{p,q}}, & km^{2/q} \leq n \leq mk/2. \end{cases}$$

Теорема 3. Пусть $n \leq \frac{mk}{2}$, $1 \leq \theta \leq \sigma$, $p \geq q$. Тогда

$$d_n(B_{p,\theta}^{m,k}, l_{q,\sigma}^{m,k}) \underset{q,\sigma}{\asymp} \begin{cases} m^{1/q-1/p}, & n \leq mk^{2/\sigma}, \\ m^{1/q-1/p} (n^{-1/2} m^{1/2} k^{1/\sigma})^{\lambda_{\theta,\sigma}}, & mk^{2/\sigma} \leq n \leq mk/2. \end{cases}$$

Теорема 4. Пусть $m, k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leq \frac{mk}{2}$, $2 \leq q < \infty$,
 $2 \leq \sigma < \infty$, $2 \leq p_i \leq \infty$, $2 \leq \theta_i \leq \infty$, $\nu_i > 0$, $i = 1, 2$.

Теорема 4. Пусть $m, k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leq \frac{mk}{2}$, $2 \leq q < \infty$, $2 \leq \sigma < \infty$, $2 \leq p_i \leq \infty$, $2 \leq \theta_i \leq \infty$, $\nu_i > 0$, $i = 1, 2$.

Определим величины

$$\Phi_j(m, k, n) = \Phi_j(m, k, n; p_1, p_2, \theta_1, \theta_2, q, \sigma, \nu_1, \nu_2),$$

$j = 1, \dots, 5$, следующим образом:

Теорема 4. Пусть $m, k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leq \frac{mk}{2}$, $2 \leq q < \infty$, $2 \leq \sigma < \infty$, $2 \leq p_i \leq \infty$, $2 \leq \theta_i \leq \infty$, $\nu_i > 0$, $i = 1, 2$.

Определим величины

$$\Phi_j(m, k, n) = \Phi_j(m, k, n; p_1, p_2, \theta_1, \theta_2, q, \sigma, \nu_1, \nu_2),$$

$j = 1, \dots, 5$, следующим образом:

► $\Phi_j(m, k, n) = \nu_j d_n(B_{p_j, \theta_j}^{m, k}, l_{q, \sigma}^{m, k}), j = 1, 2;$

Теорема 4. Пусть $m, k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leq \frac{mk}{2}$, $2 \leq q < \infty$, $2 \leq \sigma < \infty$, $2 \leq p_i \leq \infty$, $2 \leq \theta_i \leq \infty$, $\nu_i > 0$, $i = 1, 2$.

Определим величины

$$\Phi_j(m, k, n) = \Phi_j(m, k, n; p_1, p_2, \theta_1, \theta_2, q, \sigma, \nu_1, \nu_2),$$

$j = 1, \dots, 5$, следующим образом:

► $\Phi_j(m, k, n) = \nu_j d_n(B_{p_j, \theta_j}^{m, k}, l_{q, \sigma}^{m, k}), j = 1, 2;$

► если существует такое $\hat{\lambda} \in [0, 1]$, что $\frac{1}{q} = \frac{1-\hat{\lambda}}{p_1} + \frac{\hat{\lambda}}{p_2}$, то определяем число $\hat{\theta}$ равенством $\frac{1}{\hat{\theta}} = \frac{1-\hat{\lambda}}{\theta_1} + \frac{\hat{\lambda}}{\theta_2}$ и полагаем

$$\Phi_3(m, k, n) = \nu_1^{1-\hat{\lambda}} \nu_2^{\hat{\lambda}} d_n(B_{2, \hat{\theta}}^{m, k}, l_{q, \sigma}^{m, k}); \text{ иначе полагаем}$$

$$\Phi_3(m, k, n) = +\infty;$$

Теорема 4. Пусть $m, k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leq \frac{mk}{2}$, $2 \leq q < \infty$, $2 \leq \sigma < \infty$, $2 \leq p_i \leq \infty$, $2 \leq \theta_i \leq \infty$, $\nu_i > 0$, $i = 1, 2$.

Определим величины

$$\Phi_j(m, k, n) = \Phi_j(m, k, n; p_1, p_2, \theta_1, \theta_2, q, \sigma, \nu_1, \nu_2),$$

$j = 1, \dots, 5$, следующим образом:

- ▶ $\Phi_j(m, k, n) = \nu_j d_n(B_{p_j, \theta_j}^{m, k}, l_{q, \sigma}^{m, k})$, $j = 1, 2$;
- ▶ если существует такое $\hat{\lambda} \in [0, 1]$, что $\frac{1}{q} = \frac{1-\hat{\lambda}}{p_1} + \frac{\hat{\lambda}}{p_2}$, то определяем число $\hat{\theta}$ равенством $\frac{1}{\hat{\theta}} = \frac{1-\hat{\lambda}}{\theta_1} + \frac{\hat{\lambda}}{\theta_2}$ и полагаем $\Phi_3(m, k, n) = \nu_1^{1-\hat{\lambda}} \nu_2^{\hat{\lambda}} d_n(B_{2, \hat{\theta}}^{m, k}, l_{q, \sigma}^{m, k})$; иначе полагаем $\Phi_3(m, k, n) = +\infty$;
- ▶ если существует такое $\hat{\mu} \in [0, 1]$, что $\frac{1}{\sigma} = \frac{1-\hat{\mu}}{\theta_1} + \frac{\hat{\mu}}{\theta_2}$, то определяем число $\hat{\rho}$ равенством $\frac{1}{\hat{\rho}} = \frac{1-\hat{\mu}}{p_1} + \frac{\hat{\mu}}{p_2}$ и полагаем $\Phi_4(m, k, n) = \nu_1^{1-\hat{\mu}} \nu_2^{\hat{\mu}} d_n(B_{\hat{\rho}, 2}^{m, k}, l_{q, \sigma}^{m, k})$; иначе полагаем $\Phi_4(m, k, n) = +\infty$;

- если существуют такие $\lambda \in [0, 1]$, $p \in [2, q]$, $\theta \in [2, \sigma]$, что $\frac{1}{p} = \frac{1-\lambda}{p_1} + \frac{\lambda}{p_2}$, $\frac{1}{\theta} = \frac{1-\lambda}{\theta_1} + \frac{\lambda}{\theta_2}$ и $\lambda_{p,q} = \lambda_{\theta,\sigma}$, то полагаем $\Phi_5(m, k, n) = \nu_1^{1-\lambda} \nu_2^\lambda d_n(B_{p,\theta}^{m,k}, l_{q,\sigma}^{m,k})$; иначе полагаем $\Phi_5(m, k, n) = +\infty$.

- если существуют такие $\lambda \in [0, 1]$, $p \in [2, q]$, $\theta \in [2, \sigma]$, что $\frac{1}{p} = \frac{1-\lambda}{p_1} + \frac{\lambda}{p_2}$, $\frac{1}{\theta} = \frac{1-\lambda}{\theta_1} + \frac{\lambda}{\theta_2}$ и $\lambda_{p,q} = \lambda_{\theta,\sigma}$, то полагаем $\Phi_5(m, k, n) = \nu_1^{1-\lambda} \nu_2^\lambda d_n(B_{p,\theta}^{m,k}, l_{q,\sigma}^{m,k})$; иначе полагаем $\Phi_5(m, k, n) = +\infty$.

Тогда

$$d_n(\nu_1 B_{p_1, \theta_1}^{m,k} \cap \nu_2 B_{p_2, \theta_2}^{m,k}, l_{q, \sigma}^{m,k}) \asymp \min_{q, \sigma} \min_{1 \leq j \leq 5} \Phi_j(m, k, n).$$

Для оценок сверху используется следующее утверждение (оно следует из неравенства Гёльдера):

Для оценок сверху используется следующее утверждение (оно следует из неравенства Гёльдера):

Лемма. Пусть $1 \leq p_i \leq \infty$, $1 \leq \theta_i \leq \infty$, $\lambda \in [0, 1]$.

Для оценок сверху используется следующее утверждение (оно следует из неравенства Гёльдера):

Лемма. Пусть $1 \leq p_i \leq \infty$, $1 \leq \theta_i \leq \infty$, $\lambda \in [0, 1]$. Определим числа $p, \theta \in [1, \infty]$ равенствами

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\lambda}{p_1} + \frac{\lambda}{p_2}, \quad \frac{1}{\theta} = \frac{1-\lambda}{\theta_1} + \frac{\lambda}{\theta_2}.$$

Для оценок сверху используется следующее утверждение (оно следует из неравенства Гёльдера):

Лемма. Пусть $1 \leq p_i \leq \infty$, $1 \leq \theta_i \leq \infty$, $\lambda \in [0, 1]$. Определим числа $p, \theta \in [1, \infty]$ равенствами

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\lambda}{p_1} + \frac{\lambda}{p_2}, \quad \frac{1}{\theta} = \frac{1-\lambda}{\theta_1} + \frac{\lambda}{\theta_2}.$$

Тогда

$$\nu_1 B_{p_1, \theta_1}^{m,k} \cap \nu_2 B_{p_2, \theta_2}^{m,k} \subset \nu_1^{1-\lambda} \nu_2^\lambda B_{p, \theta}^{m,k}.$$

Для оценок сверху используется следующее утверждение (оно следует из неравенства Гёльдера):

Лемма. Пусть $1 \leq p_i \leq \infty$, $1 \leq \theta_i \leq \infty$, $\lambda \in [0, 1]$. Определим числа $p, \theta \in [1, \infty]$ равенствами

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\lambda}{p_1} + \frac{\lambda}{p_2}, \quad \frac{1}{\theta} = \frac{1-\lambda}{\theta_1} + \frac{\lambda}{\theta_2}.$$

Тогда

$$\nu_1 B_{p_1, \theta_1}^{m,k} \cap \nu_2 B_{p_2, \theta_2}^{m,k} \subset \nu_1^{1-\lambda} \nu_2^{\lambda} B_{p, \theta}^{m,k}.$$

Для получения оценок снизу в пересечение шаров вписываются многогранники специального вида.

Пусть $k, m, r, l \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq m$, $1 \leq l \leq k$.

Пусть $k, m, r, l \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq m$, $1 \leq l \leq k$. Обозначим

$$G = \{(\tau_1, \tau_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) : \tau_1 \in S_m, \tau_2 \in S_k, \varepsilon_1 \in \{1, -1\}^m, \varepsilon_2 \in \{1, -1\}^k\}$$

где S_m и S_k — группы перестановок m и k элементов соответственно.

Пусть $k, m, r, l \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq m$, $1 \leq l \leq k$. Обозначим

$$G = \{(\tau_1, \tau_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) : \tau_1 \in S_m, \tau_2 \in S_k, \varepsilon_1 \in \{1, -1\}^m, \varepsilon_2 \in \{1, -1\}^k\}$$

где S_m и S_k — группы перестановок m и k элементов соответственно. Для $x = (x_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k} \in \mathbb{R}^{mk}$,

$$\gamma = (\tau_1, \tau_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in G,$$

Пусть $k, m, r, l \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq m$, $1 \leq l \leq k$. Обозначим

$$G = \{(\tau_1, \tau_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) : \tau_1 \in S_m, \tau_2 \in S_k, \varepsilon_1 \in \{1, -1\}^m, \varepsilon_2 \in \{1, -1\}^k\}$$

где S_m и S_k — группы перестановок m и k элементов

соответственно. Для $x = (x_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k} \in \mathbb{R}^{mk}$,

$\gamma = (\tau_1, \tau_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in G$, $\varepsilon_1 = (\varepsilon_{1,i})_{1 \leq i \leq m}$, $\varepsilon_2 = (\varepsilon_{2,j})_{1 \leq j \leq k}$,

положим

Пусть $k, m, r, l \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq m$, $1 \leq l \leq k$. Обозначим

$$G = \{(\tau_1, \tau_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) : \tau_1 \in S_m, \tau_2 \in S_k, \varepsilon_1 \in \{1, -1\}^m, \varepsilon_2 \in \{1, -1\}^k\}$$

где S_m и S_k — группы перестановок m и k элементов

соответственно. Для $x = (x_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k} \in \mathbb{R}^{mk}$,

$\gamma = (\tau_1, \tau_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in G$, $\varepsilon_1 = (\varepsilon_{1,i})_{1 \leq i \leq m}$, $\varepsilon_2 = (\varepsilon_{2,j})_{1 \leq j \leq k}$,

положим

$$\gamma(x) = (\varepsilon_{1,i} \varepsilon_{2,j} x_{\tau_1(i) \tau_2(j)})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k}.$$

Пусть $k, m, r, l \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq m$, $1 \leq l \leq k$. Обозначим

$$G = \{(\tau_1, \tau_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) : \tau_1 \in S_m, \tau_2 \in S_k, \varepsilon_1 \in \{1, -1\}^m, \varepsilon_2 \in \{1, -1\}^k\}$$

где S_m и S_k — группы перестановок m и k элементов

соответственно. Для $x = (x_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k} \in \mathbb{R}^{mk}$,

$\gamma = (\tau_1, \tau_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in G$, $\varepsilon_1 = (\varepsilon_{1,i})_{1 \leq i \leq m}$, $\varepsilon_2 = (\varepsilon_{2,j})_{1 \leq j \leq k}$,

положим

$$\gamma(x) = (\varepsilon_{1,i} \varepsilon_{2,j} x_{\tau_1(i) \tau_2(j)})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k}.$$

Обозначим $e = (e_{i,j}^{m,k,r,l})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k}$, где

$$e_{i,j}^{m,k,r,l} = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq l, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

Пусть $k, m, r, l \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq m$, $1 \leq l \leq k$. Обозначим

$$G = \{(\tau_1, \tau_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) : \tau_1 \in S_m, \tau_2 \in S_k, \varepsilon_1 \in \{1, -1\}^m, \varepsilon_2 \in \{1, -1\}^k\}$$

где S_m и S_k — группы перестановок m и k элементов

соответственно. Для $x = (x_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k} \in \mathbb{R}^{mk}$,

$\gamma = (\tau_1, \tau_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \in G$, $\varepsilon_1 = (\varepsilon_{1,i})_{1 \leq i \leq m}$, $\varepsilon_2 = (\varepsilon_{2,j})_{1 \leq j \leq k}$,

положим

$$\gamma(x) = (\varepsilon_{1,i} \varepsilon_{2,j} x_{\tau_1(i) \tau_2(j)})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k}.$$

Обозначим $e = (e_{i,j}^{m,k,r,l})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq k}$, где

$$e_{i,j}^{m,k,r,l} = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq l, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$V_{r,l}^{m,k} = \text{conv}\{\gamma(e) : \gamma \in G\}.$$

Предложение. Пусть $2 \leq q < \infty$, $2 \leq \sigma < \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leq \frac{mk}{2}$.

Предложение. Пусть $2 \leq q < \infty$, $2 \leq \sigma < \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leq \frac{mk}{2}$.
Тогда

$$d_n(V_{r,l}^{m,k}, l_{q,\sigma}^{m,k}) \underset{q,\sigma}{\gtrsim} \begin{cases} r^{\frac{1}{q}} l^{\frac{1}{\sigma}}, & \text{если } n \leq m^{\frac{2}{q}} k^{\frac{2}{\sigma}} r^{1-\frac{2}{q}} l^{1-\frac{2}{\sigma}}, \\ n^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{q}} k^{\frac{1}{\sigma}} r^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}}, & \text{если } n \geq m^{\frac{2}{q}} k^{\frac{2}{\sigma}} r^{1-\frac{2}{q}} l^{1-\frac{2}{\sigma}}. \end{cases}$$

Предложение. Пусть $2 \leq q < \infty$, $2 \leq \sigma < \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leq \frac{mk}{2}$.
Тогда

$$d_n(V_{r,l}^{m,k}, l_{q,\sigma}^{m,k}) \underset{q,\sigma}{\gtrsim} \begin{cases} r^{\frac{1}{q}} l^{\frac{1}{\sigma}}, & \text{если } n \leq m^{\frac{2}{q}} k^{\frac{2}{\sigma}} r^{1-\frac{2}{q}} l^{1-\frac{2}{\sigma}}, \\ n^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{q}} k^{\frac{1}{\sigma}} r^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}}, & \text{если } n \geq m^{\frac{2}{q}} k^{\frac{2}{\sigma}} r^{1-\frac{2}{q}} l^{1-\frac{2}{\sigma}}. \end{cases}$$

При $k = 1$ это утверждение было доказано Е. Д. Глускиным.

Предложение. Пусть $2 \leq q < \infty$, $2 \leq \sigma < \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leq \frac{mk}{2}$.
Тогда

$$d_n(V_{r,l}^{m,k}, l_{q,\sigma}^{m,k}) \underset{q,\sigma}{\gtrsim} \begin{cases} r^{\frac{1}{q}} l^{\frac{1}{\sigma}}, & \text{если } n \leq m^{\frac{2}{q}} k^{\frac{2}{\sigma}} r^{1-\frac{2}{q}} l^{1-\frac{2}{\sigma}}, \\ n^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{q}} k^{\frac{1}{\sigma}} r^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}}, & \text{если } n \geq m^{\frac{2}{q}} k^{\frac{2}{\sigma}} r^{1-\frac{2}{q}} l^{1-\frac{2}{\sigma}}. \end{cases}$$

При $k = 1$ это утверждение было доказано Е. Д. Глускиным.

Лемма. Пусть $\nu_1, \nu_2 > 0$, $m, k \in \mathbb{N}$,

Предложение. Пусть $2 \leq q < \infty$, $2 \leq \sigma < \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leq \frac{mk}{2}$.
Тогда

$$d_n(V_{r,l}^{m,k}, l_{q,\sigma}^{m,k}) \underset{q,\sigma}{\gtrsim} \begin{cases} r^{\frac{1}{q}} l^{\frac{1}{\sigma}}, & \text{если } n \leq m^{\frac{2}{q}} k^{\frac{2}{\sigma}} r^{1-\frac{2}{q}} l^{1-\frac{2}{\sigma}}, \\ n^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{q}} k^{\frac{1}{\sigma}} r^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}}, & \text{если } n \geq m^{\frac{2}{q}} k^{\frac{2}{\sigma}} r^{1-\frac{2}{q}} l^{1-\frac{2}{\sigma}}. \end{cases}$$

При $k = 1$ это утверждение было доказано Е. Д. Глускиным.

Лемма. Пусть $\nu_1, \nu_2 > 0$, $m, k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in [0, 1]$, $\frac{1}{\rho} = \frac{1-\lambda}{\rho_1} + \frac{\lambda}{\rho_2}$,
 $\frac{1}{\theta} = \frac{1-\lambda}{\theta_1} + \frac{\lambda}{\theta_2}$,

Предложение. Пусть $2 \leq q < \infty$, $2 \leq \sigma < \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leq \frac{mk}{2}$.
Тогда

$$d_n(V_{r,l}^{m,k}, l_{q,\sigma}^{m,k}) \underset{q,\sigma}{\gtrsim} \begin{cases} r^{\frac{1}{q}} l^{\frac{1}{\sigma}}, & \text{если } n \leq m^{\frac{2}{q}} k^{\frac{2}{\sigma}} r^{1-\frac{2}{q}} l^{1-\frac{2}{\sigma}}, \\ n^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{q}} k^{\frac{1}{\sigma}} r^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}}, & \text{если } n \geq m^{\frac{2}{q}} k^{\frac{2}{\sigma}} r^{1-\frac{2}{q}} l^{1-\frac{2}{\sigma}}. \end{cases}$$

При $k = 1$ это утверждение было доказано Е. Д. Глускиным.

Лемма. Пусть $\nu_1, \nu_2 > 0$, $m, k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in [0, 1]$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\lambda}{p_1} + \frac{\lambda}{p_2}$,
 $\frac{1}{\theta} = \frac{1-\lambda}{\theta_1} + \frac{\lambda}{\theta_2}$, $\tilde{r} \in [1, m]$, $\tilde{l} = [1, k]$, $r = \lfloor \tilde{r} \rfloor$ или $r = \lceil \tilde{r} \rceil$, $l = \lfloor \tilde{l} \rfloor$
или $l = \lceil \tilde{l} \rceil$,

Предложение. Пусть $2 \leq q < \infty$, $2 \leq \sigma < \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leq \frac{mk}{2}$.
Тогда

$$d_n(V_{r,l}^{m,k}, l_{q,\sigma}^{m,k}) \underset{q,\sigma}{\gtrsim} \begin{cases} r^{\frac{1}{q}} l^{\frac{1}{\sigma}}, & \text{если } n \leq m^{\frac{2}{q}} k^{\frac{2}{\sigma}} r^{1-\frac{2}{q}} l^{1-\frac{2}{\sigma}}, \\ n^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{q}} k^{\frac{1}{\sigma}} r^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}}, & \text{если } n \geq m^{\frac{2}{q}} k^{\frac{2}{\sigma}} r^{1-\frac{2}{q}} l^{1-\frac{2}{\sigma}}. \end{cases}$$

При $k = 1$ это утверждение было доказано Е. Д. Глускиным.

Лемма. Пусть $\nu_1, \nu_2 > 0$, $m, k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in [0, 1]$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\lambda}{p_1} + \frac{\lambda}{p_2}$,
 $\frac{1}{\theta} = \frac{1-\lambda}{\theta_1} + \frac{\lambda}{\theta_2}$, $\tilde{r} \in [1, m]$, $\tilde{l} = [1, k]$, $r = \lfloor \tilde{r} \rfloor$ или $r = \lceil \tilde{r} \rceil$, $l = \lfloor \tilde{l} \rfloor$
или $l = \lceil \tilde{l} \rceil$,

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \tilde{r}^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \tilde{l}^{\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2}}.$$

Предложение. Пусть $2 \leq q < \infty$, $2 \leq \sigma < \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $n \leq \frac{mk}{2}$.
Тогда

$$d_n(V_{r,l}^{m,k}, l_{q,\sigma}^{m,k}) \underset{q,\sigma}{\gtrsim} \begin{cases} r^{\frac{1}{q}} l^{\frac{1}{\sigma}}, & \text{если } n \leq m^{\frac{2}{q}} k^{\frac{2}{\sigma}} r^{1-\frac{2}{q}} l^{1-\frac{2}{\sigma}}, \\ n^{-\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{q}} k^{\frac{1}{\sigma}} r^{\frac{1}{2}} l^{\frac{1}{2}}, & \text{если } n \geq m^{\frac{2}{q}} k^{\frac{2}{\sigma}} r^{1-\frac{2}{q}} l^{1-\frac{2}{\sigma}}. \end{cases}$$

При $k = 1$ это утверждение было доказано Е. Д. Глускиным.

Лемма. Пусть $\nu_1, \nu_2 > 0$, $m, k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in [0, 1]$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\lambda}{p_1} + \frac{\lambda}{p_2}$,
 $\frac{1}{\theta} = \frac{1-\lambda}{\theta_1} + \frac{\lambda}{\theta_2}$, $\tilde{r} \in [1, m]$, $\tilde{l} = [1, k]$, $r = \lfloor \tilde{r} \rfloor$ или $r = \lceil \tilde{r} \rceil$, $l = \lfloor \tilde{l} \rfloor$
или $l = \lceil \tilde{l} \rceil$,

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \tilde{r}^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \tilde{l}^{\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2}}.$$

Тогда

$$\nu_1^{1-\lambda} \nu_2^{\lambda} r^{-\frac{1}{p}} l^{-\frac{1}{\theta}} V_{r,l}^{m,k} \subset 4(\nu_1 B_{p_1, \theta_1}^{m,k} \cap \nu_2 B_{p_2, \theta_2}^{m,k}).$$